한국통계학회논문집 제4권 3호
1997년 12월 pp. 863 - 879

이변량 정규분포의 적합도 검정을 위한 통계량의 극한분포에 대한 연구[1)]

김 남 현[2)]

요 약

정규분포에 대한 적합도 검정은 실제적인 측면이나 이론적인 측면에서 그 중요성을 무시할 수 없다. 본 연구에서는 이변량 정규분포의 적합도 검정을 위한 통계량을 제안하였다. 주요 아이디어는 모든 가능한 이변량 분포의 선형조합을 고려하여, 그 선형조합의 순서통계량을 이론적인 분위수와 비교하는 것이다. 또한 제안된 통계량의 극한분포가 Gaussian process의 적분의 형태로 표시될 수 있음을 보였다.

1. 서론

일변량 정규분포의 적합도 검정법에 대해서는 많은 연구가 행해져 왔다. Shapiro와 Wilk (1965), Shapiro와 Francia (1972)는 정규분포의 검정을 위한 통계량과 이것의 계산을 위한 여러 가지 수치를 제시하였다. De Wet과 Venter (1972) 또한 정규분포의 검정을 위하여 다음과 같은 통계량을 제안하고 그것의 극한분포를 구하였다.

$X_1, \ldots, X_n$을 확률분포 F로부터의 i. i. d.(independent and identically distributed) 확률 변수라고 하자. Φ를 표준정규분포의 누적확률분포함수라고 할 때 단순 귀무가설 $H: F = \Phi$ 하에서는

$$L_n^0 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_{(i)} - \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)^2$$

가 제안되었고 복합귀무가설 $H:\ F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, μ와 σ는 미지, 에서는

$$L_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_{(i)} - \overline{X}}{S} - \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)^2$$

이 제안되었다. 여기에서 $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$은 $X_1, \ldots, X_n$의 순서통계량을 의미하고 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$이다. 본 연구에서는 L_n^0-통계량을 이변량 정규분포의 단순귀무가설을 검정하기 위한 통계량으로 일반화하는 방법을 생각해 보았다. 단순귀무가설

---

1) 이 논문은 한국과학재단 연구비 지원에 의하여 연구 수행되었음. (과제번호 : 961-0105-037-1)

2) 121-791 서울시 마포구 상수동 홍익대학교 기초과학과 조교수

" H: $X_1=(X_{11},X_{21}),\ldots,X_n=(X_{1n},X_{2n})$이 평균 $\mu_1=\mu_2=0$, 분산 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$이고 상관계수 $E(X_{1i}X_{2i})=\rho$를 가진 이변량 정규분포를 따른다." 를 검정하기 위하여

$$P_n^0=\sup_{c_1,c_2\ni c_1^2+c_2^2+2\rho c_1c_2=1}\sum_{i=1}^{n}\left\{(c_1X_1+c_2X_2)_{(i)}-\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right\}^2 \tag{1}$$

과 같은 통계량을 고려할 수 있다 . 여기서 $(\cdot)_{(i)}$는 괄호 안의 확률 변수의 i번째 순서통계량을 의미한다. 이변량 분포 (X_1,X_2)가 이변량 정규분포를 따른다는 것은 X_1,X_2의 모든 선형조합 $c_1X_1+c_2X_2$이 정규분포를 따른다는 것과 필요충분조건이므로, 하나의 선형조합에서라도 비정규성이 발견되면 이변량정규분포의 가정도 기각될 수 밖에 없다. 위의 P_n^0-통계량은 단순귀무가설 H하에서 표준정규분포를 갖는 모든 가능한 선형조합을 조사하는 것이다. 만일 단순귀무가설 H가 사실이 아니라면, P_n^0의 최대치는 가장 정규분포와 거리가 먼 선형조합에서 나타날 것이고 이 선형조합이 관심의 대상이 될 것이다.

본 논문에서는 (1)의 P_n^0-통계량의 극한분포가 Gaussian process의 적분의 형태로 표현될 수 있음을 보이고자 한다.

2. P_n^0-통계량의 극한분포

1절에서 말한바와 같이 P_n^0-통계량은 De Wet과 Venter (1972)가 제안한 L_n^0-통계량을 이변량으로 일반화한 것이다. 따라서 L_n^0의 극한분포는 P_n^0의 극한분포를 구하는 데 유용한 정보를 제공할 수 있다. 다음과 같이 n번째 sample quantile function $Q_n(y)$를 정의하고

$$Q_n(y)=\begin{cases}X_{(k)}, & \frac{k-1}{n+1}<y\le\frac{k}{n+1},\ k=1,\ldots,n\\ X_{(n)}, & \frac{n}{n+1}<y\le 1\end{cases}$$

normed quantile process $\{\rho_n(y);0<y<1\}$를

$$\rho_n(y)=\sqrt{n}\phi(\Phi^{-1}(y))(Q_n(y)-\Phi^{-1}(y)) \tag{2}$$

라고 하자. a_n^0는

$$a_n^0=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+1}\right)\left(1-\frac{k}{n+1}\right)/\phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)$$

라고 하면

$$\begin{aligned}L_n^0-a_n^0&=\sum_{i=1}^{n}\left(X_{(i)}-\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n+1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)/\phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_n^2\left(\frac{i}{n+1}\right)-\frac{i}{n+1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)}{\phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)}\end{aligned}$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\rho_n(F_n(x))\}^2 - F_n(x)(1-F_n(x))}{\phi^2(\Phi^{-1}(F_n(x)))}\, dF_n(x) \tag{3}$$

이 된다. Csörgő와 Révész (1981)의 정리 4.5.6과 4.5.7에 따르면, $X_1, \ldots, X_n$이 표준정규분포로 부터의 i.i.d. 확률변수일 때 (2)에서 정의된 normed quantile process $\rho_n(y)$ 는

$$\sup_{\delta_n \le y \le 1-\delta_n} |\rho_n(y) - B_n(y)| \overset{a.s.}{=\!=} O(n^{-1/2}\log n)$$

과 같이 Brownian bridge로 근사될 수 있다. 여기서 $\delta_n = 25n^{-1}\log\log n$ 이고 Brownian bridge $B(y)$ 는

$$E(B(y)) = 0, \quad Cov(B(y_1), B(y_2)) = \min(y_1, y_2) - y_1 y_2$$

을 갖는 Gaussian process임을 상기하라. 따라서 (3)를 통하여

$$L_n^0 - a_n^0 \xrightarrow{d} \int_0^1 \frac{B^2(y) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\, dy \tag{4}$$

임을 예측할 수 있다. 이에 대한 자세한 설명은 Csörgő(1983)을 보라.

