
콘크리트 복합체의 비선형 파괴해석

Non-Linear Fracture Analysis of Concrete Composite



김상철*

Kim, Sang Chel

ABSTRACT

Fracture behavior of cement-based composite material shows significant differences between theoretical and experimental results when the analysis is carried out on the basis of Linear Elastic Fracture Mechanics. This may be explained from that cement based materials develop a large zone of distributed cracking, termed the fracture process zone, which grows and dissipates a certain amount of energy before a major continuous crack is formed. Even non-linear fracture mechanics such as fictitious crack model, crack band model and two parameter fracture model show also some limitations on simulating practical fracture behavior because these are based on 2 dimensional analysis and can not explain the formation of multiple cracks during loading.

This study assumes the concrete to be a multi-phase composite material and simulates the fracture behavior in two directional modes such as simultaneous deformation mode (SD mode) and progressive fracture mode (PF mode). It can be known from the study that multiple cracks are formed when the stresses distributed elastically from a major crack tip exceed an allowable tensile strength that a prescribed phase can sustain, while the major

* 정회원, 동아건설산업(주) 기술연구소 책임연구원

• 본 논문에 대한 토의를 1997년 10월 31일까지 학회로 보내주
시면 1997년 12월호에 토의회답을 게재하겠습니다.

continuous crack propagates. The paper places an emphasis on methods of analyzing the formation of the secondary cracks in PF mode and of modelling the fracture behavior in SD mode. In addition, numerical and experimental results are compared to investigate the feasibility of modelling.

Keywords : multi-phase composite, non-linear elastic fracture mechanics, fracture process zone, multiple cracks, crack tip, simultaneous deformation (SD) mode, progressive fracture (PF) mode

1. 서론

여러 종류의 구성재료로 구성된 다중복합재료 (multi-phase composite material)의 파괴거동 해석에 선형파괴역학(LFEM)개념을 도입시키므로써 구성재료의 수와 파괴계수, 구성원의 적층 순서등이 복합재료의 파괴거동에 미치는 영향에 대해서는 앞서 연구로부터 관찰할 수 있다^{1,2)}. 그러나 복합재료를 구성하는 구성재료들이 시멘트를 기초로 하는 준취성재료(quasi-brittle material)로 되어 있다면 선형파괴역학의 적용은 파괴거동적 시뮬레이션 측면에서 양호한 결과를 나타내지 못하고 있으며, 특히 미시적인 관점에서 콘크리트의 구성원인 골재의 파괴거동은 선형파괴해석보다 비선형파괴해석으로 유사하게 나타낼 수 있다고 보고되고 있다³⁾. 따라서 현재 건설현장에서 주로 사용하고 있는 다중복합재료의 파괴거동, 특히 콘크리트와 관련된 복합재료의 파괴거동은 비선형파괴역학을 기초로 하는 파괴해석이 선형파괴역학에 기준한 해석보다 양호한 결과를 나타낼 것으로 판단된다.

콘크리트는 자갈, 모래, 시멘트등의 형상, 크기 및 성질이 서로 다른 구성재료들이 불규칙적인 조합을 이루어 형성된 복합체로 주균열이 진행하기 이전에 이미 콘크리트 내부에 미세균열들이 발생된다. 파괴진행영역(fracture process zone)이라 칭하는 이 미세균열 영역은 아직도 응력을 전달할 수 있는 능력이 있으며 파괴해석적으로 그 응력의 전달능력은 균열선단에서의 균열개구면 변위(crack opening displacement)에 의존한다고 가정된다. 그러나 대부분의 기존해석에서는 주균열을 점진적으로 진행시

키면서 해석하기 때문에 실제 현상에서 발견되는 균열의 비연속성 현상을 재현하기는 어렵다. 이는 콘크리트와 같은 복합재료를 하나의 단종재료(single-phase material)로 가정하여 해석하였기 때문으로 판단되며 본 연구에서는 복합체를 이상화하여 각 구성재료들이 일정방향으로 동일한 변형이 발생되도록 하는 연립변형모드(Simultaneous Deformation mode : SD mode)와 균열이 각 구성재료를 관통하여 통과하는 진행파괴모드(Progressive Fracture mode: PF mode)의 두가지 방향에 대한 파괴모드에 대해서 이론적으로 모델링하는 기법을 설명하고자 하였다.

본 연구는 가상균열모델(fictitious crack model)에 입각하여 2개 이상의 서로 다른 재료들이 결합하여 생성된 복합재료의 균열현상에 대해서 시뮬레이션하였으며, 본 파괴해석기법은 현재 신구콘크리트의 이어치기를 실시하는 구조물이나 덧씌우기를 한 도로포장의 파괴해석에도 거시적인 측면에서 많은 활용이 되리라 사료된다.

