

다중지지된 자정식 현수교의 비선형 지진응답 해석

Nonlinear Earthquake Response Analysis of a Multi-Supported Self-anchored Suspension Bridge

김 호 경* 서 정 인**
Kim, Ho Kyung Suh, Jeong In

국문요약

지진하중을 받는 현수교의 기하비선형 거동특성을 분석하기 위하여 비선형 지진응답해석 알고리즘을 정립하고 그에 따른 전산프로그램을 개발하였다. 해석이론은 최근 시도되고 있는 자정식 현수교나 mono-duo 형식의 주케이블 형상을 갖는 독특한 현수교에 대해서도 적용가능하도록 유한요소법을 사용하였다. 입력지진은 장지간 교량의 다중지지효과를 고려하기 위하여 한 지점에서 다른 쪽 지점으로 형상변화 없이 이동한다고 가정하였다. 하나의 mono-duo 자정식 현수교에 대하여 비선형 지진해석을 수행한 결과 예제의 교량이 비교적 단시간이어서 비선형 거동특성과 다중지지 효과가 두드러지게 나타나지는 않음을 확인할 수 있었다.

주요어 : 현수교, 자정식 현수교, 다중지지, 비선형, 지진응답

ABSTRACT

An analysis algorithm and a computer program have been developed to clarify the geometrically nonlinear response characteristics of a suspension bridge subject to the support excitation. The Finite Element procedures are utilized for the application to a self-anchored suspension bridge or to a mono-duo cable suspension bridge. The propagation of earthquake wave is simulated by taking a record as the input at the left anchorage of the bridge, and adding appropriate time delay to the other inputs for the purpose of considering the multi-support effects. According to the application for a mono-duo self-anchored suspension bridge, it has been found that the effects of nonlinear behavior and multi-support excitation are not notable for this relatively short-spanned suspension bridge.

Key words : self-anchored suspension bridge, multi-support effects, nonlinear behavior

1. 서 론

최근 들어 영종대교, 서해대교와 광안대교 등이 설계 또는 시공 중에 있어 우리나라에서도 본격적인 케이블지교량의 시대를 맞게 되었다. 이와 같은 장지간의 케이블지교량은 설계 및 시공에서 고도의 기술을 요하는 구조물로서 특유의 비선형 거동특성은 다른 형식의 교량에 적용하던 해석이론만으로는 접근이 곤란하여 하나의 독특한 해석영역을 요구하게 되었다.

특히 현수교의 구조해석은 사하중 및 활하중에 대한 정적해석 뿐만 아니라 동적해석에 대한 비중이 매우 크다. 따라서 내진설계와 관련된 지진응답 해석의 연구논문도 다수 발표되어 왔다.

초기 논문들은 주로 연속체해법에 바탕을 두고 발표되었으며 처짐이론(Deflection Theory)을 사용한 비선형해석과 선형화된 처짐이론에 의한 해석 등이 주류를 이루었다.^{(1),(2)} 이와 같은 연속체 해법은 현수교 고유의 해석이론이기는 하지만 제약조건 등으로 인해 실무에 사용하기에는 어려움이 따른다.

특히 영종대교와 같이 주케이블이 공간새그를 갖고 행어가 경사져 있으며 보강형에 큰 압축력이 걸

* 정회원 · 목포대학교 토목공학과 조교수

** 서울대학교 토목공학과 박사과정

리는 현수교에는 적용이 불가능하다. 따라서 이와 같이 다양화되어 가는 현수교에도 일반적으로 적용 가능한 유한요소법 등이 최근 활발히 연구되고 있다.^{(3),(4)} 그러나 이러한 연구도 주로 선형동적해석으로 수행되어 왔으므로 현수교의 구조특성상 기하비선형성을 고려한 해석이 응답에 얼마나 영향을 주는지 검토하는 것이 필요하다고 생각된다.

따라서 본 연구에서는 다양한 형태의 케이블지지 교량에 적용가능한 비선형 지점운동해석 알고리즘을 정립하고 이에 따라 해석 프로그램을 개발하고자 하였다. 아울러 이 프로그램을 자정식 현수교에 적용함으로써 특수형식의 현수교에 대한 비선형 지진응답 특성을 분석해 보고자 하였다. 입력지진은 1979년 미국에서 계측된 지진을 사용하였으며 다중지지 효과를 고려하기 위하여 지진파가 한 지점에서 다른 쪽 지점으로 형상변화 없이 이동한다고 가정하였다.^{(1),(2)}

2. 선형 및 비선형 동적해석

2.1 현수교의 비선형거동

현수교의 경우, 재료적으로는 선형거동을 하지만 전체적인 하중-변위관계는 비선형거동을 나타낸다.

이와 같은 비선형거동은 주로 다음의 이유들에 기인한다.⁽⁵⁾

- ① 케이블의 비선형거동
새그(sag)에 의한 케이블의 비선형 축력-축변형 거동, 즉 장력 증가에 따른 케이블의 강성 증가
- ② 휨부재의 비선형거동
주탑이나 보강형(자정식의 경우)에 작용하는 큰 압축력에 의한 휨강성의 저하, 즉 보-기둥 효과
- ③ 대변위 문제
설계하중에 대해서도 구조물의 변위가 크게 발생하여 변형 전후의 형상차이를 무시할 수 없는 경우, 즉 좌표계 변환행렬의 재구성 및 비보존력 문제 등

비선형성을 보이는 구조계는 크게 softening 구조계와 hardening 구조계로 나눌 수 있는데 전자는 변형이 증가할수록 구조계의 강성이 줄어드는 경우이며 후자는 변형이 증가할수록 강성이 증가하는 경우이다. 그림 1에서 위와 아래의 곡선은 각각 softening 구조계와 hardening 구조계의 하중-변위

관계를 나타내고 있다.

앞서 언급했던 현수교의 비선형 거동 요인 중 가장 두드러진 것은 작용하중에 의한 케이블 장력 증가와 이에 따른 구조계의 강성 증가라 할 수 있으므로 케이블지지교량은 hardening 비선형 구조계에 속한다.⁽⁶⁾

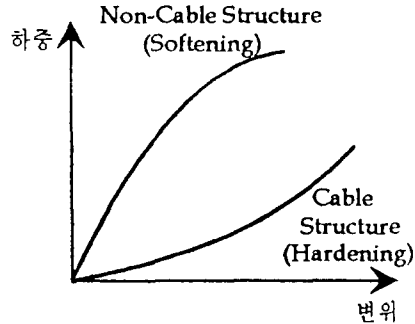


그림 1 비선형 하중-변위 관계

본 연구에서는 기개발된 3차원 현수교의 시공단계별 기하비선형 해석 프로그램인 SNUSUS⁽⁷⁾에 뼈대요소의 초기축력을 고려할 수 있는 알고리즘을 추가하여 사용하였다. 이 프로그램은 전형적인 현수교 뿐만 아니라 보강형이 주케이블을 지지하는 자정식 현수교나 주케이블이 공간 새그를 갖는 등의 다양한 형식의 현수교에도 적용이 가능하다.