(4)와 유사하게 $P_n{}^0$ 의 극한을 Gaussian process의 적분으로 표현하기 위하여 $P_n{}^0$ - 통계량의 c_1, c_2 를

$$c_1 = \sin\theta - \cos\theta \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad c_2 = \cos\theta \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

으로 놓으면, $P_n{}^0$ 는 귀무가설 H가 사실일 때,

$$\begin{aligned} P_n{}^0 &= \sup_{\substack{c_1, c_2 \\ \ni .\ c_1^2 + c_2^2 + 2\rho c_1 c_2 = 1}} \sum_{i=1}^{n} \left\{ (c_1 X_1 + c_2 X_2)_{(i)} - \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right\}^2 \\ &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} \sum_{i=1}^{n} \left((\sin\theta \cdot Z_1 + \cos\theta \cdot Z_2)_{(i)} - \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \right)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

이 된다. 여기서 $Z_{1i} = X_{1i}$, $Z_{2i} = (X_{2i} - \rho X_{1i})/\sqrt{1-\rho^2}$ 으로 Z_{1i}, Z_{2i}, $i = 1, \ldots, n$ 는 표준정규분포로 부터의 i.i.d. 확률변수이다. (4), (5)로부터 어렵지 않게

$$P_n{}^0 - a_n^0 \xrightarrow{d} \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} \int_0^1 \frac{B^2(y, \theta) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\, dy \tag{6}$$

을 예측할 수 있다. 여기에서 $B(y, \theta)$는 공분산 함수

$$\begin{aligned} &E(B(y_1, \theta_1) B(y_2, \theta_2)) \\ &\quad = \Pr(\sin\theta_1 \cdot Z_1 + \cos\theta_1 \cdot Z_2 \le \Phi^{-1}(y_1) \text{ and } \sin\theta_2 \cdot Z_1 + \cos\theta_2 \cdot Z_2 \le \Phi^{-1}(y_2)) - y_1 y_2 \end{aligned}$$

를 가진 Gaussian process이다. 단, Z_1, Z_2는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.

2.1 Empirical Process의 Gaussian Process로의 근사

(5)의 P_n^0-통계량의 극한분포가 (6)이 됨을 보이기 위해서 우선 empirical measure

$$P_n(y,\theta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\sin\theta\cdot Z_{1i}+\cos\theta\cdot Z_{2i}\leq \Phi^{-1}(y)) \tag{7}$$

를 고려하여 이에 해당하는 empirical process

$$\alpha_n=\sqrt{n}(P_n-P) \tag{8}$$

가 Gaussian process로 근사될 수 있음을 보여야 한다. 여기서 P는 $[0,1]^2$에서 정의된 Lebesgue measure이고 $Z_{1i}, Z_{2i},\ i=1,\ldots n$는 서로 독립인 표준정규분포를 따르는 확률변수이다. 이를 보이기 위하여 Massart(1989)의 정리가 매우 중요한 역할을 한다.

μ를 $[0,1]^d$에서 정의된 Lebesgue measure라고 하고 $U_1=(U_{11},U_{21},\ldots,U_{d1})$, $U_2=(U_{12},U_{22},\ldots,U_{d2}),\ldots$을 분포 μ를 갖는 서로 독립인 확률변수라고 하자. 다시 말해서 $U_1, U_2,\ldots$는 $[0,1]^d$에서의 균일분포(uniform distribution)를 따른다고 생각될 수 있다. μ_n을

$$\mu_n(S)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(U_i\in S) \tag{9}$$

로 정의된 empirical measure라고 하고 α_n^d를

$$\alpha_n^d=\sqrt{n}(\mu_n-\mu) \tag{10}$$

로 정의된 empirical process라고 하자. 여기서 I는 indicator 함수를 나타내고 S는 $S\subset[0,1]^d$이다. 만일 주어진 Borel set의 집합군(class) $\mathfrak{I}^d$가 적당한 의미에서 너무 많은 원소를 포함하지 않는다면 α_n^d는 Brownian bridge B로 근사될 수 있을 것이다. 다시 말해서 적당한 b_n에 대하여

$$\sup_{S\in\mathfrak{I}^d}|\alpha_n^d(S)-B_n(S)| \stackrel{a.s.}{=} O(b_n) \tag{11}$$

이 된다는 것이다. 여기에서 집합군 $\mathfrak{I}^d$에서의 Gaussian process B가 Brownian bridge라는 것은

$$EB(S)=0,\ EB(S_1)B(S_2)=P(S_1\wedge S_2)-P(S_1)P(S_2),\quad S_i\in\mathfrak{I}^d,\ i=1,2,$$

임을 의미한다.

Massart(1989)은 (11)이 성립하기 위해서 $\mathfrak{I}^d$가 만족하여야 하는 두 가지 조건을 제시하였다. 하나는 $\mathfrak{I}^d$의 원소 $S\subset[0,1]^d$의 경계가 어느 정도 완만해야한다는 조건이고 다른 하나는 $\mathfrak{I}^d$의 원소의 개수가 너무 많지 않아야 한다는 조건이다.

(i) The uniform Minkowski condition (The UM condition)

집합군 $\mathfrak{I}^d$에서 모든 $\varepsilon\in(0,1]$과 모든 $S\in\mathfrak{I}^d$에 대하여

$$\Pr((\partial S)^{\varepsilon})\leq K\varepsilon$$

을 만족하는 K가 존재한다. 여기에서 A^{ε}은 집합 A의 ε-경계로서

$$A^{\varepsilon}=\{y\in R^d: |y-z|<\varepsilon \text{ for some } z\in A\}$$

을 나타낸다.

(ii) The condition $H(\zeta)$, $0<\zeta<1$

적당한 상수 K가 존재하여

$$N(\varepsilon, \mathfrak{I}^{d}) \leq \exp(K\varepsilon^{-\zeta})$$

이 모든 $\varepsilon \in (0,1]$에 대하여 성립한다. 여기에서 $N(\varepsilon, \mathfrak{I}^{d})$는 $\mathfrak{I}^{d}(\varepsilon)$의 minimal cardinality를 말하고 $\mathfrak{I}^{d}(\varepsilon)$은 아래의 조건을 만족하는 Borel set의 집합군이다.

'모든 $S \in \mathfrak{I}^{d}$에 대하여 $S^{-}(\varepsilon) \subseteq S \subseteq S^{+}(\varepsilon)$과 $\Pr(S^{+}(\varepsilon)-S^{-}(\varepsilon)) \leq \varepsilon$을 만족하는 $S^{-}(\varepsilon), S^{+}(\varepsilon) \in \mathfrak{I}^{d}(\varepsilon)$이 존재한다.'