2. 진행파괴모드에서의 균열 수치 해석

진행파괴모드(PF mode)는 Fig. 1(a)과 같이 구성재료를 상하로 두 개 이상 적층하여 균열이 각각의 구성재료를 관통하면서 점진하는 형태의 모드이다. 일반적으로 3점 휨을 받는 보에 있어서 가상균열에 의한 수치해석을 실시하기 위해서는 절점 n 까지 노치(notch)를 가진 보가 Fig. 2와 같이 하중 P를 받고 있다고 가정하며 구조물에 하중이 작용하여 균열이 발생하는 실제 현상과는 달리 기존의 노치에 발생

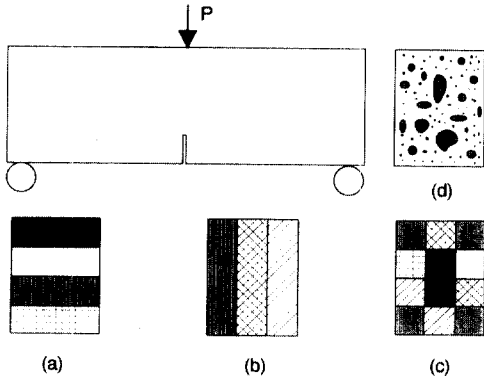


Fig. 1 Schematic configuration of multi-phase composite material
 (a) progressive fracture mode
 (b) simultaneous deformation mode
 (c) hybrid composite fracture mode
 (d) concrete

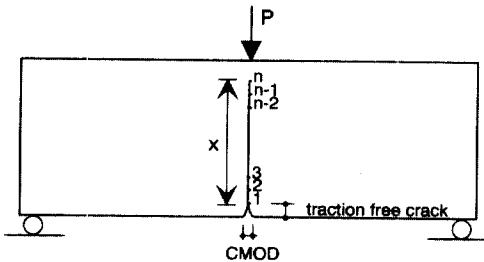


Fig. 2 Notched beam subjected to three-point bending

된 개구면 변위를 닫기 위해 필요로 하는 응력을 역으로 산정한다. 탄성학에서 사용하는 중첩의 원리(principle of superposition)를 사용하여 각 절점에서의 개구면 변위 W_i 와 처짐량(δ)은 다음 식으로부터 산출할 수 있다.

$$W_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \sigma_j + c_i P \quad (1)$$

$$\delta = \sum_{j=1}^{n-1} b_j \sigma_j + d_p P$$

위의 식을 매트릭스 형식으로 나타내면,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(m-2)} & a_{1(m-1)} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(m-2)} & a_{2(m-1)} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3(m-2)} & a_{3(m-1)} & c_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & \cdots & a_{(m-1)(m-2)} & a_{(m-1)(m-1)} & c_{m-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & d_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \sigma_{m-1} \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ W_{m-1} \\ \delta \end{pmatrix}$$

혹은,

$$[C]\{F\} = \{\Delta\} \quad (3)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서,

a_{ij} = 등가단위하중 (=단위응력 × 요소길이)이 절점 j 에 작용할 때 절점 i 에서의 개구면 변위

c_i = 단위하중($P=1$)이 작용할 때 절점 i 에서의 개구면 변위

b_j = 등가단위하중이 절점 j 에 작용할 때 하중작용선상에서의 처짐량

d_p = 단위하중이 작용할 때 하중작용선상에서의 처짐량

σ_i = 절점 i 의 단위응력

w_i = 절점 i 의 개구면 변위

δ = 하중작용선상의 총 처짐량이다.

식 (3)의 매트릭스 $[C]$ 는 컴플라이언스 매트릭스(compliance matrix)로써 일반적으로 영향매트릭스(influence matrix)라 칭하며, 본 매트릭스는 유한요소법에 의한 탄성해석으로부터 산정할 수 있다. Fig. 3은 영향매트릭스를 구하기 위해 사용된 유한요소 매쉬를 나타낸 것으로 보의 대칭성을 이용하여 보의 절반만이 고려되었다. 보의 중심선을 따라 총 80개의 요소로 보를 분할하였고 그 중 해석을 위해 최종 균열이 진행 가능한 노치의 범위로 절점수는 77(즉, $n=77$)까지 하였다. 영향매트릭스의 처음 76개의 열은 각각의 절점에 단위수평하중을 가하여 구하였고, 매트릭스의 마지막 열은 하중작용선 방향으로 단위수직하중을 가하여 발생하는 처짐량을 대입하였다.

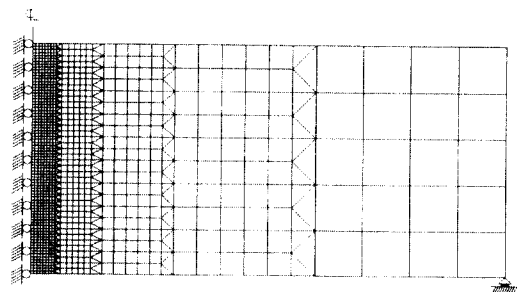


Fig. 3 Finite element mesh for a half of the beam

계산수행 절차는 첫 절점이 재료의 인장강도(f_t)에 도달하였다고 가정하였을 때 첫 절점에서의 개구

면 변위는 0이 되며 이 때의 경계조건은 $\sigma_1 = f$, $w_1 = w_2 = \dots = w_{n-1} = 0$ 으로 나타낼 수 있다. 식 (1) 혹은 (2)로부터 n개의 경계조건을 가진 n개의 식이 있으므로 n개의 미지수 ($\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, P, \delta$)는 결정될 수 있게 된다. 균열이 다음 절점으로 진행하면 첫 절점은 열리게 되고 두 번째 절점이 인장강도에 도달하게 되어 경계조건은 $\sigma_2 = f$, $w_2 = w_3 = \dots = w_{n-1} = 0$, $w_1 \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma(w_1)$ 이 형성된다. 이 때 절점 i에서의 개구면 변위 w_i 은 Fig. 4(b)와 같이 가정된 인장열화곡선(tension-softening curve)으로부터 산출하며 방정식을 풀기 위해서는 중첩의 원리에 따른 보정계수(correction factor: α_i , $i=1, \dots, n$)를 사용하여 각 위치별 경계조건이 만족되도록 한다.