현수교 구조계는 박벽단면 뼈대요소, 탄성현수선 케이블요소와 절점 연결요소 등을 사용하여 모델링 하며, 구조적으로 의미를 갖는 현수교 시공공정에 대한 시공명령어를 정의함으로써 시공 중 구조계의 변화양상 추적이 가능하다.

2.2 유한요소 모델

2.2.1 3차원 박벽단면 뼈대요소

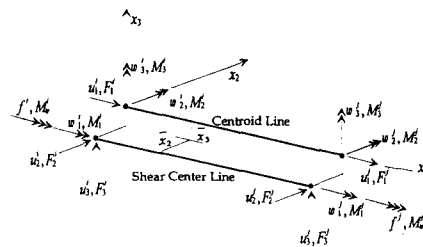


그림 2 3차원 뼈대요소의 단면력 및 변위 성분

박력단면 뼈대요소를 사용하여 보강형(또는 보강 트러스)과 주탑을 모델링하였다. 이 요소는 그림 2에 보인 바와 같이 전단중심과 도심이 일치하지 않는, 뒤틀변형을 포함하는 절점 당 7개의 자유도를 갖는 3차원 요소로서 Updated Lagrangian formulation⁽⁶⁾에 근거한 기하비선형 요소이다.

이때 접선강도행렬은 선형항인 $[K_E]$ 와 비선형항인 $[K_G]$ 의 합으로 표현할 수 있다.⁽⁶⁾

$$[K_T] = [K_E] + [K_G] \quad (1)$$

여기서 $[K_E]$ 와 $[K_G]$ 의 성분은 부록 1에 수록하였으며 특히 $[K_G]$ 는 재단 단면력의 함수이다.

2.2.2 3차원 탄성현수선 케이블요소

주케이블 및 현수재를 모델링하기 위해 탄성현수선 케이블요소를 사용하였다. 이 요소는 자중을 받는 탄성현수선 식의 정해로부터 유도된 요소로서 일반 트러스요소와 같이 많은 요소로 분할하지 않고도 단 하나의 요소만으로도 케이블의 거동을 정확히 파악할 수 있다.

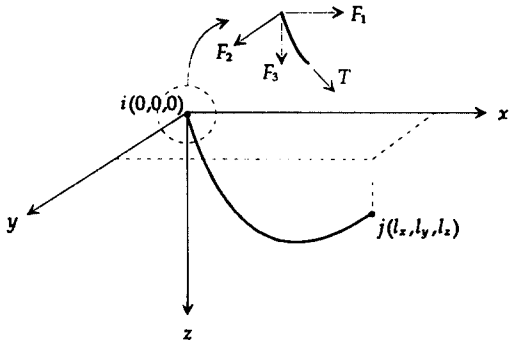


그림 3 탄성현수선 케이블의 형상

그림 3에 나타낸, 양단이 지지된 자중을 받는 케이블의 형상식은 다음과 같이 양단 절점력과 변형 전 길이의 함수로 나타낼 수 있다.^{(9),(10)}

$$l_x = \frac{F_1}{E_c A_c} L_0 - \frac{F_3}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_3 - wL_0}{H} \right) \right\}$$

$$l_y = \frac{F_2}{E_c A_c} L_0 - \frac{F_3}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_3 - wL_0}{H} \right) \right\} \quad (2)$$

$$l_z = \frac{F_3}{E_c A_c} L_0 - \frac{F_1}{2E_c A_c} - \frac{H}{w} \left[\left\{ 1 + \left(\frac{F_3}{H} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ 1 + \left(\frac{F_3 - wL_0}{H} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

또는

$$\begin{aligned} l_x &= f(F_1, F_2, F_3, L_0) \\ l_y &= g(F_1, F_2, F_3, L_0) \\ l_z &= h(F_1, F_2, F_3, L_0) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 E_c 는 케이블의 탄성계수, A_c 와 L_0 는 각각 변형전 케이블의 단면적 및 길이, H 는 케이블의 수평장력이며 w 는 케이블의 단위길이 당 자중이다.

식 (3)의 양변을 편미분하여 다음과 같이 유연도 행렬 $[F]$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} dl_x &= \frac{\partial f}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial f}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial f}{\partial F_3} dF_3 \\ dl_y &= \frac{\partial g}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial g}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial g}{\partial F_3} dF_3 \\ dl_z &= \frac{\partial h}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial h}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial h}{\partial F_3} dF_3 \end{aligned} \quad (4)$$

또는

$$\begin{Bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

유연도행렬의 역행렬이 강도행렬이므로 이로부터 부재의 접선강도행렬 $[K_T]$ 를 구할 수 있다.^{(9),(10)}

2.3 초기평형상태

현수교의 기본 설계개념은 사하중을 주케이블이 모두 지지하도록 함으로써 보강형의 휨응력을 최소화하는 것이다. 일반 교량의 경우 비선형성이 작아 사하중 재하에 따른 구조계의 강성변화 등을 고려할 필요가 없으므로, 사하중과 동적하중에 대해 독립적으로 해석을 수행한 뒤 그 결과를 중첩할 수 있다. 그러나 현수교의 경우 주케이블의 장력 도입 전과 후의 구조계 강성 변화가 매우 크며 장력도입 역시 사하중 재하로 인해 유발되므로, 사하중에 의한 평형상태에 도달하기까지의 변위가 크게 발생하게 된다.

따라서 지진하중 등의 동적해석에 앞서 반드시 사하중에 의한 초기평형상태를 구현하여야 한다.

여기서 초기평형상태를 구현한다함은 사하중상태에서 다음의 물리량들이 설계조건과 가급적 일치될 수 있도록 입력데이터(절점좌표 및 케이블 요소의 변형전 길이 또는 초기장력 등)를 결정함을 의미한다.^{(6),(11),(12)}

- 주케이블의 새그(sag)
- 보강형의 중단선형
- 케이블 정착점의 좌표
- 케이블의 장력
- 주탑의 좌표

초기평형상태에서 결정된 강도행렬은 향후 수행될 정적 및 동적하중 해석의 기본이 되기 때문에 그 중요성이 크며 반드시 비선형해석을 수행하여 결정되어야 한다. 보강형 및 주탑에 축력이 크게 작용하게 되는 경우에는 별도의 고려가 필요하다.

지진하중해석을 수행하고자 할 경우 이와 같이 비선형해석으로 결정된 초기평형상태에서 추가의 하중을 재하하여 추가의 변위를 구하면 된다.

교량의 형식 및 지간길이에 따라 지진하중에 의한 비선형 효과가 달라질 수 있으나 통상적으로는 선형해석을 하는 예가 많다.

2.4 공간새그를 갖는 주케이블의 형상 결정

해석 예의 그림 4에서 보인 바와 같이 수직면 뿐만 아니라 수평면에 대해서도 새그를 갖는 현수교에 대해서는 두 직각면으로 분리하여 각각에 대하여 주케이블의 형상을 정의할 수 있다.