정리 1. (Massart(1989)) 집합군 $\mathfrak{I}^{d}$가 조건 (i)과 (ii)를 만족하면, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sup_{S \in \mathfrak{I}^{d}} |\alpha_n^d(S) - B_n(S)| \overset{a.s.}{=\!=} (n^{-\frac{1-\zeta}{2d}} \log n)$$

를 만족하는 $\mathfrak{I}^{d}$에서의 Brownian bridge 가 존재한다.

정리 1을 적용하여 (8)에 정의된 empirical process α_n이 Brownian bridge로 근사될 수 있음을 보이기 위하여 정리 1에서 $d=2$ 이고 $S \equiv S(y,\theta)$가

$$S(y,\theta) = \{(u_1, u_2) \in [0,1]^2 : \sin\theta \cdot \Phi^{-1}(u_1) + \cos\theta \cdot \Phi^{-1}(u_2) \leq \Phi^{-1}(y)\} \quad (12)$$

이고 $\mathfrak{I}^{d} = \mathfrak{I}$ 가

$$\mathfrak{I} = \{S \equiv S(y,\theta) \subset [0,1]^2 : 0<y<1, 0 \leq \theta < 2\pi\} \quad (13)$$

인 경우를 고려한다. 이 경우 (9)의 empirical measure $\mu_n(S)$, $S \in \mathfrak{I}^{d}$, 는

$$\begin{aligned} \mu_n(S) &\equiv \mu_n(S(y,\theta)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I((U_{1i}, U_{2i}) \in S(y,\theta)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I(\sin\theta \cdot \Phi^{-1}(U_{1i}) + \cos\theta \cdot \Phi^{-1}(U_{2i}) \leq \Phi^{-1}(y)) \end{aligned}$$

으로 (7)의 empirical measure P_n이 된다.

(12)에 정의된 집합 $S(y, \theta)$는 주어진 값 (y, θ), $0<y<1$, $0 \leq \theta < 2\pi$,에 의해 indexing 할 수 있으므로

$$P_n(S) \equiv P_n(S(y, \theta)) \equiv P_n(y, \theta)$$

로 모두 같은 의미로 간주해도 무방하다. 이제 P_n에 해당하는 empirical process $\alpha_n(S)$,

$$\begin{aligned} \alpha_n(S) &= \sqrt{n}(P_n(S) - P(S)), \quad S \in \mathfrak{I} \\ &= \sqrt{n}(P_n(S(y,\theta)) - y) \end{aligned} \quad (14)$$

가 Brownian bridge로 근사될 수 있음을 보이기 위하여 (13)에 주어진 집합군 $\mathfrak{I}$가 Massart의 조건 (i)과 (ii)를 만족함을 보이면 충분하다. 이 경우 우리는 다음의 정리 2를 얻는다.

정리 2. (13)에 정의된 집합군 $\mathfrak{I}$는 조건 (i)과 $\zeta=\frac{1}{2}$일 때 조건 (ii)를 만족한다. 따라서 (14)의 empirical process $\{\alpha_n(S)\ ;\ S\in\mathfrak{I}\}$에 대하여

$$\sup_{S\in\mathfrak{I}}|\alpha_n(S)-B_n(S)| \overset{a.s.}{=} O(n^{-\frac{1}{8}}\log n) \tag{15}$$

을 만족하는 Brownian bridge $\{B_n(S)\ ;\ S\in\mathfrak{I}\}$가 존재한다.

<증명> $S\equiv S(y,\theta)\in\mathfrak{I}$의 경계 ∂S는

$$\begin{aligned}\partial S &= \{(u_1,u_2):\ \sin\theta\cdot\Phi^{-1}(u_1)+\cos\theta\cdot\Phi^{-1}(u_2)=\Phi^{-1}(y)\}\\ &= \left\{(u_1,u_2):\ u_2=\Phi\!\left(\frac{\Phi^{-1}(y)}{\cos\theta}-\tan\theta\cdot\Phi^{-1}(u_1)\right)\overset{let}{=}f(u_1)\right\}\end{aligned}$$

이다. 함수 $f(u_1)$은 $(0,1)$에서 단조증가함수이므로 조건 (i) (The UM condition)이 만족된다는 것은 쉽게 보일 수가 있다. 주어진 값 y와 θ에 대하여 ∂S의 길이는

$$\int_0^1\sqrt{\{f'(u_1)\}^2+1}\,du_1\le\int_0^1(f'(s)+1)\,ds=2$$

이므로 모든 $S\in\mathfrak{I}$와 모든 $\varepsilon\in(0,1]$에 대하여

$$P((\partial S)^{\varepsilon})\le 2\cdot 2\varepsilon$$

이 성립한다.

집합군 $\mathfrak{I}$의 원소 $S(y,\theta)$는 $(y,\theta)\in(0,1)\times[0,2\pi)$에 의해 결정된다. $(0,1)\times[0,2\pi)$가 compact set이므로 집합군 $\mathfrak{I}$의 minimal cardinality에 관한 조건 (ii)가 성립하리라는 것은 쉽게 예상할 수 있으나 정확한 증명은 길고 지루하므로 간단히 증명의 아이디어만 설명하고자 한다. 이에 대한 자세한 증명은 Kim(1994)를 참고하라. 만일 $|y_1-y_2|<\delta$이고 $|\theta_1-\theta_2|<\delta$이면 어렵지 않게

$$\Pr(S(y_1,\theta_1)\Delta S(y_2,\theta_2))<C\delta$$

임을 보일 수가 있고 이 사실을 이용하여 $\zeta=1/2$일 때 조건 (ii)가 성립함을 보일 수 있다. 단, $A\Delta B$는

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

을 의미한다.

□

2.2 Quantile process의 Gaussian process로의 근사

다음으로 (14)의 empirical process α_n에 해당하는 uniform quantile process u_n을 정의하고 이 u_n이 Gaussian process로 수렴(weak convergence)함을 보이겠다. 집합군 $\mathfrak{I}$의 원소 $S\equiv S(y,\theta)$는 주어진 값 (y,θ)에 의해서 결정되어지므로 $\mathfrak{I}$의 원소 $S\equiv S(y,\theta)$는 일반성을 잃지 않고 두 개의 모수

$$(y,\theta)\in(0,1)\times[0,2\pi)\overset{let}{=}\Theta$$

로 표시될 수 있다.