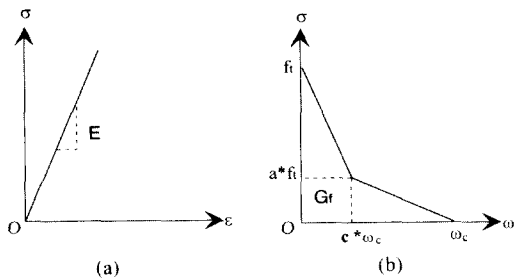


Fig. 4 Principle of deformation properties
 (a) Deformation properties of the material outside the fracture zone can be obtained from σ - ϵ curve
 (b) Deformation properties of the fracture zone can be obtained from σ - w curve

이상의 방법을 반복 사용하여 각 절점으로 균열을 진행시키므로써 하중-변위곡선(P- δ curve) 및 하중-균열개구면변위곡선(P-CMOD curve)을 구할 수 있게 된다.

그러나 진행형 파괴모드를 받는 다층복합재료의 파괴거동은 각각의 층이 쌓아 올린 순서에 의해 영향을 받게 되며, 이 때 균열의 진행방향으로는 강성이 높은 재료(H 재료)에서 출발하여 낮은 강성의 재료(L 재료)로 균열이 진행되는 경우(H-L stacking sequence)와 강성이 낮은 재료에서 높은 재료로 진행되는 경우(L-H stacking sequence)로 구분할 수 있다. L-H 순서에 입각하여 적층한 2단 복합재료에서는 앞에 제시한 방법을 사용하였을 때 큰 문제가 발생하지 않지만 적층순서가 H-L의 경우는 하층

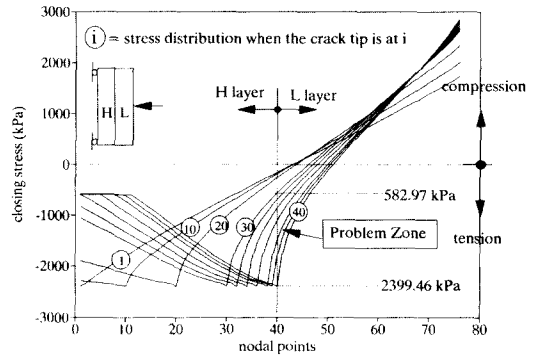


Fig. 5 Stress distribution for the crack to propagate from the first node to the end point of H layer in H-L layer sequence

(H층)의 균열선단으로부터 비선형해석에 의해 상당으로 분포시킨 응력이 상층(L층)의 허용인장강도를 초과하게 되어 하층과 동시에 상층에서도 균열이 진행될 수 있다. Fig. 5는 Table 1의 각 구성재료별 물성치를 사용하고, 상·하층간의 경계면이 완전 결합되었다고 가정한 조건에서 H-L로 적층한 보의 높이 방향으로 총 절점수 80개 중 상층과 하층의 경계구간의 절점 40까지 균열을 진행시키므로써 각 절점별로 분포된 응력을 나타낸 것이다. 균열 선단이 하층절점 30을 지나면서부터 균열선단으로부터 분포시킨 응력이 상층의 일부구간에서 허용인장강도 $f_t = 582.97$ kPa (84.55 psi)를 초과하게 되어 하층과 동시에 이미 상층에도 균열이 진행되고 있음을 알 수 있다.

Table 1. Material properties of two-layer system

Material Properties	L material	H material
Young's modulus E ($\times 10^3$)	21.03 kPa (3.05 psi)	21.03 kPa (3.05 psi)
Fracture energy G_f	10.157 N/m (0.058 lbs/in)	52.185 N/m (0.298 lbs/in)
Tensile strength f	582.97 kPa (84.55 psi)	2,399.46 kPa (348 psi)
a^*	0.25	0.25
c^*	0.10	0.10

where, a^* and c^* = coefficients denoting a discontinuity point in tension-softening curve(see Fig. 4)

2.1 동시 발생 균열을 고려한 수치 해석

가상균열이론에 입각하여 일반적으로 사용하고

있는 이산균열(discrete crack) 해석방법은 균열을 요소의 경계를 따라 진행하게 하므로써 균열로 인한 변위의 물리적 불연속성이나 국소화된 균열을 잘 표현할 수 있는 것으로 알려져 있다¹⁴⁾. 그러나 이산 균열방법은 앞에서 언급한 바와 같이 하층(H층)에 균열이 진행함에 따라 상층(L층)에도 동시에 균열이 발생하는 동시 발생 균열을 해석하는데는 문제점이 있는데, 그 이유로는 상층에 발생된 2차 균열이 매쉬요소에 인위적인 인장강도값을 주어서 발생하는 것이 아니라 하층의 균열선단으로부터 분포시킨 탄성응력치가 그 층의 허용강도값을 초과하므로써 발생되었기 때문이다. 따라서, 상층에 발생된 허용강도보다 높은 강도는 균열을 주어 풀어 주어야 하며, 하층에 계속 균열을 진행시키면서 새로운 균열선단 위치를 상층에서 찾는 것이 필요하다. 일단 균열선단의 위치를 알게 되면 파괴진행영역이 설정될 수 있고 그 영역내의 응력은 앞서 설명한 인장열화곡선에 따라 하층 전달 능력을 저감을 시킬 수 있게 된다.

