

대변형 탄소성유한요소법에 의한 재료의 연화현상을 고려한 파괴거동해석

Finite Element Method for Failure Analysis Considering Large Deformation and Strain Softening

김 영 민*
Kim, Young - Min

Abstract

Strain softening is observed for geomaterials such as rocks when they are sheared. The proper computational modelling for strain softening is very important because this behavior is closely related to failure in geotechnical problems. In this paper, we have investigated the proper FEM techniques for modelling strain softening in order to simulate failure behavior numerically. In showing numerical examples, the effects of element shape, mesh pattern and of imperfection and the difference between small and large deformation theories, of displacement control and pressure control after peak have been discussed.

요 지

암석과 같은 지반재료를 전단하게 되면 응력-변형률관계에서 변형률연화현상이 관찰되어진다. 변형률연화현상은 지반공학문제에서 논하고 있는 파괴거동현상과 밀접한 관계가 있으므로 그 거동을 묘사할 수 있는 수치해석방법의 확립이 중요하다. 본 논문에서는 대변형 탄소성유한요소법을 이용하여 지반재료의 파괴거동을 묘사하기 위해서 재료의 연화성질을 도입하여 해석하는 경우, 고려해야 할 요소의 선택, 배치, 초기부정의 영향, 미소변형과 대변형해석의 차이, 최고점 하중후의 하중제어를 하기 위한 변위제어 및 압력제어의 차이에 대하여 검토하였다.

Keywords : Strain softening, FEM, large deformation theory, pressure control

1. 서 론

암석, 점토, 콘크리트 등의 재료가 하중을 받으면, 소성변형에 따른 응력-변형률 관계에서 최고점에 달한후 재료의 일부영역에 변형이 집

중되어 재료의 강도가 저하된다(Cividini 등, 1992, Tatsuoka 등 3인, 1990). 암석의 파괴과정을 살펴보면, 독립크랙들이 발생되어 파괴패턴이 형성되고 파괴가 진전되어 간다. Bazant (1986)의 연구에서는 이와같은 크랙들이 무작

* 정희원, 전주대학교 공과대학 토목환경공학과 전임강사

위적으로 발생되어, 파괴과정의 암석은 연속체로서 취급할 필요가 있다고 밝혔다. 이와같은 재료의 구성식은 변형이 어느정도 진행되면 강도가 저하되는 재료의 변형률연화(Strain softening)가정의 도입이 필요하게 된다. 이와같은 변형률연화성질이 재료의 본질인가하는 의문에는 토론의 여지가 있으나(Reed 등, 1984), 진행하는 마이크로 크랙의 거시적 효과는 변형률연화를 일으킨다. 따라서 암석과 같은 지반재료의 완전한 응력-변형률관계를 구하기 위해서는 재료의 변형률연화성질의 도입이 필요하다.

지반공학분야에서 이전부터 변형률연화현상에 따른 사면의 진행성파괴, 기초지지력 문제 등 지반파괴의 진행성에 대한 중요성이 인식되고 있다. 본 논문에서는 지반재료의 파괴시 나타나는 변형률연화현상에 대해, 지반재료의 파괴변형거동의 진과정을 묘사하기 위해서 탄소성이론을 이용한 유한요소해석방법에 대하여 검토한다. 일련의 수치실험을 행하여 유한요소법을 이용한 파괴과정 수치해석에 있어서 주의해야할 요소의 선택, 요소의 배치, 초기부정의 영향, 미소변형이론과 대변형이론의 차이를 검토하고, 또한 응력-변형률관계에서 최고하중점후의 하중을 제어하기 위한 압력제어(pressure control)방법을 도입하고, 변위제어(displacement control)에 의한 파괴거동결과와의 차이에 대하여 비교, 검토한다.

2. 대변형 유한요소법

대변형, 대변형률을 고려한 파괴거동을 수치시뮬레이션하기 위해서 기준배치를 시시각각 갱신하여 지배방정식의 정식화를 행하는 Updated Lagrange법으로 유한요소법을 기술한다. 유한변형에 대한 평형방정식을 공칭응력속도(nominal stress rate) $\dot{\pi}_{ij}$ 를 이용하여 시각 t에 대해 속도형으로 나타내면,

$$\pi_{i,j} + \rho G_i = 0 \quad (1)$$

여기서 G_i 는 시각 t에 대하여 물체에 작용하

는 단위질량당 물체력이다. 다음으로 시각 t에 대한 탄소성구성식을 Von Mises항복조건식으로 가정하여 표현하면,

$$S_{ij} = D_{ijkl}^{ep} \epsilon_{kl} \quad (2)$$

$$D_{ijkl}^{ep} = 2G \left[\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} - \alpha \frac{9G \sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{2\sigma^2 (H' + 3G)} \right]$$

여기서, G는 전단탄성계수, ν 는 포아손비, $H' = dH/d\epsilon$, α 는 탄성일때 1, 그 이외 0이며, $\sigma =$

$\sqrt{2/3 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$, S는 Kirchhoff응력의 Jaumann속도이다.