교량의 단위길이 당 총사하중 및 보강형의 자중을 각각 \bar{w} 와 \bar{w}_g 라 하면 그림 4와 그림 5로부터 다음 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$T \frac{dx}{ds} = T_x = constant \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \left(T \frac{dz}{ds} \right) = -\frac{\bar{w}}{2} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = -\frac{\bar{w}_g}{2 \tan \theta} \quad (8)$$

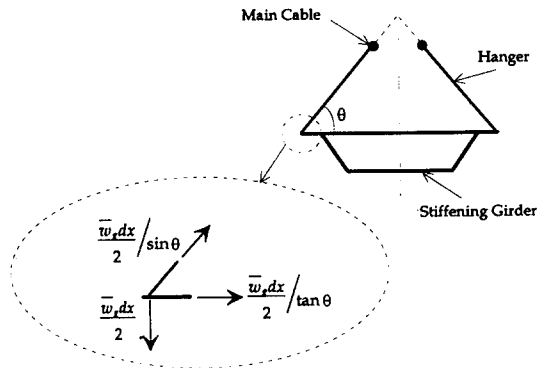


그림 4 사하중에 의한 힘의 평형

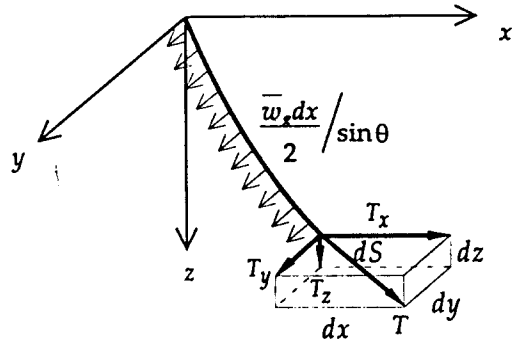


그림 5 주케이블의 장력 성분

식 (6)을 식 (7)과 식 (8)에 대입하고 미분방정식을 풀면 수직면(x-z평면)과 수평면(y-z평면) 각각에 대한 이차식의 케이블 형상식 y와 z를 얻을 수 있다. 임의의 주케이블 부재에 대하여 두절점 간 형상 길이는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$L = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \quad (9)$$

여기서 x_1 과 x_2 는 주케이블 부재 양단 절점의

x좌표이며 ()'은 $\frac{d(\quad)}{dx}$ 를 의미한다.

또한 케이블 부재의 변형전 길이는 다음과 같다.

$$L_0 = L - \Delta L = L - \frac{T_x}{E_c A_c} \int_{x_1}^{x_2} (1 + y'^2 + z'^2) dx \quad (10)$$

2.5 보강형 및 주탑의 초기축력

보강형(또는 보강트러스)과 주탑에 걸리는 초기 축력은 그림 6에 보인 바와 같이 힘의 평형조건으로부터 결정할 수 있으며 이는 다음과 같은 가정에 기초한다.

- 주케이블의 수평장력 T_x 는 전 경간에 걸쳐 일정하다.
- 현수재는 분포간격에 따라 일정한 비율로 보강형의 사하중을 분담한다. 즉 현수재의 배치간격이 일정하다면 현수재의 수직장력은 일정하다고 간주한다.

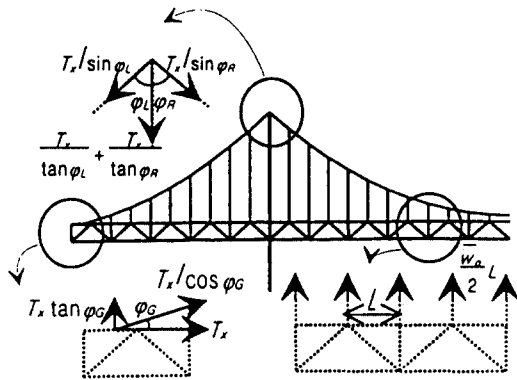


그림 6 보강트러스 및 주탑의 초기축력

이와 같이 주케이블 및 현수재에 의한 장력을 의력으로 주고 보강형(또는 보강트러스) 및 주탑 독립모델에 대한 해석을 수행하면 뼈대부재의 초기축력을 산정할 수 있다.

2.6 초기축력을 고려한 비선형 해석 알고리즘

비선형방정식을 풀기 위한 수치해법으로는 외부하중을 몇 개의 증분구간으로 나눈 뒤 각 증분구간마다 접선강도행렬로 불평형하중을 반복 소거시키는 방법이 가장 일반적이다. 자정식 현수교의 초기평형상태를 구현하기 위해서는 초기 불평형하중 산정시에 사하중에 의한 효과 외에 초기축력에 의한 단면내력을 포함시켜 서로 상쇄되도록 해야 한다. 일반적인 비선형해석 흐름도에 이 과정을 포함시켜

그림 7에 나타내었다.

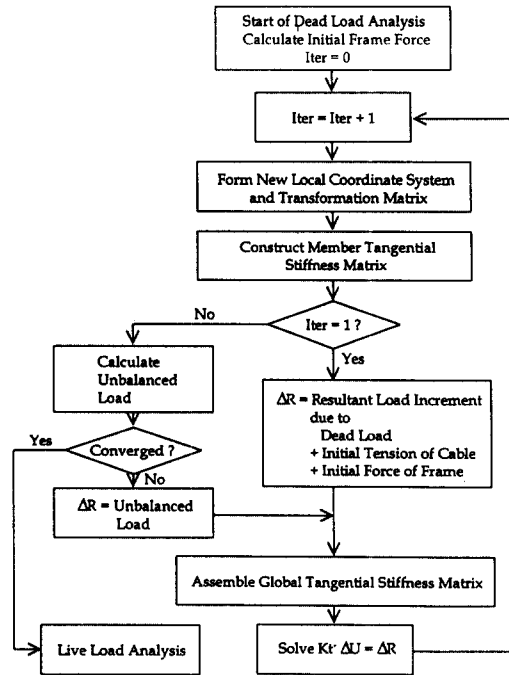


그림 7 초기축력을 고려한 비선형 초기평형상태 해석 알고리즘

2.7 NL-L 해석과 NL-NL 해석

엄밀한 지진응답해석을 수행하기 위해서는 비선형 동적해석을 수행해야 하지만 시간의 제약으로 선형해석을 수행할 경우도 있다. 앞에서 언급한 바와 같이 어느 경우라도 일단 정적 비선형해석에 의해 초기평형상태를 구현함으로써 사하중에 의한 비선형효과를 제거한 뒤에 동적해석을 수행해야 한다. 이를 그림 8에 나타내었다.

그림 8에서 나타낸 바와 같이 초기평형상태에서의 접선강도를 사용해 선형 동적해석을 수행할 경우 비선형 동적해석결과와는 차이가 발생하지만 그 오차를 어느 정도 줄일 수 있다. 이는 사하중까지 포함하여 선형동적해석을 하는 경우와는 개념이 다른 것이다.

본 연구에서는 비선형 정적해석 후 선형 동적해석을 수행한 경우를 NL-L, 비선형 정적해석 후 비선형 동적해석을 수행한 경우를 NL-NL이라 정의하였다.