상층에 위치한 새로운 균열선단을 찾는 가능한 방법 중 하나로 하층 균열로 야기된 상층의 새로운 균열선단을 따라 기존의 매쉬요소들을 재배열시키는 방법이 본 연구에서 사용되었다. 그러나 매트릭스 각각의 요소들은 매쉬의 절점과 일치하고 있으므로 균열선단의 위치는 영향매트릭스의 형성과 직접 관련을 갖게 된다. 따라서, 요소들의 경계와 2차 균열의 선단과 일치시키기 위해서는 매트릭스의 구성요소들(혹은 배열)의 변경이 불가피하였다.

영향매트릭스의 구성을 살펴보면 매트릭스는 주대각선 방향에 대해 상호대칭, 즉 $a_{ij} = a_{ji}$ 임을 알 수 있다. 이는 외력이 절점 j에 작용하고 있을 때 절점 i에서의 개구면 변위는 동일한 외력을 절점 i에 작용하였을 때 절점 j에서의 개구면 변위와 동일하다는 맥스웰의 상호교환원칙(Maxwell's reciprocal principle)에 기인한다. 또한, 매트릭스의 첫 번째 열에서의 매트릭스 요소들 $a_{i1}(i=1, \dots, n)$ 은 등가단 힘력에 사용될 첫번째 요소의 길이(element length)가 다른 요소에 비해 그 크기가 절반이기 때문에 a_{i1} 크기의 1/2이 사용되었다. 또한 마지막 열의 요소들 c_i 는 마지막 행의 요소들을 매쉬요소의 길이로 나눈 값, 즉 b_i / A_i 와 일치함을 알 수 있다. 따라

서, 식 (2)는 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1(n-1)} & c_1 \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2(n-1)} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}a_{1k} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{k(n-1)} & c_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}a_{1(n-1)} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)k} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k & \dots & b_{n-1} & d_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \sigma_k \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_k \\ \dots \\ w_{n-1} \\ \delta \end{pmatrix}$$

여기서,

$$b_i = 0.5 \times c_i \times A_i, \quad b_i = c_i \times A_i (i = 2, \dots, n-1)$$

A_i = 요소길이를 나타낸다.

H-L적층에서 임의의 k번째 절점을 H층의 균열로 인해 발생한 L층의 2차균열선단이라고 하였을 때, 2차균열선단을 구하는 방법으로 위 식에서 요소 a_{ik} 와 b_k (혹은 c_k) 대신에 미지수 x_k 를 대체하므로써 식 (4)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{11} & \dots & x_1 & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1(n-1)} & c_1 \\ \frac{1}{2}a_{12} & \dots & x_2 & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2(n-1)} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}x_k & \dots & x_k & a_{k+1} & \dots & x_{n-1} & x_k/A_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}a_{1(n-1)} & \dots & x_{n-1} & a_{(k+1)(n-1)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & c_{n-1} \\ b_1 & \dots & x_n & b_{k+1} & \dots & b_{n-1} & d_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \sigma_k \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_k \\ \dots \\ w_{n-1} \\ \delta \end{pmatrix} \quad (5)$$

식 (5)의 영향매트릭스 [C]를 식(6)과 같이 두 개의 매트릭스로 나누면,

$$[C] = [C'] + [C''] \quad (6)$$

로 나타낼 수 있으며 여기서,

$$[C'] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & 0 & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1(m-1)} & c_1 \\ \frac{1}{2} a_{12} & \dots & a_{2(k-1)} & 0 & a_{2(k+1)} & \dots & a_{2(m-1)} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} a_{1(k-1)} & \dots & a_{(k-1)(k-1)} & 0 & a_{(k-1)(k+1)} & \dots & a_{(k-1)(m-1)} & c_{k-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} a_{1(k+1)} & \dots & a_{(k+1)(k+1)} & 0 & a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)(m-1)} & c_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & \dots & b_{k-1} & 0 & b_{k+1} & \dots & b_{m-1} & d_p \end{pmatrix}$$

$$[C''] = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & x_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} x_1 & \dots & x_{k-1} & x_k & x_{k+1} & \dots & x_{m-1} & x_m/A_1 \\ 0 & \dots & 0 & x_{k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & x_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이 된다. 이 식(6)을 식(3)에 대입하면,

$$[C'']\{F\} = \{\Delta\} - [C']\{F\} \quad (7)$$

로 나타낼 수 있고, 매트릭스의 연산작업을 통해 위의 매트릭스는 다음 식(8)과 같이 미지의 벡터 스퀘이스 $\{X\}$ 의 형식으로 나타낼 수 있다.

$$\{F\} = [A]^{-1}\{\Delta\} - [C']\{F\} \quad (8)$$

여기서,

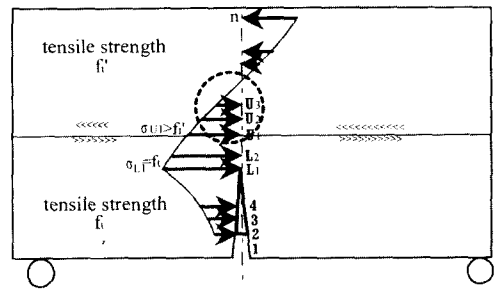
$$[A] = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_k & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_{k-1} & \sigma_k & \sigma_{k+1} & \dots & \sigma_{m-1} & P/A_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

이다. 따라서, 응력벡터 $\{F\}$ 와 변형벡터 $\{\Delta\}$ 가 적절히 주어지면 2차균열선단과 관련한 매트릭스의 요소들은 식(8)을 사용하여 계산할 수 있다.

