한국통계학회논문집 제4권 3호
1997년 12월 pp. 725 - 734

확률화응답에 대한 대수선형모형[1)]

최 경 호[2)]

요 약

많은 사회과학 조사에서 분할표 형태로 얻어진 범주형 자료에는 오분류(misclassification)로 인한 오차가 내재되는 경우가 종종 있다. 질적속성 추정을 위한 확률화응답은 이러한 오분류 문제의 한 특수한 경우로 여겨지기도 한다. 그래서 확률화응답을 통한 범주형자료는 혼합된 분할표(mixed-up contingency table)로 여길 수 있는 바, 본 논문에서는 이에 대해 대수선형모형(log-linear model)을 설정하고 Chen과 Fienberg(1976)의 Iterative scaling procedure(ISP)에 의하여 얻어진 최우추정량의 극한을 이용하였다. 이 결과 Warner(1965) 형태의 대칭기법에 대해서는 Singh(1976)에 의하여 제안된 최우추정량과 같아지게 됨을 보임으로써 Warner에 의해서 제시된 추정량이 최우추정량으로 적절하지 않음을 확인해 보고, 무관질문기법에 대해서는 Greenberg, et al.(1969)에 의해서 제안된 추정량이 추정의 관점에서 최우추정량으로 적절하지 않음을 알아 보았다.

1. 서 론

의학이나 사회과학 조사에서, 질문의 민감성 때문에 응답자는 거짓응답을 하거나 또는 응답회피를 하는 경우가 종종 있다. 그래서 이러한 문제로 인하여 발생되는 비표본오차(non-sampling error)를 줄여서 추정의 신뢰성을 높이기 위한 방안으로 Warner(1965)는 확률화응답기법을 제안하였다.

그러나 확률화응답은 확률장치(randomizing device)를 사용하여 얻게 되는데 이는 오분류를 포함한 범주형자료로 볼 수 있다. 이지모집단(dichotomous population)내의 민감속성을 A라 하고 이의 모비율을 π, 그리고 확률장치에서 민감질문이 선택될 확률이 p라면 Warner기법에 의해서 얻어진 확률화응답은 그림 1과 같은 오분류를 포함한 분할표 형태로 나타낼 수 있다.

이렇듯 분할표 형태로 고려되는 확률화응답은 확률장치내에 무관질문이 포함되는지의 여부에 따라 완전혼합 분할표(totally mixed table)와 부분혼합 분할표(partially mixed up table)로 구분될 수 있다. 많은 확률화응답기법중 Warner(1965), Abul-ela, et al.(1967), Liu와 Chow(1976)등은 완전혼합의 형태로 응답이 얻어지는 경우이고, Greenberg, et al.(1969), Folsom, et al.(1973), Hochberg(1975)등은 부분혼합의 형태로 응답이 얻어지는 경우이다.

---

1) 이 연구는 1997년도 전주대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.
2) (560-759) 전라북도 전주시 효자동 1300번지 전주대학교 응용통계학과 조교수

		실 제 상 태		
		$\bar{A}$: 0	A : 1	
확률화응답	아니오 : 0	$p(1-\pi)$	$(1-p)\pi$	$1-\lambda$
	예 : 1	$(1-p)(1-\pi)$	$p\pi$	λ
		$1-\pi$	π	

[그림 1] 확률화응답에 대한 오분류행렬

통계적 추정의 관점에서 Warner에 의해서 제시된 추정량은 최우추정량이 되지 못한다는 사실은 이미 Flinger, et al.(1977), Devore(1977) 그리고 Raghavarao(1978) 등에 의하여 규명된 바 있다. 그러나 본 논문에서는 확률화응답을 분할표 형태로 고려하여 이에 대해 대수선형모형을 적합하고, Chen과 Fienberg(1976)가 제안한 ISP에 의하여 구한 최우추정량의 극한이 Singh(1976)이 제안한 추정량과 같게 되어 결국 Warner가 제안한 추정량이 최우추정량으로 적절하지 않음을 확인하였다. 또한 무관질문기법에 대해서도 위와 동일한 방법으로Greenberg, et al.(1969)들이 제안한 추정량이 최우추정량으로 적절하지 않음을 알아보고자 한다.