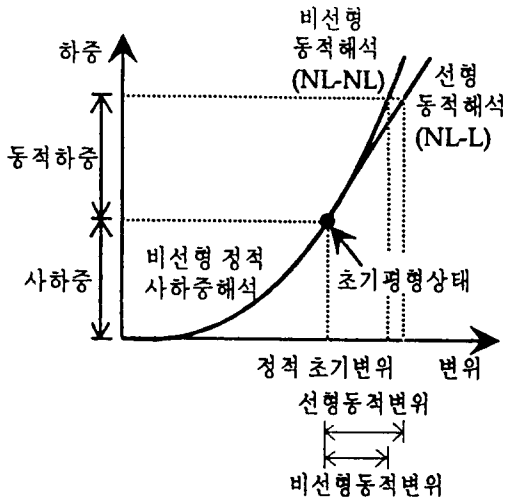


그림 8 NL-L 및 NL-NL 해석

3. 비선형 지진응답

지점운동을 직접 받는지의 여부에 따라 전체 구조물의 자유도를 크게 두부분으로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FR} \\ \mathbf{M}_{RF} & \mathbf{M}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_F \\ \ddot{\mathbf{U}}_R \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{FF} & \mathbf{C}_{FR} \\ \mathbf{C}_{RF} & \mathbf{C}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_F \\ \dot{\mathbf{U}}_R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_F(\mathbf{U}_F) + \mathbf{F}_F(\mathbf{U}_R) \\ \mathbf{F}_R(\mathbf{U}_F) + \mathbf{F}_R(\mathbf{U}_R) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_F \\ \mathbf{P}_R \end{Bmatrix} \quad (11)$$

여기서 첨자 R은 지점운동이 직접 가해지는 자유도 (즉, 지점운동에 구속된 자유도, 이하 가진자유도라 칭함)를 의미하고 첨자 F는 지점운동이 입력되는 지점부를 제외한 구조물의 자유도(이하 비가진자유도라 칭함)를 의미한다.

또한 $[\mathbf{M}]$ 과 $[\mathbf{C}]$ 는 각각 구조물의 질량 및 감쇠행렬이고 $\{\mathbf{F}\}$ 는 부재내력벡터, $\{\mathbf{P}\}$ 는 외부하중에 의한 외력벡터이다.

식 (11)을 비가진자유도와 가진자유도로 분리하여 비가진자유도에 대한 식으로만 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{FF} \ddot{\mathbf{U}}_F + \mathbf{C}_{FF} \dot{\mathbf{U}}_F + \mathbf{F}_F(\mathbf{U}_F) = \\ - \mathbf{M}_{FR} \ddot{\mathbf{U}}_R - \mathbf{C}_{FR} \dot{\mathbf{U}}_R - \mathbf{F}_F(\mathbf{U}_R) + \mathbf{P}_F \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 부재내력벡터 $\mathbf{F}_F(\mathbf{U}_F)$ 와 $\mathbf{F}_F(\mathbf{U}_R)$ 는

선형구조물일경우 각각 $\mathbf{K}_{FF}\mathbf{U}_F$ 와 $\mathbf{K}_{FR}\mathbf{U}_R$ 로 표현될 수 있지만 비선형구조물에 대해서는 강도행렬 자체가 변위의 함수이므로 이를 분리하여 나타낼 수 없다.

식 (12)로부터 알 수 있듯이 평형상태에서 지점이 가진되어 변위가 발생하는 경우 가진자유도의 변위가 이와 연결된 비가진자유도에 영향을 미치게 된다. 이를 하중으로 표현한 항이 부재내력벡터 중의 $-\mathbf{M}_{FR} \ddot{\mathbf{U}}_R - \mathbf{C}_{FR} \dot{\mathbf{U}}_R - \mathbf{F}_F(\mathbf{U}_R)$ 라 할 수 있다.

일반적으로 구조물의 감쇠효과가 지점운동에 미치는 영향은 관성력에 의한 효과보다 매우 작으므로⁽⁷⁾ 이를 무시하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{FF} \ddot{\mathbf{U}}_F + \mathbf{C}_{FF} \dot{\mathbf{U}}_F + \mathbf{F}_F(\mathbf{U}_F) = \\ - \mathbf{M}_{FR} \ddot{\mathbf{U}}_R - \mathbf{F}_F(\mathbf{U}_R) + \mathbf{P}_F \end{aligned} \quad (13)$$

따라서 시간 t 에서의 평형이 이루어졌다고 할 때, 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{M}_{FF} {}^t\ddot{\mathbf{U}}_F + {}^t\mathbf{C}_{FF} {}^t\dot{\mathbf{U}}_F + \mathbf{F}_F({}^t\mathbf{U}_F) \\ = - {}^t\mathbf{M}_{FR} {}^t\ddot{\mathbf{U}}_R - \mathbf{F}_F({}^t\mathbf{U}_R) + {}^t\mathbf{P}_F \end{aligned} \quad (14)$$

시간 t 에서의 평형상태를 바탕으로 시간 $t+\Delta t$ 에서의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{FF} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}_F + {}^t\mathbf{C}_{FF} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_F + \mathbf{F}_F({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}_F) \\ = - {}^t\mathbf{M}_{FR} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}_R - \mathbf{F}_F({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}_R) + {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}_F \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 부재내력벡터는 시간 t 에서의 부재의 접선 강도행렬과 증분변위를 사용하여 다음과 같이 선형으로 근사할 수 있다.

$$\mathbf{F}_F({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}_F) = \mathbf{F}_F({}^t\mathbf{U}_F) + {}^t\mathbf{K}_{FF}\Delta\mathbf{U}_F \quad (16)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}_F^{(1)} = {}^t\mathbf{U}_F + \Delta\mathbf{U}_F^{(1)} \quad (17)$$

여기서 ${}^t\mathbf{K}_{FF}$ 는 시간 t 에서의 비가진자유도에 대한 접선강도행렬이다.

Newmark법에 따라 시간 $t+\Delta t$ 에서의 변위와 속도는 시간 t 에서의 변위, 속도 및 가속도로 표현이 가능하다.⁽⁸⁾

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}_F = {}^t \mathbf{U}_F + \Delta t {}^t \dot{\mathbf{U}}_F + \frac{\Delta t^2}{2} {}^t \ddot{\mathbf{U}}_F + \alpha \Delta t^2 ({}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}_F - {}^t \ddot{\mathbf{U}}_F) \quad (18)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_F = {}^t \dot{\mathbf{U}}_F + \Delta t {}^t \ddot{\mathbf{U}}_F + \delta \Delta t ({}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}_F - {}^t \ddot{\mathbf{U}}_F) \quad (19)$$

식 (17), 식 (18)과 식 (19)로부터 시간 $t+\Delta t$ 에서의 가속도와 속도벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}_F = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \Delta \mathbf{U}_F^{(1)} - \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t \dot{\mathbf{U}}_F + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) {}^t \ddot{\mathbf{U}}_F \quad (20)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_F = {}^t \dot{\mathbf{U}}_F + \Delta t {}^t \ddot{\mathbf{U}}_F + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \Delta \mathbf{U}_F^{(1)} - \frac{\delta}{\alpha} {}^t \dot{\mathbf{U}}_F - \frac{\delta \Delta t}{2\alpha} {}^t \ddot{\mathbf{U}}_F \quad (21)$$