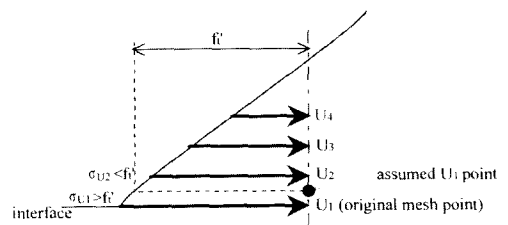
2.2 계산 수행 방법

균열을 사전에 전제한 평면의 요소경계를 따라 진행시키고 균열이 각 절점으로 진행할 때마다 균열의 선단에서부터 분포된 응력들이 각 상부층에 있어서의 허용인장강도들을 초과하는지 평가한다. 만약 Fig. 6과 같이 두 개의 층으로 구성된 복합재료에 있어서 하층에서의 균열선단이 절점 L_1 에 도달하였을 때 상층의 절점 U_1 에서의 응력이 허용인장강도를 초과한다면 상층에서의 2차균열선단의 위치는 일시적으로 응력분포도로부터 가정하고 원 배위요소들은 새로운 균열선단의 위치와 일치하도록 재배열시킨다.

이 때의 계산은 다음 순서에 입각하여 수행한다.



(a) Stress distribution before modification



(b) Schemed stress distribution

Fig. 6 Reorientation of elementary boundary to find the second crack tip in H-L sequence

(1) 균열선단이 첫 번째 절점에 있을 때 계산한 응력벡터로부터 가정된 위치 U_1 에서의 응력은 선형보간법(linear interpolation)을 사용하여 계산하고, 그 계산한 응력은 원절점 U_1 에서의 응력값과 대체한다. 새로운 응력벡터에 기준하여 영향매트릭스는 식 (8)에 따라 새로 작성한다.

(2) 새로 작성한 영향매트릭스를 사용하여 $\sigma_{ii} = 1$ ($i = 1, \dots, L_1$)로 하고 절점 L_1 까지 점진적으로 하중을 재하하여 균열을 진행시키고 각 단계별로 응력벡터를 구한 후 중첩의 원리를 이용하여 각 절점에서의 응력을 산출한다. 균열이 절점 L_1 에 도달하였을 때 새로운 절점 U_1 에서의 응력은 다음의 경계조건을 만족하여야 한다.

$$\sigma_{U_1} = \sigma(atU_1) = \sum_{i=1}^{L_1} \alpha_i \sigma'_{U_1} = f_i \quad (9)$$

여기서 α_i 는 i 번째 단계에서의 보정계수이며, 만약 식 (9)의 경계조건이 만족되지 않으면 균열선단 U_1 에 대한 새로운 위치가 가정되어야 하고 위에 서술한 방법이 반복된다.

위의 두번째 계산절차는 새로운 균열선단의 위치가 가정됨에 따라 영향매트릭스가 바뀌게 되고 절점 L_1 까지 중첩의 원리에 사용할 동일한 응력벡터를 구하기 위해서는 첫단계부터 균열진행작업을 반복하여야 한다. 또한 그 결과가 경계조건을 만족하지 못하였을 때에는 처음부터 계산작업을 다시 반복수행하여야 하므로 프로그램 수행상에 많은 시간이 소요되었다.

그러나 각 단계별 응력분포의 수치해석 결과 절점 U_1 에서의 응력만이 영향매트릭스 요소의 변화에 매우 밀접하게 영향을 받게 되고, 영향매트릭스를 변화시키기 이전에 모든 단계별 응력벡터들은 프로그램의 기억장치에 저장되어 있기 때문에 앞에서 서술한 번거로운 반복작업을 수행하지 않고도 응력 σ_{U_1} 을 계산할 수 있음을 알 수 있었다.

만약 m 번째의 단계를 고려하였을 때 w_m 은 0이므로 식 (9)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_{mi} \sigma_i'' + c_m P'' = 0$$

여기서 $i=1 \sim m-1$ 일 때 $\sigma_i'' = 0$ 이고, $i=m+1 \sim n-1$ 일 때 $\sigma_i'' \neq 0$ 이다. 식 (10)은 σ_{ii}'' 에 대해서 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ii}'' = -\frac{1}{a_{mii}} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} \sigma_j'' + \sum_{j=U_{i+1}}^{n-1} a_{mj} \sigma_j'' + c_m P'' \right\} \quad (11)$$

따라서, 균열이 L_1 에 도달하였을 때 절점 U_1 에서의 응력값은 중첩의 원리를 이용하여 식 (12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{U_1} = \sum_{m=1}^{L_1} \alpha_m \sigma_{U_1}'' = -\sum_{m=1}^{L_1} \frac{\alpha_m}{a_{mU_1}} \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} a_{mi} \sigma_i'' + \sum_{i=U_{m+1}}^{n-1} a_{mi} \sigma_i'' + c_m P'' \right\} \quad (12)$$

보정계수 α_i 는 이미 매 단계별로 계산되고 매트릭스 요소들의 변화에 영향을 받지 않는다. 그러므로 각 가정된 균열선단에서의 응력은 식 (12)를 사용하여 결정하고, 그 값이 경계조건 ($\sigma_{U_1} = f_i$)을 만족하는지 평가한다. 이상의 개념을 사용하여 계산한 결과 반복작업에 소요된 시간을 크게 감소시킬 수 있었다.