우선 quantile function $U_n(y, \theta)$가

$$\begin{aligned} U_n(y, \theta) &\equiv U_n(S(y, \theta)) \\ &= (\Phi(\sin\theta \cdot \Phi^{-1}(U_1) + \cos\theta \cdot \Phi^{-1}(U_2)))_{(k)} \\ &\underline{\underline{let}}\ U_{(k)}(\theta), \qquad \frac{k-1}{n} < y \le \frac{k}{n}, \quad k = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{16}$$

과 같이 정의되었다고 하자. 여기서 $(\cdot)_{(k)}$는 괄호 안의 확률 변수의 k번째 순서 통계량을 나타낸다. $U_n(y, \theta)$로부터 자연스럽게 uniform quantile process $u_n(y, \theta)$,

$$u_n(y, \theta) \equiv u_n(S(y, \theta)) = \sqrt{n}(U_n(y, \theta) - y) \tag{17}$$

을 정의할 수 있다. 이 절에서는

$$\sup_{(y, \theta) \in \Theta} |u_n(y, \theta) - B_n'(y, \theta)| = O_p(n^{-\frac{1}{8}} \log n) \tag{18}$$

임을 보일 것이다. 여기서 $B_n'(y, \theta)$는

$$B_n'(y, \theta) = -B_n(y, \theta) \equiv -B_n(S(y, \theta))$$

로 $\mathfrak{J}$ 또는 Θ에서의 Brownian bridge이다. B_n'는 사실상 B_n과 같은 공분산 함수를 갖고 있음을 유의하라.

(18)을 증명하기 위하여 $E(X(t)) = 0$인 Gaussian process $\{X(t); t \in T\}$에 대한 몇 가지 중요한 정리를 소개하고자 한다. 이 정리들은 $X(t)$의 sample path의 연속성과 $\sup_{t \in T} X(t)$의 분포에 관한 것이다. 여기에서 모수의 집합(parameter set) T는 매우 일반적인 집합으로 T는 단지 metric space이고 공분산으로 정의된 canonical metric d,

$$d(t_1, t_2) = \{E(X(t_1) - X(t_2))^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

에 대해서 유계(totally bounded)라는 조건을 만족하면 된다.

정리 3. (Adler (1990, 정리 1.1)) T에서의 Gaussian process X가 almost surely 연속일 충분조건은

$$\int_0^\infty (\log N_d(\varepsilon))^{\frac{1}{2}} d\varepsilon < \infty$$

이다. 여기에서 $N_d(\varepsilon)$은 T를 포함할 수 있는 반지름인 ε인 closed d-ball의 집합의 최소의 원소개수를 말한다.

정리 4. (Adler (1990, 정리 4.6)) X가 T에서 a.s. 유계이고 τ를 (19)의 canonical metric d가 τ-uniformly continuous가 되는 T에서의 metric이라고 하자. $\phi_\tau(\eta)$를

$$\phi_\tau(\eta) = E \sup_{\tau(t_1, t_2) < \eta} (X(t_1) - X(t_2))$$

라고 하고 X의 τ-modulus of (uniform) continuity를

$$W_\tau(\eta) = \sup_{\tau(t_1, t_2) < \eta} |X(t_1) - X(t_2)|$$

라고 하자.

만일 $\lim_{\eta \to 0} \phi_\tau(\eta) = 0$ 이면, measure 0 인 집합을 제외한 모든 ω에 대하여

$$W_\tau(\eta) \le \phi_\tau(\eta), \qquad \eta \le \delta(\omega)$$

이 성립하는 a.s. 유한인 확률변수 $\delta(\omega)$가 존재한다. 다시 말해서 $\phi_\tau(\cdot)$는 metric τ에서 X의 uniform sample modulus가 된다.

정리 5. (Adler (1990, 정리 5.3)) 만일 $N_d(\varepsilon) \le K\varepsilon^{-\alpha}$이면, 모든 $\lambda > 0$에 대하여

$$C_\alpha^{-1} \lambda^\alpha (\log \lambda)^{-\alpha/2} (1 - \Phi(\lambda/\sigma_T)) \le \Pr\{\sup_{t \in T} X(t) > \lambda\} \le C_\alpha \lambda^\alpha (1 - \Phi(\lambda/\sigma_T))$$

을 만족하는 $0 < C_\alpha < \infty$ 가 존재한다. 여기에서

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} y^2) dy$$

이고

$$\sigma_T^2 = \sup_{t \in T} E\{X(t)\}^2$$

이다.

이제 $\mathfrak{I}$ 또는 Θ에서의 Brownian bridge의 modulus of continuity의 크기를 구해보자. 이를 위하여 정리 4를 이용하려면 $E\{\sup_{\tau((y_1, \theta_1), (y_1, \theta_2)) < \eta} (B(y_1, \theta_1) - B(y_2, \theta_2))\}$의 크기가 어느 정도인지 구해야 하는데 이를 위하여 정리 5가 유용하게 사용될 것이다. 아래의 보조정리 1은 이러한 목적을 위하여 필요하다.

보조정리 1. 임의의 $(y_1, \theta_1) \in \Theta = (0, 1) \times [0, 2\pi)$에 대하여

$$\Delta(\eta) \equiv \Delta((y_1, \theta_1), \eta) = \{(y_2, \theta_2) \in \Theta: y_1 < y_2 < y_1 + \eta,\ \theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + \eta\}$$

라고 하면 $\mathfrak{I}$ 또는 Θ에서의 Brownian bridge B에 대하여

$$\sup_{(y_2, \theta_2) \in \Delta((y_1, \theta_1), \eta)} E\{B(y_1, \theta_1) - B(y_2, \theta_2)\}^2 \le C\eta$$

인 C가 존재한다. 즉,

$$\sup_{(y_2, \theta_2) \in \Delta((y_1, \theta_1), \eta)} d((y_1, \theta_1), (y_2, \theta_2)) \le \sqrt{C\eta} \tag{20}$$

이다. 여기서 d는 (19)에서 정의된 canonical metric이다.