결과적으로 시간 $t+\Delta t$ 에서의 동적 운동방정식은 다음과 같이 유사 정적 평형방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}_{\text{eff}} \Delta \mathbf{U}_F^{(1)} = \mathbf{R}_{\text{eff}} \quad (22)$$

여기서

$$\mathbf{K}_{\text{eff}} = {}^t \mathbf{K}_{\text{FF}} + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^t \mathbf{M}_{\text{FF}} + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^t \mathbf{C}_{\text{FF}} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{eff}} = & - {}^t \mathbf{M}_{\text{FR}} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}_R \\ & - \mathbf{F}_F({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}_R) - \mathbf{F}_F({}^t \mathbf{U}_F) + {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_F \\ & + {}^t \mathbf{M}_{\text{FF}} \left\{ \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t \dot{\mathbf{U}}_F + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) {}^t \ddot{\mathbf{U}}_F \right\} \\ & + {}^t \mathbf{C}_{\text{FF}} \left\{ \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) {}^t \dot{\mathbf{U}}_F + \Delta t \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) {}^t \ddot{\mathbf{U}}_F \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

비선형구조물의 평형상태를 구하기 위해서는 일반적으로 다음과 같은 반복계산과정이 필요하며 식 (25)에서 우변항은 각 반복단계에서의 불평형하중을 의미한다.

$$\begin{aligned} {}^i \mathbf{K}_{\text{FF}} \Delta \mathbf{U}_F^{(i+1)} = & - {}^{i+\Delta} \mathbf{M}_{\text{FR}} {}^{i+\Delta} \ddot{\mathbf{U}}_R^{(i)} \\ & - \mathbf{F}_F({}^{i+\Delta} \mathbf{U}_R^{(i)}) - \mathbf{F}_F({}^{i+\Delta} \mathbf{U}_F^{(i)}) \\ & + {}^{i+\Delta} \mathbf{P}_F - {}^{i+\Delta} \mathbf{M}_{\text{FF}} {}^{i+\Delta} \ddot{\mathbf{U}}_F^{(i)} \\ & - {}^{i+\Delta} \mathbf{C}_{\text{FF}} {}^{i+\Delta} \dot{\mathbf{U}}_F^{(i)} \end{aligned} \quad (25)$$

j 번째의 반복계산에 의해 일단 불평형하중이 허용값 이내로 수렴하게 되면 다음과 같이 시간 $t+\Delta t$

에서의 총 증분변위를 계산할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{U}_F = \Delta \mathbf{U}_F^{(1)} + \Delta \mathbf{U}_F^{(2)} + \dots + \Delta \mathbf{U}_F^{(j)} \quad (26)$$

따라서 시간 $t+\Delta t$ 에서의 총변위는 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}_F = {}^t \mathbf{U}_F + \Delta \mathbf{U}_F \quad (27)$$

4. 해석 예

4.1 비선형 지점운동해석 알고리즘의 검증

본 연구에서 제시한 비선형 지점운동해석 알고리즘을 검증하기 위하여 간단한 뼈대-케이블 구조물에 대한 지점운동 해석을 수행하였다. 대상 구조물은 그림 9에 나타난 바와 같이 켈틸레버보와 이를 지지하는 경사 케이블로 구성되어 있다. 두 지점에 위상차를 갖지 않는 정현파의 지점운동을 가하여 비선형 해석을 수행하고 이를 케이블을 트러스 요소를 사용하여 모델링할 수 있는 범용 비선형해석 프로그램인 ADINA의 결과와 비교하였다.

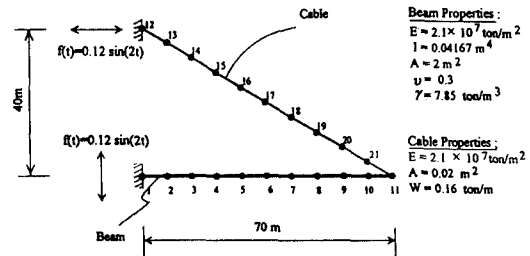


그림 9 뼈대-케이블 구조물

비선형 동적해석을 수행하기 전에 먼저 초기평형상태를 적절히 구현해야 하며 본 해석의 경우 초기 평형상태는 사하중에 의한 켈틸레버의 선단변위(절점 11)가 0이 되도록 케이블의 장력을 조정하였다.

참고로 초기평형상태의 접선강도를 사용하여 고유진동해석을 수행한 결과를 표 1에 수록하였다.

표 1 뼈대-케이블 구조물의 고유진동수 (Hz)

모드	본 연구	ADINA
1	0.281	0.281
2	1.051	1.051
3	1.381	1.381
4	2.090	2.091
5	2.775	2.776

구조물의 감쇠는, 이를 무시한 경우와 한계감쇠의 2%일 때의 두 경우에 대해 각각 해석을 수행하였고 결과를 그림 10에 수록하였다. 해석결과로부터 본 연구에서 적용한 비선형 지점운동 해석 알고리즘이 만족할 만한 결과를 줄 수 있었다.

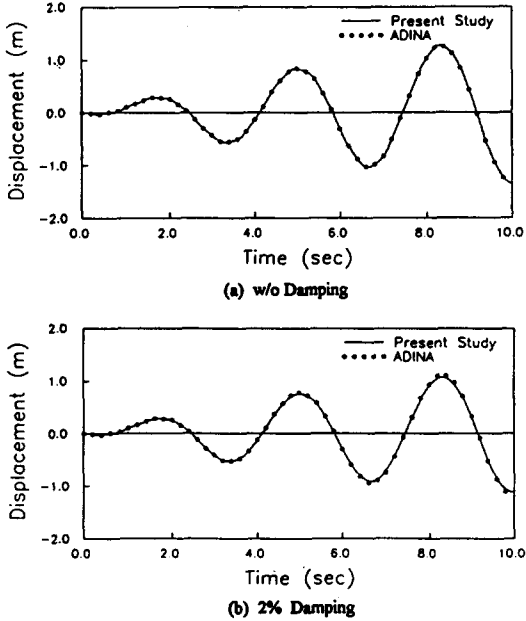


그림 10 뼈대-케이블 구조물의 비선형 지점운동 응답

4.2 입력 지진

본 해석에서는 입력지진으로 1979 El-Centro 지진기록 중 가속도가 가장 크다고 생각되는 Array No. 5를 사용하였다. 그림 11과 그림 12에는 입력 지진의 3직각방향 가속도와 변위이력을 나타냈다.

이 지진은 크기는 $6.6(M_L)$ 로서 수정머캘리 진도(MM) VIII에 해당된다.