2.3 균열의 연속 진행

균열이 Fig. 7과 같이 다음 절점 L_2 로 더 진행하게 되면, 이 때 L_1 의 절점은 열리게 되고 절점 L_2 는 하층의 인장강도에 도달하게 된다. 이와 동시에 상층에서의 절점 U_1 의 개구면 변위는 0이 아니고 상층의 균열선단은 다음 절점 U_2 로 이동하게 된다. 이 때의 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

1) 하층에서

$$\sigma_i = \sigma(w_i) \quad i = 1, \dots, L_1$$

$$\sigma_{L_2} = f_i \quad \text{여기서 } f_i \text{는 하층의 인장강도}$$

$$w_{L_2} = w_{L_3} = \dots = w_{U_0} = 0$$

2) 상층에서

$$w_{U_1} \neq 0, \quad \sigma_{U_1} = \sigma(w_{U_1})$$

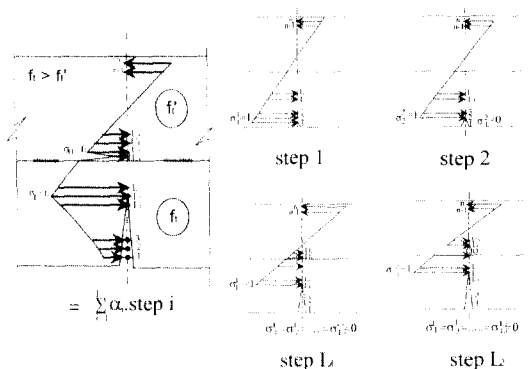


Fig.7 Principle of superposition associated with further crack propagation in the second crack tip

$\sigma_{U_2} = f'_i$, 여기서 $f'_i = 0$ 상층의 인장강도

$$w_{U_2} = w_{U_3} = w_{U_4} = \dots = w_{n-1} = 0$$

탄성방정식들은 $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{L_1} = 0$, $\sigma_{L_2} = f_i$.

$\sigma_{U_2} = f'_i$, $w_{U_2} = w_{U_3} = \dots = w_{n-1} = 0$ 의 경계조건을 만족하도록 하여 방정식을 풀고 각 단계별로 구해진 응력벡터는 앞서 계산한 응력벡터에 더해진다. 구한 결과 가운데 상층에서의 절점이 인장강도보다 큰 응력을 갖게 되면 앞에서 제시한 절차를 따라 새로운 균열선단 (U_2) 위치를 찾는 방법이 반복될 것이다. 일단 균열선단이 결정되지만 하면 모든 절점에서의 개구변위와 처짐량이 산출된다.

Fig. 8은 진행과괴모드방향으로 콘크리트와 시멘트페이스트를 결합하여 적층한 이층구조에서 3점 휨 시험에 따른 P-CMOD 곡선의 실험 결과와 이론적 해석 결과를 함께 도시하였다. 실험에서의 결과와 이론적 해석 결과가 그림에 나타난 바와 같이 서로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

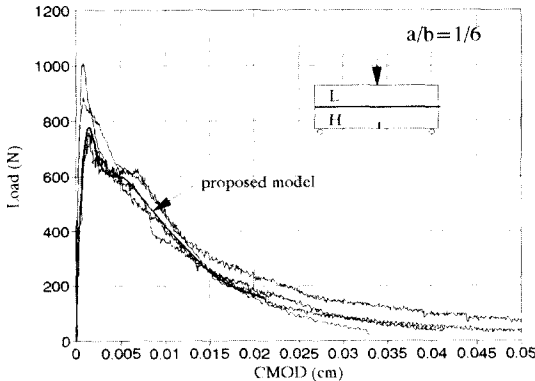


Fig. 8 Comparison of P-CMOD curves between experiments and numerical analysis in H-L layer sequence

3. 연립변형모드에서의 균열 수치 해석

연립변형모드(SD mode)에서의 파괴거동은 Fig. 1(b)과 같이 복합재료를 구성하는 각각의 구성원들이 하중작용 방향으로 배열되어 동일한 변형이 발생하도록 할 때의 파괴거동을 나타내는 모드이다. 복합재료의 파괴거동시 하중값은 각 구성원별로 구해진 P- δ 곡선을 이용하여 동일한 변위치(δ)에 대응한 각 구성원의 가중치 합을 구하여 산출한다.

그러나 가상균열이론에서의 하중 및 변위값은 보의 길이방향으로 균열을 진행시키면서 계산하기 때

문에 만약 복합재료가 서로 다른 재료적 특성값을 가진 구성원으로 구성되어 있다면 가중치 하중계산을 위한 변위의 데이터값은 서로 일치하지 않게 된다. 따라서, 복합재료에 대한 하중값들을 계산하기 위해서는 전제된 변위점에 해당하는 각각의 하중값이 매 단계별로 계산되어야 할 것이다.