2. 확률화응답기법

2.1 Warner기법

이 기법은 이지모집단내의 민감속성을 갖는 집단의 비율(π)을 추정함에 있어 다음과 같이 구성된 두 질문중 하나에 확률장치를 통하여 "예" 또는 "아니오"로 응답을 하게 함으로써 민감한 문제에 대하여 응답자의 신분을 보호해 주도록 고안된 간접조사기법이다.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{질문 I : 당신은 민감속성을 갖는가?} & (\text{w.p. } p) \\ \text{질문 II : 당신은 민감속성을 갖지 않는가?} & (\text{w.p. } 1-p)\end{array}\right\} \quad (2.1)$$

이제 모집단으로부터 단순임의복원으로 추출된 n명의 응답자에 대해 조사를 실시한다면 임의의 응답자가 "예"라고 응답할 확률은 그림 1로부터,

$$\lambda = p\pi + (1-p)(1-\pi) \quad (2.2)$$

이며, π의 최우추정량은

$$\hat{\pi}_w = \frac{\hat{\lambda} + (p-1)}{2p-1}, \quad p \neq 1/2 \quad (2.3)$$

이 된다. 그리고, $\hat{\pi}_w$의 분산은 다음과 같다.

$$\mathrm{Var}(\hat{\pi}_w) = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{p(1-p)}{n(2p-1)^2} \quad . \quad (2.4)$$

한편 Singh(1976)은 식 (2.3)의 $\hat{\pi}_w$이 [0,1]을 벗어나는 경우가 있어 최우추정량이 되지 못하므로 일반적인 손실없이 $p>1/2$에 대하여 다음과 같이 수정된 추정량이 최우추정량임을 제시하였다.

$$\hat{\pi}_s=\begin{cases} 0, & c_1/n < (1-p) \\ \hat{\pi}_w, & (1-p) \le c_1/n \le p \ . \\ 1, & p < c_1/n \end{cases} \tag{2.5}$$

단, c_1은 n명의 응답자중 확률장치를 사용하여 "예"라고 응답한 응답자의 총 수이다.

2.2 무관질문기법

무관질문기법은 모집단으로부터 단순임의복원추출된 n명의 표본을 이용하여 이지모집단내의 민감집단의 비율(π)을 추정함에 있어 확률장치를 사용하여 다음의 두 질문중 하나에 "예" 또는 "아니오"로 응답하게 하는 확률화응답기법이다.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{질문 I : 당신은 민감속성(A)을 갖는가?} & (\text{w.p. } p) \\ \text{질문 II : 당신은 무관속성(Y)을 갖고 있습니까?} & (\text{w.p. } 1-p) \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

식 (2.6)의 질문II에서 무관속성이란 조사하고자 하는 민감속성과는 관계없는 속성으로 이의 모집단 비율 π_y는 기지(known)인 경우로 가정한다.

그러면 임의의 응답자가 "예"라고 응답할 확률은

$$\lambda=p\pi+(1-p)\pi_y \tag{2.7}$$

이며, 따라서 π의 최우추정량은

$$\hat{\pi}_u=\frac{\hat{\lambda}+(p-1)\pi_y}{p} \tag{2.8}$$

이 된다. 한편 $\hat{\pi}_u$의 분산은 다음과 같다.

$$\mathrm{Var}(\hat{\pi}_u)=\frac{\lambda(1-\lambda)}{(np)^2} \ . \tag{2.9}$$

Warner기법에서 지적한 것과 같은 이유로 식 (2.8)의 $\hat{\pi}_u$은 π의 최우추정량이 되지 못하므로 최우추정량으로 다음을 고려하자.

$$\hat{\pi}_{us}=\begin{cases} 0, & c_1/n < (1-p)\pi_y \\ \hat{\pi}_u, & (1-p)\pi_y \le c_1/n \le p+(1-p)\pi_y \ . \\ 1, & p+(1-p)\pi_y < c_1/n \end{cases} \tag{2.10}$$

단, c_1은 n명의 응답자중 확률장치를 통하여 "예"라고 응답한 응답자의 총수이다.