<증명>

$$E(B(y_1, \theta_1) - B(y_2, \theta_2))^2$$
$$= y_1(1 - y_1) + y_2(1 - y_2) - 2E(B(y_1, \theta_1)B(y_2, \theta_2))$$

이므로 $\Delta(\eta)$에서 B의 공분산함수의 적당한 하한을 구하여야 한다.

$$
\begin{aligned}
&E\{B(y_1, \theta_1)B(y_2, \theta_2)\} + y_1y_2 \\
&\quad = \Pr\{\sin\theta_1 \cdot Z_1 + \cos\theta_1 \cdot Z_2 \le \Phi^{-1}(y_1) \text{ and } \sin\theta_2 \cdot Z_1 + \cos\theta_2 \cdot Z_2 \le \Phi^{-1}(y_2)\} \\
&\quad = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{h}\int_{-\infty}^{k} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1x_2 + x_2^2)\right\}dx_2\,dx_1 \\
&\quad \underline{\underline{let}}\ \Psi(h, k\,;\rho)
\end{aligned}
$$

이다. 여기서 $h = \Phi^{-1}(y_2)$, $k = \Phi^{-1}(y_1)$이고 $\rho = \cos(\theta_1 - \theta_2)$이다. $L(h, k\,;\rho)$를

$$
L(h, k\,;\rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{h}^{\infty}\int_{k}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1x_2 + x_2^2)\right\}dx_2\,dx_1
$$

라고 하면

$$
\begin{aligned}
\Psi(h, k\,;\rho) &= 1 - L(h, -\infty\,;\rho) - L(-\infty, k\,;\rho) + L(h, k\,;\rho) \\
&= 1 - (1 - \Phi(h)) - (1 - \Phi(k)) + L(h, k\,;\rho)
\end{aligned}
$$

이고 $h > k > 0$을 가정하면

$$
L(h, k\,;\rho) = V\left(h, \frac{k-\rho h}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + V\left(k, \frac{h-\rho k}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + 1 - \frac{1}{2}(\Phi(h) + \Phi(k)) - \frac{\cos^{-1}\rho}{2\pi}
$$

이 성립한다. 여기서

$$
V(h, k) = \int_0^h \int_0^{kx_1/h} \frac{1}{2\pi} \exp\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\}\,dx_2dx_1,\quad h>0,\ k>0
$$

이다. (Johnson과 Kotz(1972, pp 93-97)과 Nicholson(1943)을 보라.)

고정된 h, k, $h > k > 0$에 대하여

$$
V\left(h, \frac{k-\rho h}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + V\left(k, \frac{h-\rho k}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \ge \frac{1}{2}(\Phi(k) - \Phi(h))
$$

임을 ρ에 대하여 미분함으로써 쉽게 보일 수 있다. 따라서 $h > k > 0$, 즉 $\frac{1}{2} < y_1 < y_2$ 일 때

$$
L(h, k\,;\rho) \ge 1 - \Phi(h) - \frac{\cos^{-1}\rho}{2\pi}
$$

이고 $|\theta_1 - \theta_2| < \eta$ 인 η가 충분히 작으면, $y_1 > 1/2$이므로

$$
\begin{aligned}
\Psi(h, k\,;\rho) &\ge \Phi(k) - \frac{\cos^{-1}\rho}{2\pi} \\
&= y_1 - \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{2\pi} > 0
\end{aligned}
$$

이다. 따라서

$$
\begin{aligned}
&E(B(y_1, \theta_1) - B(y_2, \theta_2))^2 \\
&\quad = y_1(1-y_1) + y_2(1-y_2) - 2\Psi(h, k\,;\rho) + 2y_1y_2 \\
&\quad \le y_1 + y_2 - 2y_1 + \frac{1}{\pi}(\theta_2 - \theta_1) - (y_1 - y_2)^2 \\
&\quad \le (y_2 - y_1) + \frac{1}{\pi}(\theta_2 - \theta_1)
\end{aligned}
$$

이고

$$\sup_{(y_2,\theta_2)\in\Delta((y_1,\theta_1),\eta)} E\{B(y_1,\theta_1)-B(y_2,\theta_2)\}^2 \le \left(1+\frac{1}{\pi}\right)\cdot\eta \overset{let}{=\!=} C\eta \tag{21}$$

가 성립한다. $0 < y_1 < y_2 < 1/2$이나 $0 < y_1 < 1/2 < y_2$인 경우에도 유사한 방법으로 (21)이 성립함을 보일 수 있으므로 이 경우의 증명은 생략하기로 한다.

□

아래의 정리 6은 정리 3과 정리 5에 주어진 N_d에 대한 entropy 조건이 $\mathfrak{I}$ 또는 Θ에서의 Brownian bridge B에 대해서도 성립한다는 것을 증명한다.

정리 6. $\mathfrak{I}$ 또는 Θ에서의 Brownian bridge B에 대해서

$$N_d(\varepsilon) \le K\varepsilon^{-4}$$

이고

$$\int_0^\infty (\log N_d(\varepsilon))^{1/2} d\varepsilon < \infty$$

이 성립한다.

<증명> (20)에 의하여 $\Theta=(0,1)\times[0,2\pi)$를 반지름 ε인 d-ball로 cover하는 한가지 방법은 중심을 $\left(i_1\frac{\varepsilon^2}{C},\ i_2\frac{\varepsilon^2}{C}\right)$, $i_1=0,1,\ldots,\left[\frac{C}{\varepsilon^2}\right]$, $i_2=0,1,\ldots,\left[2\pi\frac{C}{\varepsilon^2}\right]$으로 하는 반지름이 $\frac{\varepsilon^2}{C}$인 $\left(2+\frac{C}{\varepsilon^2}\right)\left(2+2\pi\frac{C}{\varepsilon^2}\right)$개의 d-ball을 고려하는 것이다. 그러면

$$N_d(\varepsilon) \le \left(2+\frac{C}{\varepsilon^2}\right)\left(2+2\pi\frac{C}{\varepsilon^2}\right) \le K\varepsilon^{-4}$$

이 되고

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (\log N_d(\varepsilon))^{\frac{1}{2}} d\varepsilon &= \int_0^{diam(\Theta)} (\log K\varepsilon^{-4})^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \\ &\le \int_0^{diam(\Theta)} (\log K\varepsilon^{-4}) d\varepsilon < \infty\end{aligned}$$

이다. 여기에서

$$diam(\Theta) = \sup_{(y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2)\in\Theta} d((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2)) \le \sqrt{3}$$

이고 일반성을 잃지 않고 $0 < \varepsilon < \sqrt{3}$ 에서 $K\varepsilon^{-4} > e$라고 가정하였다.

□

정리 7. $\Theta=(0,1)\times[0,2\pi)$에서의 metric τ를

$$\tau((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2)) = \sup(|y_1-y_2|,|\theta_1-\theta_2|)$$

라고 정의하면 measure 0인 집합을 제외한 모든 ω에 대하여

$$\sup_{\tau((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2))<\eta} |B(y_1,\theta_1)-B(y_2,\theta_2)| \le C\eta,\quad \eta\le\delta(\omega)$$

을 만족하는 a.s. 유한인 확률변수 $\delta=\delta(\omega)$가 존재한다.