그 하중치 추정을 위해 다항식 보간법(polynomial interpolation and extrapolation)을 사용하면⁷⁾,

$$P_{i,(i+m)} = \frac{(x - x_{i+m})P_{i,(i+m-1)} + (x_i - x)P_{i+1,(i+m)}}{x_i - x_{i+m}} \quad (13)$$

여기서 $P_{i,j}$ 는 양의 상수($i < j$)이며, $(x_i, y_i), (x_{i-1}, y_{i-1}), \dots, (x_j, y_j)$ 의 모든 점을 통과한다.

4차까지 다항식 보간법을 실시하여 계산한 결과, 보간법을 이용한 구간에서는 원만한 P- δ 곡선을 나타내었으나, 외삽법(extrapolation)이 이용된 하중-변위 곡선의 끝 구간에서는 실험과 달리 구불구불한 형상의 곡선을 나타내므로 다항식을 이용한 방법으로는 잘 추정되지 않는 것으로 판단되었다.

P- δ 곡선의 끝구간에서의 문제를 해결하기 위한 대안책으로 두 개의 다항식의 몫을 이용하여 추정하는 유리함수법(rational function approach)을 사용하면⁷⁾,

$$R_{i,(i+m)} = \frac{P_{\mu}(x)}{Q_{\nu}(x)} = \frac{p_0 + p_1x + \dots + p_{\mu}x^{\mu}}{q_0 + q_1x + \dots + q_{\nu}x^{\nu}} \quad (14)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서, $R_{i,(i+m)}$ 는 점 $(x_i, y_i), \dots, (x_{i+m}, y_{i+m})$ 의 $m+1$ 개의 점을 통과하는 유리함수이다.

본 식에서 $\mu + \nu + 1$ 개의 미지수 p와 q가 있기 때문에 다음의 조건을 만족하여야 한다.

$$m + 1 = \mu + \nu + 1 \quad (15)$$

Bulrsch-Stoer¹⁸⁾의 알고리즘을 이용하여 식 (14)를 다항식 추정법과 유사한 식 (16)으로 전환하면,

$$R_{i,(i+m)} = R_{(i+1)(i+m)} + \frac{R_{(i+1)(i+m)} - R_{i,(i+m-1)}}{\left(\frac{x + x_1}{x - x_{i+m}}\right) \left(1 - \frac{R_{(i+1)(i+m)} - R_{i,(i+m-1)}}{R_{(i+1)(i+m)} - R_{i+1,(i+m-1)}}\right) - 1} \quad (16)$$

이 된다. 이 때 식 (16)의 정확도는 식 (17)을 통해 평가된다

$$\begin{aligned} C_{m,i} &= R_{i,(i+m)} - R_{i,(i+m-1)} \\ D_{m,i} &= R_{i,(i+m)} - R_{(i+1)(i+m)} \end{aligned} \quad (17)$$

식 (16)은 연립된 하중-변위 곡선의 하중 데이터를 구하기 위해 프로그램화하였다. Fig. 9는 이론적 해석결과에 따른 하중-변위 곡선을 비교한 것으로 이론상의 파괴역학적 해석에서는 균열의 진행에 의해 하중과 처짐량이 제어를 받으므로 강성이 낮은 재료(L phase)는 강성이 높은 재료(H phase)에 비해 작은 처짐값에서 계산이 완료되었다. 따라서 연립변형모드의 하중 가중치 원리에 의해 계산하기 위해서는 강성이 낮은 재료의 경우 처짐량을 연장시킬 필요가 있다. 낮은 강성재료의 처짐을 연장추정하는 과정에서 유리함수를 이용하였을 때는 일반적인 실험에서와 같이 처짐량이 증가하면서 완만하게 하중치가 감소되고 있으나 다항식을 이용하였을 때는 어느 일정 처짐량에서 급격히 하중이 감소되는 현상을 나타내었다.

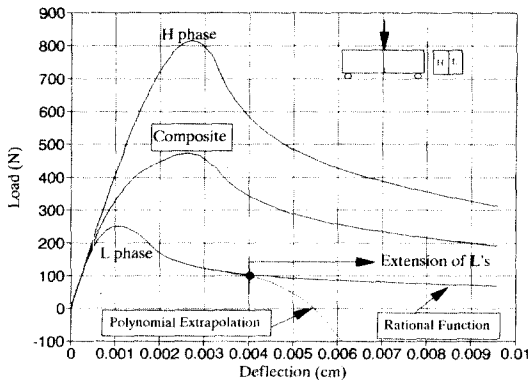


Fig. 9 Comparison between polynomial and rational function extrapolation for the extended load versus load-line deflection curve

연립변형모드 방향으로 시멘트와 모르타르를 결합시킨 실제 복합구조에 있어서 3집 휩이 작용될 때 하중과 개구변위의 관계를 Fig. 10에 도시하였다. 그림에 나타난 이론적 결과치는 유리함수를 사용한 결과이며 실험 결과와 매우 유사하게 나타났다. 따라서 본 연구에서 제안한 방법을 사용함으로써 연립변형모드로 구성된 복합구조의 파괴거동 추정이 가능함을 알 수 있었다.