3. 확률화응답에 대한 대수선형모형

3.1 Warner기법에 대한 대수선형모형

Warner기법에 의한 응답결과는 그림 1과 같이 2×2분할표로 나타낼 수 있다. 이제 이를 응용하여 다음의 2×2분할표를 고려해보자.

		실 제 속 성: A	실 제 속 성: $\bar{A}$	
확률장치를 통해 선택된 질문	I	π_{11}	π_{12}	π_{1+} $(=p)$
	II	π_{21}	π_{22}	π_{2+} $(=1-p)$
		π_{+1} $(=\pi)$	π_{+2} $(=1-\pi)$	

[그림 2] Warnar기법의 응답모형

A는 민감속성을 나타내며 π_{ij}는 실제 속성이 j인 응답자가 확률장치를 통하여 질문 i에 응답할 확률이다. 이제, n명의 응답자중 "예"라고 응답한 응답자의 수를 c_1이라 하면 이는 칸(cell) (1,1)과 (2,2)에 나타난 도수의 합이며 "아니오"라고 응답한 수를 $c_2 = n - c_1$라 하면 이는 칸 (1,2)와 (2,1)에 나타난 도수의 합이 된다.

한편 임의의 응답자가 민감속성을 갖는지 여부와 확률장치를 통하여 선택되는 질문은 독립이므로 그림 2의 2차원 분할표에서 두 요인(실제속성과 선택되어진 질문)은 독립이다. 따라서 다음의 독립모형(independence model)이 적용될 수 있다.

$$\log \pi_{ij} = u + u_{1(i)} + u_{2(j)} \ . \tag{3.1}$$

이로부터, Haberman(1974)의 ML방정식을 이용하면 π_{+1}의 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{\pi}_{+1} = \sum_i \hat{\hat{\pi}}_{i1} \ , \tag{3.2}$$

$$\hat{\pi}_{+2} = \sum_i \hat{\hat{\pi}}_{i2} \ . \tag{3.3}$$

여기서,

$$\left.\begin{aligned} n\hat{\hat{\pi}}_{11} &= c_1 \ \hat{\pi}_{11}/(\hat{\pi}_{11} + \hat{\pi}_{22}) \\ n\hat{\hat{\pi}}_{21} &= c_2 \ \hat{\pi}_{21}/(\hat{\pi}_{12} + \hat{\pi}_{21}) \\ n\hat{\hat{\pi}}_{12} &= c_2 \ \hat{\pi}_{12}/(\hat{\pi}_{12} + \hat{\pi}_{21}) \\ n\hat{\hat{\pi}}_{22} &= c_1 \ \hat{\pi}_{22}/(\hat{\pi}_{11} + \hat{\pi}_{22}) \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

한편, $\pi_{ij} = \pi_{i+} \cdot \pi_{+j}$ 이므로 결국,

$$n\hat{\pi}_{+1}=c_1\frac{p\hat{\pi}_{+1}}{p\hat{\pi}_{+1}+(1-p)\hat{\pi}_{+2}}+c_2\frac{(1-p)\hat{\pi}_{+1}}{(1-p)\hat{\pi}_{+1}+p\hat{\pi}_{+2}}, \tag{3.5}$$

$$n\hat{\pi}_{+2}=c_1\frac{(1-p)\hat{\pi}_{+2}}{p\hat{\pi}_{+1}+(1-p)\hat{\pi}_{+2}}+c_2\frac{p\hat{\pi}_{+2}}{(1-p)\hat{\pi}_{+1}+p\hat{\pi}_{+2}} \tag{3.6}$$