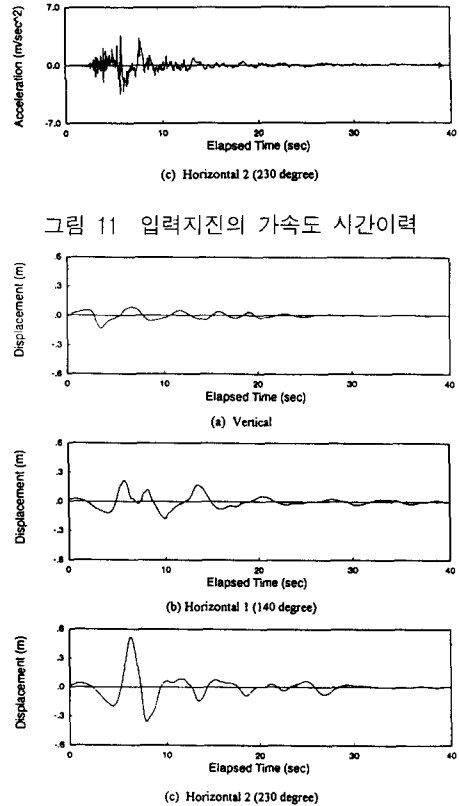
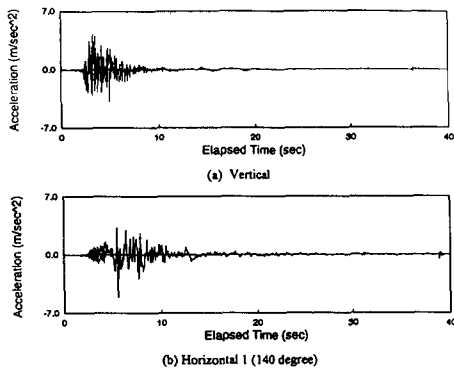


그림 11 입력지진의 가속도 시간이력

그림 12 입력지진의 변위 시간이력

4.3 현수교의 NL-L 및 NL-NL 지점운동 해석

앞서 언급한 바와 같이 초기평형상태에 대한 비선형해석을 수행한 뒤 이에 대한 접선강도를 구하여 선형동적해석을 수행한 경우를 NL-L해석이라고 하고 비선형동적해석을 수행한 경우를 NL-NL해석이라 한다. 본 대상교량에 대하여 각각 NL-L해석과 NL-NL해석을 수행하여 그 결과를 비교함으로써 동적비선형효과를 파악하고자 하였다.

대상교량은 주케이블이 공간새그를 갖는 자정식 현수교로서 그림 13과 표 2에 체원과 물성값을 나타내었다.⁽¹³⁾

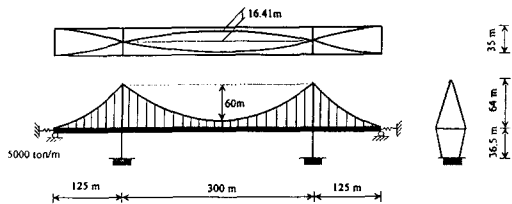


그림 13 해석 대상교량

표 2 해석 대상 교량의 제원 및 물성값 (/Br)

보강형 단위 길이당 중량 (ton/m)	45.38
케이블 단위길이당 중량 (ton/m)	3.03
보강형의 탄성계수 (ton/m ²)	2.1 × 10 ⁷
보강형 단면2차모멘트(I33)(m ⁴)	24.565
보강형 단면2차모멘트(I22)(m ⁴)	217.386
보강형의 비틀상수 (m ⁴)	23.0
초기수평장력 (ton)	9068
주케이블 단면적 (m ²)	0.2578
주케이블의 탄성계수 (ton/m ²)	2.0 × 10 ⁷
중앙경간장 (m)	300
측경간장 (m)	125
중앙경간 새그 (m)	60(X-Z) 16.41(X-Y)
측경간 새그 (m)	10.42(X-Z) 2.85(X-Y)
바닥판으로부터의 주탑 높이 (m)	64
보강형의 높이 (m)	36.5

X-Z : 수직면, X-Y : 수평면

지진입력은 3직각방향을 동시에 가진하였다. 그림 14와 그림 15에는 여러 응답성분 중 주경간의 변위성분과 주케이블의 장력에 대한 해석결과를 수록하였다. 해석결과로부터 알 수 있듯이 본 대상교량과 같이 지간길이가 비교적 작은 자정식 현수교에서는 지진에 의한 동적 비선형성이 거의 영향을 미치지 않음을 알 수 있었다.

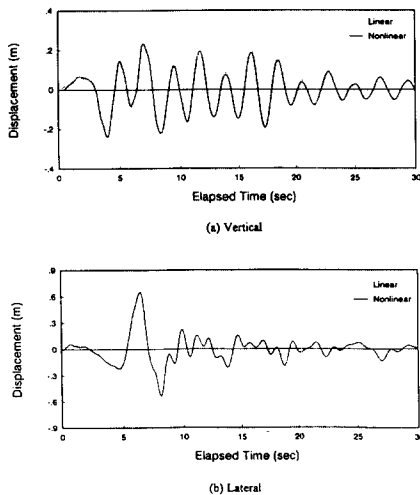


그림 14 전지점 동시가진에 의한 주경간 중앙부의 보강형 변위

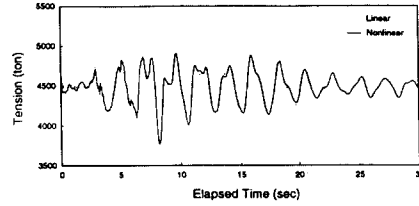


그림 15 전지점 동시가진에 의한 주케이블의 수평 장력 변화(한쪽 케이블)

4.4 다중지지 효과에 대한 분석

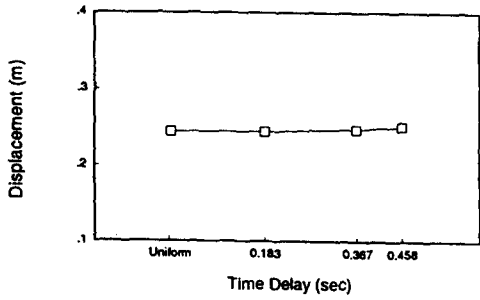
교량의 지점간 거리가 비교적 길 경우 각 지점간에는 서로 상이한 지진이 입력될 수 있으며 따라서 이와 같은 다중지지 효과를 사전에 파악해 두는 것이 필요하다. 가장 이상적인 해석은 각 지점에서 동시에 계측된 지진이력을 사용하는 것이겠지만 이러한 자료가 없으므로 본 해석에서는 지진의 형상이 변화하지 않은 채 한 쪽 지점에서 다른 쪽 지점으로 이동해 간다고 가정하여 해석을 수행하였다.

전단파속도를 1200m/sec, 1500m/sec, 3000m/sec 및 무한대로 정의하고 지점간 거리를 전단파속도로 나누어 그 값만큼 시간지연이 발생하도록 지진을 입력하였다.