<증명> 정리 5와 정리 6에 의해서 모든 $\lambda > 0$에 대하여

$$\Pr\left(\sup_{\tau((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2))<\eta} (B(y_1,\theta_1) - B(y_2,\theta_2)) > \lambda \right) \le C\lambda^4(1 - \Phi(\lambda/\sigma_\eta))$$

를 만족하는 상수 C가 존재한다. 여기에서 σ_η^2은

$$\sigma_\eta^2 = \sup_{\tau((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2))<\eta} E(B(y_1,\theta_1) - B(y_2,\theta_2))^2$$

이다. 따라서 보조정리 1을 이용하면

$$\begin{aligned}
& E \sup_{\tau((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2))<\eta} (B(y_1,\theta_1) - B(y_2,\theta_2)) \\
& \le \int_0^\infty \Pr\left(\sup_{\tau((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2))<\eta} (B(y_1,\theta_1) - B(y_2,\theta_2)) > \lambda \right) d\lambda \\
& \le C\int_0^\infty \lambda^4(1 - \Phi(\lambda/\sigma_\eta))\, d\lambda \\
& \le C\int_0^\infty \lambda^4 \frac{\phi(\lambda/\sigma_\eta)}{\lambda/\sigma_\eta}\, d\lambda \\
& = C\sigma_\eta^5 \int_0^\infty \lambda^3 \phi(\lambda)\, d\lambda \\
& = C\left(\sup_{\tau((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2))<\eta} E(B(y_1,\theta_1) - B(y_2,\theta_2))^2 \right)^{\frac{5}{2}} \\
& \le C\eta, \qquad 0<\eta<1
\end{aligned}$$

이다. 여기서 상수 C는 모든 같은 값을 가질 필요는 없다. 정리 3과 정리 6에 의하여 Θ에서의 Brownian bridge B는 a.s. 연속이고 Θ가 compact이므로 Θ에서 a.s. 유계이다. (19)의 canonical metric d는 당연히 τ-uniformly continuous이고

$$\lim_{\eta\to 0} E \sup_{\tau((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2))<\eta} (B(y_1,\theta_1) - B(y_2,\theta_2)) = 0$$

이 성립하므로 정리 4의 모든 조건은 만족되고

$$\begin{aligned}
& \sup_{\tau((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2))<\eta} |B(y_1,\theta_1) - B(y_2,\theta_2)| \\
& \le E \sup_{\tau((y_1,\theta_1),(y_2,\theta_2))<\eta} (B(y_1,\theta_1) - B(y_2,\theta_2)) \\
& \le C\eta
\end{aligned}$$

가 성립한다.

□

정리 8. (17)에 정의된 quantile process u_n에 대하여,

$$\sup_{(y,\theta)\in\Theta} |u_n(y,\theta) - B_n'(y,\theta)| = O_p(n^{-\frac{1}{8}} \log n) \tag{22}$$

을 만족하는 $\mathfrak{I}$ 또는 Θ에서의 Brownian bridge B_n'가 존재한다. 여기에서 B_n'는 (15)의

Brownian bridge B_n에 대하여 $B_n' = -B_n$ 이 성립한다.

<증명> (7)의 $P_n(\cdot)$의 정의와 (16)의 quantile process $U_n(\cdot)$ 의 정의로부터

$$|P_n(U_n(y, \theta), \theta) - y| \le \frac{1}{n} \tag{23}$$

이고

$$\begin{aligned} u_n(y, \theta) &= \sqrt{n}\,(U_n(y, \theta) - y) \\ &= \sqrt{n}\,(U_n(y, \theta) - P_n(U_n(y, \theta), \theta) + P_n((U_n(y, \theta), \theta) - y) \\ &= -\sqrt{n}\,(P_n(U_n(y, \theta), \theta) - U_n(y, \theta)) + \sqrt{n}\,(P_n(U_n(y, \theta), \theta) - y) \\ &= -\alpha_n(U_n(y, \theta), \theta) + O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \end{aligned} \tag{24}$$

이다. 따라서 정리 2에 의해서

$$\begin{aligned} &\sup_{(y, \theta)\in\Theta} |u_n(y, \theta) - B_n'(y, \theta)| \\ \le &\sup_{(y, \theta)\in\Theta} |\alpha_n(U_n(y, \theta), \theta) - \alpha_n(y, \theta)| \\ &\quad + \sup_{(y, \theta)\in\Theta} |\alpha_n(y, \theta) - B_n(y, \theta)| + O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \\ \le &\sup_{(y, \theta)\in\Theta} |B_n(U_n(y, \theta), \theta) - B_n(y, \theta)| + O(n^{-\frac{1}{8}} \log n) \quad \text{a.s.} \end{aligned} \tag{25}$$

이 성립하고 정리 7을 이용하면

$$\begin{aligned} &\sup_{(y, \theta)\in\Theta} |B_n(U_n(y, \theta), \theta) - B_n(y, \theta)| \\ &\le C \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{(y, \theta)\in\Theta} |\sqrt{n}(U_n(y, \theta) - y)| \\ &= C \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{(y, \theta)\in\Theta} |u_n(y, \theta)| \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} O_p(1) \end{aligned} \tag{26}$$

이고 (25)와 (26)로부터 결과가 성립한다.

□

Quantile process $Q_n(y, \theta)$를

$$Q_n(y, \theta) = (\sin\theta \cdot \Phi^{-1}(U_1) + \cos\theta \cdot \Phi^{-1}(U_2))_{(k)} \stackrel{let}{=} X_{(k)}(\theta), \tag{27}$$

$$\frac{k-1}{n+1} < y \le \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, \cdots, n,$$

과 같이 정의하고 normed quantile process를

$$\rho_n(y, \theta) = \phi(\Phi^{-1}(y))\sqrt{n}(Q_n(y, \theta) - \Phi^{-1}(y)) \tag{28}$$

로 정의하자. $\rho_n(\cdot)$과 $u_n(\cdot)$이 서로 근사하다는 것을 이용하여 $\rho_n(\cdot)$ 도 역시 Brownian bridge B_n으로 근사시킬 수 있다는 것을 보일 수 있다.

정리 9. $0<\delta<1/4$인 δ에 대하여

$$\begin{aligned}\sup_{n^{-\delta}\le y\le 1-n^{-\delta},\,\theta} |\rho_n(y,\theta)-u_n(y,\theta)| &= O_p(n^{-(1/2-2\delta)})\\ &= o_p(1)\end{aligned}$$

이 성립한다.

<증명> 이 정리의 증명은 Csörgő와 Révész (1981) 정리 4.5.6의 증명과 거의 유사하므로 생략하기로 하자.