을 얻게 된다. 식 (3.5)와 식 (3.6)의 우측항을 $E_j(P, \underline{\pi}, \underline{c})$라 놓고 Chen과 Fienberg(1976)의 ISP를 이용하면 π_{+1}을 추정하기 위한 과정은 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} &\pi_{+1}^{(0)}=\pi_{+2}^{(0)}=1/2 \\ &\pi_{+1}^{(v+1)}=E_1(p, \underline{\pi}^{(v)}, \underline{c})/n \\ &\pi_{+2}^{(v+1)}=1-\pi_{+1}^{(v+1)} \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

위의 ISP를 이용한 추정의 장점은 모든 반복 v에 대하여 $0<\pi_{+1}^{(v)}<1$ 을 얻게 된다는 점이다. 물론 드물게 $\pi_{+1}^{(v)}$이 0이나 1에 아주 가까운 값이 될 수도 있다. 그러나 일단 $\hat{\pi}_{+1}$이 0과 1사이의 값을 가지면 이는 Warner에 의하여 제시된 추정량과 같게 된다.

3.2 무관질문기법에 대한 대수선형모형

무관질문기법을 2×2분할표로 나타내 보면 다음과 같다.

민감속성

		A	$\overline{A}$	
무관속성	Y	π_{11}	π_{12}	$\pi_{1+}\ (=\pi_y)$
	$\overline{Y}$	π_{21}	π_{22}	$\pi_{2+}\ (=1-\pi_y)$
		$\pi_{+1}\ (=\pi)$	$\pi_{+2}\ (=1-\pi)$	

[그림 3] 무관질문기법의 확률모형

여기서 π_{ij}는 임의의 응답자가 민감속성 A와 무관속성 Y를 가질 확률이며 식 2.7과 그림 3으로부터 식 (2.6)의 질문에 대해 n명의 응답자 중에서 "예"라고 응답하는 응답자의 수를 c_1이라 하면 이의 기대값은 $n(\pi_{11}+p\pi_{21}+(1-p)\pi_{12})$이며, "아니오"라고 응답하는 응답자의 수를 c_2라 하면 이의 기대값은 $n(\pi_{22}+(1-p)\pi_{21}+p\pi_{12})$이다. 한편 그림 3에서 보는 바와 같이 칸 (1,2)와 (2,1)은 c_1과 c_2를 셈하는데 모두 관여된다. 무관질문기법에 대해서도 그림 3으로부터 독립모형이 가정된다.

$$\log \pi_{ij} = u + u_{1(i)} + u_{2(j)} \ . \tag{3.8}$$

따라서, 모집단내의 민감집단의 비율 π의 추정을 위한 다음의 ML방정식을 얻게 된다.

$$n\,\hat{\pi}_{+1} = c_1 \frac{\hat{\pi}_{11} + p\,\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{11} + (1-p)\,\hat{\pi}_{12} + p\,\hat{\pi}_{21}} + c_2 \frac{(1-p)\,\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{22} + (1-p)\,\hat{\pi}_{21} + p\,\hat{\pi}_{12}} \ , \tag{3.9}$$

$$n\,\hat{\pi}_{+2} = c_1 \frac{(1-p)\,\hat{\pi}_{12}}{\hat{\pi}_{11} + (1-p)\,\hat{\pi}_{12} + p\,\hat{\pi}_{21}} + c_2 \frac{\hat{\pi}_{22} + p\,\hat{\pi}_{12}}{\hat{\pi}_{22} + (1-p)\,\hat{\pi}_{21} + p\,\hat{\pi}_{12}} \ . \tag{3.10}$$