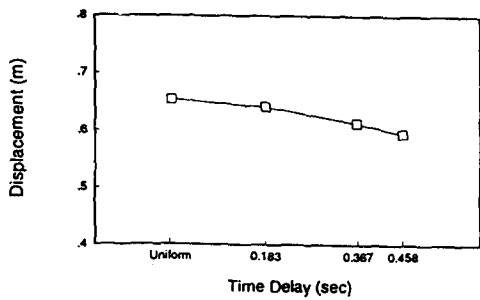
전단파속도에 해당되는 시간지연은 각각 0.458초(1200m/sec), 0.367초(1500m/sec), 0.183초(3000m/sec) 및 0초(무한대, 즉 시간지연 없음)이며 이는 교량 좌측단 교각으로부터 우측단 교각까지 전단파가 전달되는 시간을 의미한다.

4가지 전단파속도에 대해 해석을 수행한 결과 중 일부를 그림 16에서부터 그림 21에 나타냈다. 대부분의 응답에 대해서는 시간지연효과를 고려한 경우가 고려하지 않은 경우보다 큰 값을 주지는 않음을 알 수 있었다.

이는 고려대상 교량이 현수교 중에서는 비교적 단기간의 교량이며 또한 고려한 전단파속도가 암반에 대한 값이라 상당히 빠르기 때문이라고 생각된다. 그러나 그 중에서도 보강형에 작용하는 축력만큼은 시간지연효과를 고려함으로 인해 응답이 확대됨을 알 수 있었다.



(a) Vertical



(b) Lateral

그림 16 주경간 중앙부의 보강형 변위

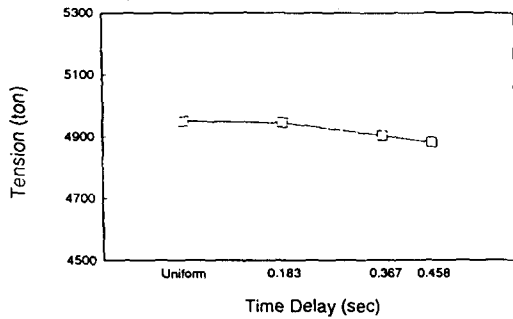


그림 17 주케이블의 수평장력 변화(한쪽 케이블)

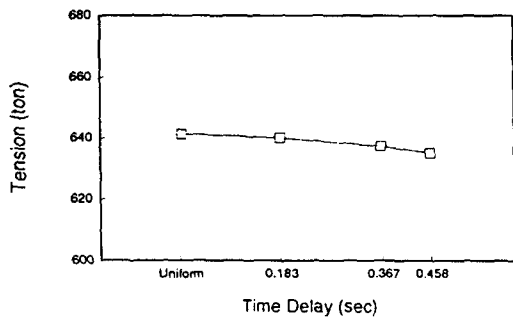


그림 18 주경간 중앙부의 행어장력 변화(한쪽 케이블)

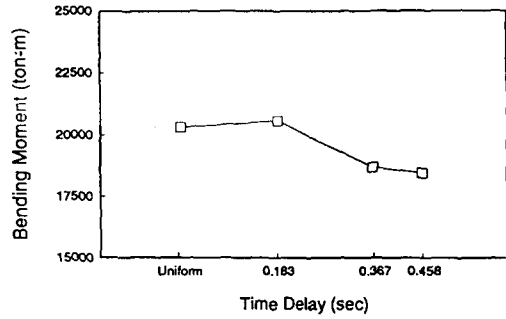


그림 19 주경간 중앙부 보강형의 휨모멘트 변화

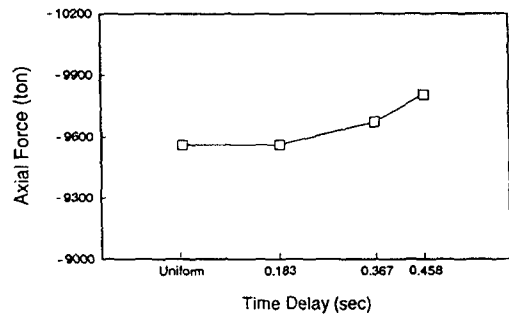
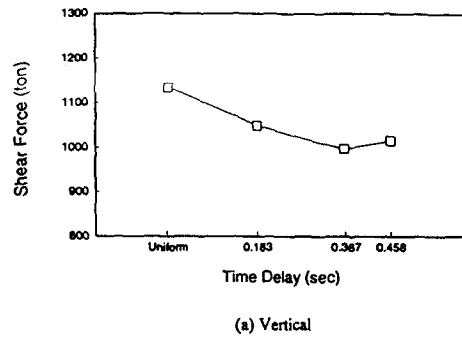
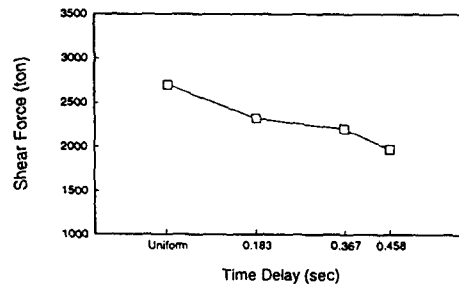


그림 20 주경간 중앙부 보강형의 축력 변화



(a) Vertical



(b) Lateral

그림 21 주경간 좌측단 보강형의 전단력 변화

5. 결 론

본 연구에서 제시된 비선형 지진해석 알고리즘에 따라 하나의 자정식 현수교 모델에 대한 비선형 지진응답 해석을 수행하여 보았다. 본 연구의 대상이 되었던 현수교는 주경간 길이가 300m에 불과한 비교적 단기간의 현수교로서 교량자체의 비선형 거동 특성이 크지 않았던 이유로 동적비선형 지진응답이 선형 지진응답과 크게 다르게 나타나지 않음을 알 수 있었다. 따라서 비선형동적해석에 소요되는 시간을 감안한다면 본 교량의 경우에는 모드중첩 등에 의한 선형동적해석을 수행하는 것도 방법일 수 있을 것이다. 또한 지진파의 형상 변화 없이 한쪽 지점에서 다른 쪽 지점으로 이동하는 지진파에 의해 지점마다 상이한 지진이 입력되는 경우 본 대상교량의 지간길이가 비교적 짧고 고려한 전단파 속도가 암반층에 대한 값으로 비교적 빠른 속도이어서 그 영향이 그다지 크지 않음을 알 수 있었다.