정리 10. (28)에서 정의한 normed quantile process $\rho_n(\cdot)$에 대하여

$$\sup_{n^{-\delta}\le y\le 1-n^{-\delta},\,\theta} |\rho_n(y,\theta)-B_n'(y,\theta)| = O_p\left(n^{-\frac{1}{8}}\log n\right)$$

이 성립하는 $\mathfrak{I}$ 또는 Θ에서의 Brownian bridge B_n'가 존재한다. 여기서 δ는 $0<\delta\le 3/16$이다.

<증명> 정리 8과 정리 9로부터 자명하다.

2.3 P_n^0-통계량의 극한분포

P_n^0-통계량의 극한분포를 고려하기 전에 우선 P_n^0-통계량의 근사 통계량 T_n^0,

$$T_n^0 = \sup_{c_1,c_2,\ni,\,c_1^2+c_2^2+2\rho c_1c_2=1} \sum_{i=I_n}^{n-I_n}\left((c_1X_1+c_2X_2)_{(i)}-\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)^2 \tag{29}$$

를 고려하자. T_n^0-통계량에 대하여 다음과 같은 정리가 성립한다.

정리 11. 단순귀무가설 'H: $X_1=(X_{11},X_{21}),\ldots,X_n=(X_{1n},X_{2n})$이 평균 $\mu_1=\mu_2=0$, 분산 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$이고 상관계수 $E(X_{1i}X_{2i})=\rho$를 가진 이변량 정규분포를 따른다.' 하에서

$$\left|\left(T_n^0-a_n^t\right)-\sup_{\theta\in[0,2\pi)}\int_{\frac{I_n}{n}}^{1-\frac{I_n}{n}}\frac{B_n^2(y,\theta)-y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\,dy\right| \xrightarrow{p} 0$$

이 성립한다. 여기서 I_n은 $I_n/n=1/n^\delta$, $0<\delta<1/8$, 이고

$$a_n^t=\frac{1}{n}\sum_{k=I_n}^{n-I_n}\left(\frac{k}{n+1}\right)\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\Big/\phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)$$

이고 B_n은 Θ에서의 Brownian bridge이다.

<증명> (5)와 유사하게

$$T_n^0=\sup_{\theta\in[0,2\pi)}\sum_{i=I_n}^{n-I_n}\left((\sin\theta\cdot Z_1+\cos\theta\cdot Z_2)_{(i)}-\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)^2$$

이다. 여기서 Z_1, Z_2는 $N(0,1)$에서의 i.i.d. 확률변수이다. (28)의 normed quantile process $\rho_n(\cdot)$의 정의로부터 $T_n^{\,0}$는

$$T_n^{\,0}-a_n^t=\sup_{\theta\in[0,2\pi)}\frac{1}{n}\sum_{i=I_n}^{n-I_n}\frac{\rho_n^2\left(\frac{i}{n+1},\theta\right)-\frac{i}{n+1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)}{\phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)}$$

이고 정리 10과 $y\to0$일 때 $\phi(\Phi^{-1}(y))\approx y\sqrt{|\log y|}$ 라는 것을 이용하면

$$\begin{aligned}
&\sup_{\theta\in[0,2\pi)}\sum_{i=I_n}^{n-I_n}\frac{\left|\left(\rho_n\left(\frac{i}{n+1},\theta\right)\right)^2-B_n^2\left(\frac{i}{n+1},\theta\right)\right|}{n\phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)}\\
=&\sup_{\theta\in[0,2\pi)}\sum_{i=I_n}^{n-I_n}\frac{\left|\rho_n\left(\frac{i}{n+1},\theta\right)-B_n\left(\frac{i}{n+1},\theta\right)\right|\cdot\left|\rho_n\left(\frac{i}{n+1},\theta\right)+B_n\left(\frac{i}{n+1},\theta\right)\right|}{n\phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)}\\
\le&\sup_{\frac{1}{n^\delta}\le y\le1-\frac{1}{n^\delta},\,\theta}|\rho_n(y,\theta)-B_n(y,\theta)|\\
&\cdot\left(\sup_{\frac{1}{n^\delta}\le y\le1-\frac{1}{n^\delta},\,\theta}|\rho_n(y,\theta)-B_n(y,\theta)|+\sup_{(y,\theta)\in\Theta}2|B_n(y,\theta)|\right)\\
&\cdot\sum_{i=I_n}^{n-I_n}\frac{1}{n\phi^2\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)}\\
=&\ O_p(n^{-1/8}\log n)\left(O_p(n^{-1/8}\log n)+O_p(1)\right)\int_{\frac{1}{n^\delta}}^{1-\frac{1}{n^\delta}}\frac{1}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\,dy\\
=&\ O_p(n^{-1/8}\log n)\,O(n^\delta\log\log n)\\
=&\ O_p(n^{-(1/8-\delta)}(\log n)(\log\log n))\\
=&\ o_p(1),\qquad 0<\delta<\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

이므로 정리는 성립한다.

□

정리11로부터 자명하게 아래의 정리 12를 얻을 수 있다.

정리 12. 정리 11과 같은 조건하에서 만일 $T_n^{\,0}$가 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여

$$T_n^{\,0}=\sup_{c_1^2+c_2^2+2\rho c_1c_2=1}\sum_{i=n\varepsilon}^{n(1-\varepsilon)}\left\{(c_1X_1+c_2X_2)_{(i)}-\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right\}^2$$

와 같이 절단된(truncated) 통계량이라면

$$T_n^{\,0}-a_n^t\xrightarrow{d}\sup_{\theta\in[0,2\pi)}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\frac{B^2(y,\theta)-y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\,dy \tag{30}$$

이 성립한다.