한편, $\pi_{ij} = \pi_{i+} + \pi_{+j}$ 이고 π_{i+}은 기지이므로 $\hat{\pi}_{1+} = \pi_y$로 놓자. 그러면,

$$n\,\hat{\pi}_{+1} = c_1 \frac{\pi_y\,\hat{\pi}_{+1} + p(1-\pi_y)\,\hat{\pi}_{+1}}{p\,\hat{\pi}_{+1} + (1-p)\pi_y} + c_2 \frac{(1-p)(1-\pi_y)\,\hat{\pi}_{+1}}{(1-p)(1-\pi_y) + p\,\hat{\pi}_{+2}} \ , \tag{3.11}$$

$$n\,\hat{\pi}_{+2} = c_1 \frac{(1-p)\pi_y\,\hat{\pi}_{+2}}{p\,\hat{\pi}_{+1} + (1-p)\pi_y} + c_2 \frac{(1-\pi_y)\,\hat{\pi}_{+2} + p\pi_y\,\hat{\pi}_{+2}}{(1-p)(1-\pi_y) + p\,\hat{\pi}_{+2}} \tag{3.12}$$

이다. 이에 대해서도 식 (3.7)과 같은 방법으로 ISP에 의하여 해를 구하면 $\hat{\pi}_{+1}$은 [0,1]사이의 값을 갖게되어, Greenberg, et al.에 의한 추정량이 최우추정량의 관점에서 갖는 한계를 극복할 수 있게 된다.

4. 예제 및 결론

본 논문에서는 확률화응답을 분할표 형태로 고려하여 이에 대해 대수선형모형을 적합하고 ISP에 의하여 구해진 최우추정량의 극한이 Singh에 의하여 제안된 추정량의 극한과 같게 되어 Warner에 의해서 제시된 추정량이 Singh의 관점에서 최우추정량이 되지 못함을 확인해 보았다. 나아가 무관질문기법에 대해서도 Greenberg, et al.에 의해서 제시된 추정량이 최우추정량으로 적절하지 않음을 밝히었다.

앞의 결과를 확인하기 위하여 먼저 유한모집단으로부터 단순임의복원추출된 표본의 크기는 n=100으로 가정하고, Warner기법에서 민감질문이 선택될 확률 p는 일반적인 손실없이 p>1/2로 하자. 나아가 무관질문기법에서 $p \neq 0$이며 $\pi_y = 0.6$으로 가정하자.

표 1로부터 Warner기법에서 민감질문의 선택확률 p가 0.5로부터 멀어 질수록, 그리고 응답자 중 "예"라고 응답하는 응답자의 수가 증가 할수록 식 (2.3), 식 (2.5) 그리고 ISP의 결과가 일치하는 경향을 보이고는 있지만 전체적으로 보았을 때 Warner가 주장한 식 (2.3)의 추정량은 [0,1]을 벗어나는 경우가 있으므로 적절한 최우추정량이 되지 못함을 다시금 확인할 수 있었다. 그러나 ISP에 의하여 얻어진 추정량의 극한은 Singh의 추정량과 같게 되어, 대수선형모형으로부터 유도된 ISP에 의한 추정량은 Warner기법을 이용한 민감사안에 대한 추정시 추정의 관점에서 최우추

정량을 유도하는 한 방법이 됨을 알 수 있다.

나아가, 표 2로부터 식 (2.8)의 $\widehat{\pi}_u$은 [0,1]을 벗어나는 경우가 있으므로 적절한 최우추정량이 되지 못함을 알 수 있다. 그러나 ISP에 의하여 구한 추정량은 그 값이 (0,1)사이에 있을때는 Greenberg, et al.들이 주장한 추정량의 값과 같으며, 0이나 1에 가까운 값일때는 극한값이 본 논문에서 제시한 식 (2.10)의 결과와 같게 되어 무관질문기법을 이용한 조사에 있어서도 ISP에 의한 추정량은 Greenberg, et al.들이 주장한 추정량이 갖는 한계를 극복할 수 있음과 동시에 최우추정량을 구하는 한 방법으로 제시될 수 있다는 사실을 밝히게 되었다. 끝으로 바쁘신 중에서도 본 연구에 아낌없는 조언을 주신 서울대학교 계산통계학과 조 신섭교수님께 깊은 감사를 드린다.