4. 결론

콘크리트와 같이 시멘트를 기초로 하는 복합재료에서 발생하는 비연속적인 균열발생 원인을 규명하

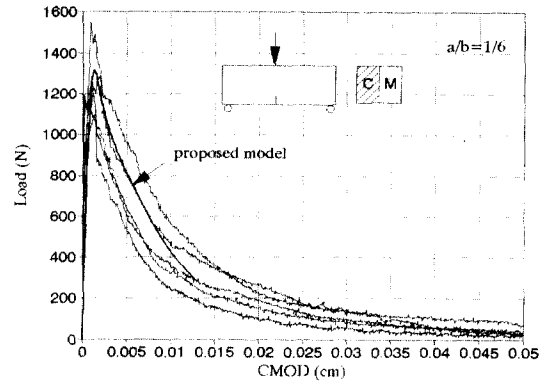


Fig. 10 Comparison of P-CMOD curves between experiments and numerical analysis in C-M composite

기 위해 구성재료의 배열상태에 따라 해석한 결과, 구성재료가 하중작용 방향에 대해 직각으로 적층한 진행파괴모드에서 비연속적 균열이 발생함을 본 연구를 통해 알 수 있었다. 2단 이상으로 적층시킨 복합재료에 있어서 강성이 높은 층으로 균열이 진행하고 있을 때 주 균열선단으로부터 상부로 분포시킨 응력값이 상층의 허용인장강도를 초과하게 되면 새로운 비연속적 균열이 상층에 발생하게 된다. 본 논문은 가상균열이론을 기초로 하여 비연속적 동시발생 균열을 해석하는 방법을 제시하였으며, 새로 발생한 2차균열선단의 위치에 따라 배위요소의 재배열 및 모델링하는 방법과 계산수행을 위해 소요되는 시간 절감을 위한 방법을 제시하였으며 실험을 통해 그 해석결과를 검증하였다.

구성재료가 하중방향으로 배열된 연립변형모드에서는 각 구성요소들의 강성이 서로 다르므로 임의의 변위치에 대응하는 하중의 가중치 합을 산정하기 위해서는 보간법을 사용하였으며 실험 결과치와 비교한 결과 다항식 보간법보다는 유리함수법이 하중-변위 곡선의 끝 구간 추정을 위해 유효한 것으로 나타났다.

참고문헌

1. 김상철, "연립변형모드로 구성된 복합재료의 파괴거동에 관한 연구", 콘크리트학회, 제 9권 3호 1997, 6, pp.179~188.
2. 김상철, "진행파괴모드에서의 복합재료파괴거동", 토목학회, 제17권 제14호, 1997, pp.469~475

3. Luong, M.P. "Tensile and Shear Strength of Concrete and Rock", Engineering Fracture Mechanics, Vol.35., 1990, pp.127-135.
4. 송하원, "유한요소법에 의한 콘크리트의 진행성 파괴해석", 콘크리트학회, 제8권 1호, 1996, 2, pp.145~153.
5. Jenq, Y.S., Liaw, C.J., and Kim, S.C., "Effects of Temperature on the Crack Formation in Portland Cement Concrete Pavements at Early Age", Transportation Research Record 1338, 1993, pp.35~41.
6. Jenq, Y.S., and Kim, S.C., "Control of Random Crack Formation in Portland Concrete Pavements", ASCE Structural Congress XII, Vol. 2, 1994, pp.972~977.
7. Phillips, G.M. and Taylor, P.J., Theory and Applications of Numerical Analysis, American Press, 1973.
8. Stoer, J., and Bulirsch, R., Introduction to Numerical Analysis, New York, 1980.
9. Hillerborg, A., Modeer, M., and Petersson, P.E., "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements", Cement and Concrete Research 6, 1976, pp.773~782.
10. Wittmann, F.H., "Size Effects on Fracture Energy of Concrete", Engineering Fracture Mechanics, Vol.35, 1990, pp.107~115.

요 약

시멘트를 기초로 하는 복합재료의 파괴거동은 주균열이 진행하기 이전에 파괴진행영역이라고 하는 미세균열대가 콘크리트 내부에 형성되기 때문에 선형파괴역학에 입각하여 해석하게 되면 실험치와 상당한 차이를 나타낸다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 가상균열모델이나 균열띠 모델, 두 파라미터 파괴모델 등 비선형해석에 따른 여러 파괴역학모델들이 제안되었으나 이들 모델들은 2차원 해석에 근거를 두고 있기 때문에 구조체의 두께방향으로 동일한 균열이 형성되며, 특히 콘크리트 실험에서 관찰되는 비연속적 균열발생에 대해서 설명이 어려웠다.

이에 본 연구는 콘크리트를 하나의 다중복합체로 가정하고 연립변형모드 및 진행파괴모드 방향으로 구성재료를 배열한 상태에서 가상균열 이론에 근거한 비선형해석 방법으로 모델링하였다. 진행파괴모드로 구성재료를 배열하면 강성이 높은 구성재료를 통과하여 균열이 진행될 때 균열선단으로부터 분포된 응력이 상층의 허용인장강도를 초과하게 되어 균열이 발생되며 이러한 균열은 점진적인 균열진행과는 달리 비연속 동시 발생 균열로 나타났다. 본 연구는 진행파괴모드에서의 파괴 해석 방법과 연립변형모드에서의 해석 방법을 제시하였으며, 해석결과를 실험결과와 비교함으로써 검증하였다.

(접수일자 : 1997. 6. 18)