그러나 보강형의 축력에 대해서는 이와 같은 다중지지 효과를 고려한 경우의 응답이 증가하는 현상을 보이므로 전지점이 동시에 가진되는 경우가 반드시 안전측의 결과를 주지는 않음을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Abdel-Ghaffar, A. M., and Stringfellow, R. G., "Response of Suspension Bridges to Travelling Earthquake Excitations: Part I. Vertical Response," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 3, No. 2, 1984, pp. 62-72.
2. Abdel-Ghaffar, A. M., and Stringfellow, R. G., "Response of Suspension Bridges to Travelling Earthquake Excitations: Part II. Lateral Response," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 3, No. 2, 1984, pp. 73-81.
3. 김철영, 장승필, "비대칭단면 주형을 갖는 3차원 사장교의 고유진동해석", 대한토목학회 논문집, 제11권, 제2호, 1991, pp. 15-26.
4. 김철영, 장승필, "주형단면의 비대칭성을 고려한 3차원 사장교의 지진해석", 대한토목학회지, 제12권, 제2호, 1992, pp. 11-20.
5. Fleming, J. F., "Nonlinear Static Analysis of Cable-Stayed Bridge Structure," *Computer & Structures*, Vol. 10, 1979, pp. 621-635.
6. 김호경, "케이블지교량의 모델링 및 정·동적 비선형 해석에 대한 고찰", 한국강구조학회지, 제8권, 제2호, 1996, pp.35-40.
7. 현대건설 기술연구소 및 서울대학교 공학연구소, "현수교의 시공단계 해석시스템 개발", 최종보고서, 현대건설, 1994.
8. Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.
9. 김호경, "현수교의 정적 비선형 해석 및 초기평형상태의 결정", 한국강구조학회 논문집, 제5권 제2호, 1993, pp. 177-186.
10. Chang, S.P., and Park, Y-Y, "Dynamic Analysis of the Cable-Suspended Roof System by Using the Three-Dimensional Cable Element," *The Second KOREA-JAPAN Joint Seminar on Steel Bridges*, Tokyo, Japan, 1992, pp. 203-216.
11. 장승필, 박정일, "비선형 케이블 유한요소에 관한 연구", 한국해안·해양공학회 논문집, 제1권, 제1호, 1989, pp. 93-101.
12. 김호경, 장승필, "초기축력을 도입한 자정식 현수교의 초기형상 결정", 대한토목학회지, 제7권, 제 I-2호, 1997, pp. 197-205.
13. 수도권 신국제공항 연육교 실시설계 구조계산서, 교통부, 1993.

부록 1 뼈대요소의 강도행렬

부록 1.1 부재 탄성강도행렬 $[K_E]$

a					$-a$				
b_1				b_2	$-b_1$				b_2
c_1			$-c_2$		$-c_1$			$-c_2$	
d_1				$-d_2$	$-d_1$				$-d_2$
c_3					c_2			c_4	
b_3					$-b_2$				b_4
d_3					d_2				d_4
					a				
					b_1				$-b_2$
					c_1			c_2	
Symmetric					d_1				d_2
								c_3	
									b_3
									d_3

$$a = \frac{EA}{L}$$

$$b_1 = \frac{12EI_3}{L^3} \quad b_2 = \frac{6EI_3}{L^2} \quad b_3 = \frac{4EI_3}{L} \quad b_4 = \frac{2EI_3}{L}$$

$$c_1 = \frac{12EI_2}{L^3} \quad c_2 = \frac{6EI_2}{L^2} \quad c_3 = \frac{4EI_2}{L} \quad c_4 = \frac{2EI_2}{L}$$

$$d_1 = \frac{12EL_w}{L^3} + \frac{36GJ}{30L} \quad d_2 = \frac{6EL_w}{L^2} + \frac{3GJ}{30}$$

$$d_3 = \frac{4EL_w}{L} + \frac{4GJ}{30} \quad d_4 = \frac{2EL_w}{L} - \frac{GJ}{30}$$

부록 1.2 부재 기하강도행렬 [K_G]

	a	e_1	b	$-i_1$	$-a$	$-e_1$	b'	$-i'_1$
	a	e_2	$-b$	$-i_2$	$-a$	$-e_2$	$-b'$	$-i'_2$
	m	$-i_2$	i_1	$-n$	$-e_1$	$-e_2$	$-m$	$-i'_2$
	c	i_1	$-n$	$-i_2$	$-e_1$	$-e_2$	$-m$	$-i'_2$
	c	h_2	$-b$	$-i_1$	$-b$	$-i_1$	d	t_1
	o	i_1	i'_2	n	$-t_2$	t_1	p	
					a	e_1	$-b'$	i'_1
					a	e_2	b'	i'_2
	Symmetric	m	i'_2	$-i'_1$	m	i'_2	$-i'_1$	n'
						c'		h'_2
						c'		$-h'_1$
								o'

$$a = \frac{3}{5L} (-F_1^i + F_1^j)$$

$$b = \frac{1}{10} F_1^j$$

$$c = \frac{L}{30} (-3F_1^i + F_1^j)$$

$$d = -\frac{L}{60} (-F_1^i + F_1^j)$$

$$e_1 = -\frac{3}{5L} [-M_2^i + M_2^j - \bar{x}_3(F_1^i + F_1^j)]$$

$$h_1 = -\frac{L}{30} [-3M_2^i + M_2^j - \bar{x}_3(-3F_1^i + F_1^j)]$$

$$h_1' = -\frac{L}{30} [-M_2^i + 3M_2^j - \bar{x}_3(-F_1^i + 3F_1^j)]$$

$$i_1 = -\frac{1}{10} (M_2^j - \bar{x}_3 F_1^j)$$

$$i_1' = -\frac{1}{10} (-M_2^i + \bar{x}_3 F_1^i)$$

$$t_1 = -\frac{L}{60} [-M_2^i + M_2^j - \bar{x}_3(-F_1^i + F_1^j)]$$

$$m = \frac{3}{5L} (-M_2^i + M_2^j)$$

$$b' = -\frac{1}{10} F_1^j$$

$$c' = \frac{L}{30} (-F_1^i + 3F_1^j)$$

$$e_2 = -\frac{3}{5L} [M_3^i + M_3^j - \bar{x}_2(-F_1^i + F_1^j)]$$

$$h_2 = \frac{L}{30} [3M_3^i - M_3^j - \bar{x}_2(-3F_1^i + F_1^j)]$$

$$h_2' = \frac{L}{30} [M_3^i - 3M_3^j - \bar{x}_2(-F_1^i + 3F_1^j)]$$

$$i_2 = \frac{1}{10} (-M_3^i + \bar{x}_2 F_1^j)$$

$$i_2' = \frac{1}{10} (M_3^i + \bar{x}_2 F_1^i)$$

$$t_2 = \frac{L}{60} [M_3^i - M_3^j - \bar{x}_2(-F_1^i + F_1^j)]$$

$$n = -\frac{1}{10} M_p^i$$

$$n' = -\frac{1}{10} M_p^i$$

$$o = \frac{L}{30} (-3M_p^i + M_p^j)$$

$$o' = \frac{L}{30} (-M_p^i + 3M_p^j)$$

$$P = -\frac{L}{60} (-M_p^i + M_p^j)$$

$$M_p^i = Q_1 F_1^i + Q_2 M_2^i + Q_3 M_3^i + Q_4 M_w^i$$

$$M_p^j = Q_1 F_1^j + Q_2 M_2^j + Q_3 M_3^j + Q_4 M_w^j$$

where

$$Q_1 = \frac{I_2 + I_3}{A} + \overline{x_2^2} + \overline{x_3^2}$$

$$Q_2 = \frac{1}{I_2} \int_A x_3 (x_3^2 + x_2^2) dA - 2\overline{x_3}$$

$$Q_3 = -\frac{1}{I_3} \int_A x_2 (x_2^2 + x_3^2) dA + 2\overline{x_2}$$

$$Q_4 = \frac{1}{I_w} \int_A \phi (x_2^2 + x_3^2) dA$$

ϕ 튜브 함수