참 고 문 헌

[1] 류 제복, 홍 기학, 이 기성 (1993). *확률화응답모형*, 자유아카데미.

[2] Abul-ela, Abdel-Latif, A., Greenberg, B. G. and Horvitz, D. G. (1967). A multiproportions randomized response model, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 62, 990-1008.

[3] Chen, T. T. (1978). Log-linear models for the categorical data obtained from randomized response techniques, *American Statistical Association Proceedings of Social Statistics Section*, 284-288.

[4] Chen, T. T. and Fienberg, S. E. (1976). The analysis of contingency tables with incompletely classified data, *Biometrics*, Vol. 32, 133-144.

[5] Devore, J. L. (1977). A note on randomized response technique, *Communications in Statistics - Theory and Method,* Vol. A6(15), 1525-1529.

[6] Flinger, M. A., Policell, G. E. II and Singh, J. (1977). A comparison of two randomized response survey methods with consideration for the level of respondent protection, *Communications in Statistics, - Theory and Method*, Vol. 6, 1511-1526.

[7] Folsom, R. E., Greenberg, B. G., Horvitz, D. G. and Abernathy, J. R. (1973). The two alternative questions randomized response model for human surveys, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 68, 525-530.

[8] Greenberg, B. G., Abul-ela, A. A., Simmons, W. R. and Horvitz, D. G. (1969). The unrelated question randomized response model : Theoretical framework, *Journal of the American Statistical Association*, Vol 64, 520-539.

[9] Haberman, S. J. (1974). Log-linear models for tables derived by indirect observation : Maximum likelihood equations, *Annals of Statistics*, Vol. 2, 911-924.

[10] Hochberg, Y. (1975). Two stage randomized response schemes for estimating a multinomial, *Communications in Statistics*, Vol. 4(11), 1021-1032.

[11] Liu, P. T. and Chow, L. P. (1976). The efficiency of the multiple trial randomized response technique, *Biometrics*, Vol. 32, 607-618.

[12] Raghavarao, D. (1978), On an estimation problem in Warner's randomized response technique, *Biometrics,* Vol. 34, 87-90.

[13] Singh, J. (1976). A note on the randomized response technique, *American Statistical Association Proceedings of Social Statistics Section*, 772.

[14] Warner, S. L. (1965). Randomized response : a survey technique for eliminating evasive answer bias, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 60, 63-69.

[표 1] Warner기법에 대한 최우추정량 비교

c_1 \ p	0.6	0.7	0.8	0.9
0	-1.999999 0.000000 0.000000	-0.750000 0.000000 0.000000	-0.333333 0.000000 0.000000	-1.250000 0.000000 0.000000
10	-1.500000 0.000000 0.000000	-0.500000 0.000000 0.000000	-1.666666 0.000000 0.000000	-0.000003 0.000000 0.000118
20	-0.999999 0.000000 0.000000	-0.250000 0.000000 0.000000	0.000000 0.000000 0.000211	0.125000 0.125000 0.125000
30	-0.499999 0.000000 0.000001	0.000000 0.000000 0.000362	0.166667 0.166667 0.166667	0.250000 0.250000 0.250000
40	0.000000 0.000000 0.000775	0.250000 0.250000 0.250001	0.333333 0.333333 0.333333	0.375000 0.375000 0.375000
50	0.500000 0.500000 0.500000	0.500000 0.500000 0.500000	0.500000 0.500000 0.500000	0.500000 0.500000 0.500000
60	1.000000 1.000000 0.998979	0.750000 0.750000 0.749999	0.666667 0.666667 0.666667	0.625000 0.625000 0.625000
70	1.500000 1.000000 0.999998	1.000000 1.000000 0.999571	0.833333 0.833333 0.833333	0.750000 0.750000 0.750000
80	2.000000 1.000000 0.999999	1.250000 1.000000 1.000000	1.000000 1.000000 0.999746	0.875000 0.875000 0.875000
90	2.500000 1.000000 1.000000	1.500000 1.000000 1.000000	1.166667 1.000000 1.000000	1.000000 1.000000 0.999869
100	3.000000 1.000000 1.000000	1.750000 1.000000 1.000000	1.333333 1.000000 1.000000	1.125000 1.000000 1.000000