□

P_n^0-통계량의 극한분포에 대해서 (30)과 유사한 결과를 얻기 위해서

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi)} \int_0^1 \frac{B^2(y,\theta) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\, dy$$

의 존재성, 즉,

$$\Pr\left(\left| \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \int_0^1 \frac{B^2(y,\theta) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\, dy \right| < \infty\right) = 1 \tag{31}$$

임을 보여야 할 것이다. 그러면 정리 11 또는 정리 12로부터

$$T_n^0 - a_n^t \xrightarrow{d} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \int_0^1 \frac{B^2(y,\theta) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\, dy \tag{32}$$

가 성립한다. (31)을 증명하기 위하여

$$\sup_{|\theta_1-\theta_2|<\eta} E\left(\int_0^{1/2} \frac{B^2(y,\theta_1) - B^2(y,\theta_2)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\, dy\right)^2 < C\eta \tag{33}$$

임을 보이면 충분하다. (Billingsley(1968)을 보라.) 우선

$$\sup_{|\theta_1-\theta_2|<\eta} E\left(\int_{\varepsilon^\delta}^{1/2} \frac{B^2(y,\theta_1) - B^2(y,\theta_2)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\, dy\right)^2 < C\eta\,, \quad 0 < \delta < 1$$

임을 보이자. Cauchy-Schwarz 부등식을 이용하면

$$\begin{aligned} &E(B^2(y,\theta_1) - B^2(y,\theta_2))^2 \\ &\le \{E(B(y,\theta_1) - B(y,\theta_2))^4\}^{1/2}\{E(B(y,\theta_1) + B(y,\theta_2))^4\}^{1/2} \end{aligned} \tag{34}$$

이다. $B(y,\theta_1) - B(y,\theta_2)$이 평균이 0인 정규 분포를 따르고 보조정리 1로부터

$$\sup_{|\theta_1-\theta_2|<\eta} E(B(y,\theta_1) - B(y,\theta_2))^2 < C\eta$$

이 성립하므로

$$\sup_{|\theta_1-\theta_2|<\eta} E(B(y,\theta_1) - B(y,\theta_2))^4 < C\eta^2 \tag{35}$$

이 된다. 또한 Hölder의 부등식에 의해서

$$\begin{aligned} E(B(y,\theta_1) + B(y,\theta_2))^4 &= 3\{E(B(y,\theta_1) + B(y,\theta_2))^2\}^2 \\ &\le 3\{(E\,B^2(y,\theta_1))^{1/2} + (E\,B^2(y,\theta_2))^{1/2}\}^4 \\ &\le Cy^2(1-y)^2 \end{aligned} \tag{36}$$

이 성립하므로 (34),(35),(36)에 의해서

$$\sup_{|\theta_1-\theta_2|<\eta} E(B^2(y,\theta_1) - B^2(y,\theta_2))^2 < C\eta\, y(1-y) \tag{37}$$

이다. 만일 (33)에서 적분과 기대치(Expectation)의 순서를 교환할 수 있다고 가정하면

$$\sup_{|\theta_1-\theta_2|<\eta} E\left(\int_{\varepsilon^\delta}^{1/2} \frac{B^2(y,\theta_1) - B^2(y,\theta_2)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))}\, dy\right)^2$$

$$= \sup_{|\theta_1 - \theta_2| < \eta} \int_{\varepsilon^\delta}^{1/2} \int_{\varepsilon^\delta}^{1/2} \frac{E\{(B^2(y_1, \theta_1) - B^2(y_1, \theta_2))(B^2(y_2, \theta_1) - B^2(y_2, \theta_2))\}}{\phi^2(\Phi^{-1}(y_1))\, \phi^2(\Phi^{-1}(y_2))} dy_1 dy_2$$

$$\le C\eta\left(\int_{\varepsilon^\delta}^{1/2} \frac{\sqrt{y(1-y)}}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy \right)^2$$

$$= C\,\eta\, O\left(\frac{1}{\varepsilon^\delta} (\log|\log \varepsilon|)^2 \right) \tag{38}$$

이 되고 고정된 ε에 대하여 $\eta \to 0$일 때 (38)은 0으로 수렴한다.

다음으로 $\varepsilon \to 0$일 때 $E\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon^\delta} \frac{B^2(y, \theta) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy \right)^2 \to 0$ 임을 보이자.

$$E\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon^\delta} \frac{B^2(y, \theta) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy \right)^2$$

$$= \int_\varepsilon^{\varepsilon^\delta} \int_\varepsilon^{\varepsilon^\delta} \frac{E(B^2(y_1, \theta) - y_1(1-y_1))(B^2(y_2, \theta) - y_2(1-y_2))}{\phi^2(\Phi^{-1}(y_1))\, \phi^2(\Phi^{-1}(y_2))} dy_1 dy_2$$

$$= \int_\varepsilon^{\varepsilon^\delta} \int_\varepsilon^{y_2} \frac{4y_1^2(1-y_2)^2}{\phi^2(\Phi^{-1}(y_1))\, \phi^2(\Phi^{-1}(y_2))} dy_1 dy_2$$

$$\approx 4 \int_\varepsilon^{\varepsilon^\delta} \int_\varepsilon^{y_2} \frac{(1-y_2)^2}{|\log y_1|\, y_2^2\, |\log y_2|} dy_1 dy_2$$

$$\le 4 \int_\varepsilon^{\varepsilon^\delta} \frac{1}{y_2 |\log y_2|^2} dy_2$$

$$= \log \delta \cdot \frac{1}{\delta |\log \varepsilon|} \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \text{ 일 때}, \tag{39}$$

이므로 (38), (39)에 의해서 (33)은 성립한다. P_n^0-통계량의 적률에 대해서도 위와 유사한 계산을 함으로써 P_n^0-통계량의 꼬리 부분(tail parts)도 $n \to \infty$일 때 0으로 수렴함을 보일 수 있으므로 정리 11의 귀무가설하에서

$$P_n^0 - a_n^0 \to \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} \int_0^1 \frac{B^2(y, \theta) - y(1-y)}{\phi^2(\Phi^{-1}(y))} dy$$

이 성립한다.

참고문헌

[1] Adler, R. J. (1990). *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes,* Lecture notes 12, Institute of mathematical statistics.

[2] Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures,* John Wiley & Sons, New York.

[3] Csörgõ, M. and Révész, P. (1981). *Strong approximations in probability and statistics,* Academic Press, New York.

[4] Csörgõ, M. (1983). *Quantile processes with statistical applications*, CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics.

[5] De Wet, T. and Venter, J. H. (1972). "Asymptotic distributions of certain test criteria of normality," *South African Statististical Journal*, 6, 135-149.

[6] Johnson, N. L. and Kotz, S. (1972). *Continuous multivariate distributions*, John Wiley, New York.

[7] Kim, N. (1994). "Goodness of Fit Tests for Bivariate Distributions," *Ph. D. dissertation*, University of California, Berkeley, 1994.

[8] Massart, P. (1989). "Strong approximation for multivariate empirical and related processes, via KMT constructions," *Annals of Probability*, 17, 266-291.

[9] Nicholson, C. (1943). "The probability integral for two variables," *Biometrika*, 33, 59-72.

[10] Shapiro, S. S. and Francia, R. S. (1972). "An approximate analysis of variance test for normality," *Journal of the Amemican Statistical Association*, 67, 215-216.

[11] Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. (1965). "An analysis of variance test for normality (complete samples)," *Biometrika*, 52, 591-611.