* 각 칸에서 첫번째 값은 식 2.3의 결과이고 두번째 값은 식 2.5 그리고 세번째 값은 ISP의 결과이다.

[표 2] 무관질문기법에 대한 최우추정량 비교

c_1 \ p	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	-2.400000 0.000000 0.000000	-1.400000 0.000000 0.000000	-0.900000 0.000000 0.000000	-0.600000 0.000000 0.000000	-0.400000 0.000000 0.000000	-0.257143 0.000000 0.000000	-0.150000 0.000000 0.000000
10	-1.900000 0.000000 0.000000	-1.066667 0.000000 0.000000	-0.650000 0.000000 0.000000	-0.400000 0.000000 0.000000	-0.233333 0.000000 0.000000	-0.114286 0.000000 0.000000	-0.025000 0.000000 0.000001
20	-1.400000 0.000000 0.000000	-0.733333 0.000000 0.000000	-0.400000 0.000000 0.000000	-0.200000 0.000000 0.000000	-0.066667 0.000000 0.000001	0.028571 0.028571 0.028572	0.100000 0.100000 0.100000
30	-0.900000 0.000000 0.000001	-0.400000 0.000000 0.000001	-0.150000 0.000000 0.000001	0.000000 0.000000 0.000290	0.100000 0.100000 0.100001	0.171429 0.171429 0.171429	0.225000 0.225000 0.225000
40	-0.400000 0.000000 0.000001	-0.066667 0.000000 0.000004	0.100000 0.100000 0.100001	0.200000 0.200000 0.200001	0.266667 0.266667 0.266667	0.314286 0.314286 0.314286	0.350000 0.350000 0.350000
50	0.100000 0.100000 0.100007	0.266667 0.266667 0.266668	0.350000 0.350000 0.350000	0.400000 0.400000 0.400000	0.433333 0.433333 0.433334	0.457143 0.457143 0.457143	0.475000 0.475000 0.475000
60	0.600000 0.600000 0.599997	0.600000 0.600000 0.599999	0.600000 0.600000 0.599999	0.600000 0.600000 0.600000	0.600000 0.600000 0.600000	0.600000 0.600000 0.600000	0.600000 0.600000 0.600000
70	1.100000 1.000000 0.999993	0.933333 0.933333 0.933329	0.850000 0.850000 0.849999	0.800000 0.800000 0.799999	0.766667 0.766667 0.766667	0.742857 0.742857 0.742857	0.725000 0.725000 0.725000
80	1.600000 1.000000 0.999999	1.266667 1.000000 0.999999	1.100000 1.000000 0.999999	1.000000 1.000000 0.999731	0.933333 0.933333 0.933333	0.885714 0.885714 0.885714	0.850000 0.850000 0.850000
90	2.100000 1.000000 1.000000	1.600000 1.000000 1.000000	1.350000 1.000000 1.000000	1.200000 1.000000 1.000000	1.100000 1.000000 1.000000	1.028571 1.000000 0.999999	0.975000 0.975000 0.975000
100	2.600000 1.000000 1.000000	1.933333 1.000000 1.000000	1.600000 1.000000 1.000000	1.400000 1.000000 1.000000	1.266667 1.000000 1.000000	1.171429 1.000000 1.000000	1.100000 1.000000 1.000000

* 각 칸에서 첫번째 값은 식 2.8의 결과이고 두번째 값은 식 2.10 그리고 세번째 값은 ISP의 결과이다.