평형방정식 (1)과 경계조건을 고려하여 Gauss의 발산정리를 이용하면, 시각t에 대한 배치를 기준으로 속도형가상일원리가 얻어진다(Tomita, 1990).

$$\int_V \pi_{ij} \delta v_{ij} dV = \int_{S_t} P_i \delta v_i + \int_V \rho G_i \delta v_i dV \quad (3)$$

식(3)의 응력은 공칭응력속도로 표시되어 있어, 구성식(2)에 그대로 대입불가능하기 때문에 아래의 관계를 이용하여

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= \sigma_{ij} + \sigma_{ji} v_{i,l} - \sigma_{il} v_{j,l} \\ &= S_{ij} - F_{ijkl} \epsilon_{kl} + \sigma_{mj} v_{i,m} \\ &= (D_{ijkl}^{ep} - F_{ijkl}) \epsilon_{kl} + \sigma_{mj} v_{i,m} \end{aligned} \quad (4)$$

가상일의 원리를 매트릭스형으로 다시 표현하면 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_V [\delta \{\epsilon\}]^T ([D^{ep}] - [F]) \{\epsilon\} + \delta \{q\} [Q] \{q\} dV \\ = \int_{S_t} \delta \{v\}^T \{P\} dS + \int_V \delta \{v\}^T \{G\} dV \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,

$$[F] = \begin{bmatrix} 2\sigma_x & 0 & \sigma_{xy} & \\ & 2\sigma_y & \sigma_x & \\ \text{Sym} & & 1/2(\sigma_x + \sigma_y) & \\ \sigma_x & 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ & \sigma_y & 0 & \sigma_{xy} \\ & & \sigma_y & 0 \\ \text{Sym} & & & \sigma_x \end{bmatrix}$$

식(5)가 미소변형 탄소성유한요소법과 다른 것은 강성매트릭스중에 구성관계식 $[D^{ep}]$ 뿐만

아니라 기하학적 비선형에 기인하는 [F], [Q] 두개의 매트릭스가 부가되어 있는 점이다.

3. 최고하중점 이후의 하중제어를 위한 수치해석방법

변형률연화현상과 같이 최고점하중이 존재하는 문제를 수치해석하는 경우는 일반적으로 최고점하중부근에서 하중을 제어하는 것이 곤란하여 수치계산에 불안정이 발생한다. 이러한 경우, 변위에 의한 제어가 가능하다면 수치적으로 불안정을 발생시키는 일없이 최고점하중을 통과하여 제어할 수 있다. 그러나 변위제어에 의한 방법은 최고점후 변형을 일정하게 지정함으로써 파괴거동시 자유도를 구속하는 결과를 낳는다. 본 논문에서는 변위제어에 의한 파괴변형거동과 비교하기 위해서 Tvergaard (1976)가 기하학적 비선형문제에 사용한 최고점후의 압력제어방법에 대하여 검토한다.

변형이 압력에 의해 제어되어지는 경우 전체 강성방정식은 일반적으로 다음과 같은 매트릭스로 표시된다.

$$K_{ij}d_j = pf_i \quad (i, j=1 \sim n) \quad (6)$$

여기서 d_j 는 절점변위속도, p 는 압력속도, pf_i 는 절점력속도를 표시한다. n 개의 절점변위속도중 사전에 알고 있는 변위속도의 방향을 $(m-1)$ 개를 지정하여 그것을 $\delta_j (j=1 \sim (m-1))$ 로 한다. $(m-1)$ 개의 δ_j 중에서 임의의 δ_k 를 단위변위로 두고, 그 이외의 δ_j 와 p 를 0으로 하여 식(6)을 풀고 그 때 얻어진 절점변위속도를 d_k 로 한다. 그것을 $k=1 \sim (m-1)$ 회 실시한다. 그 다음으로 δ_j 를 0으로 p 를 단위하중으로 두고 식(6)부터 d_m 을 구하여 중점의 원리를 사용하여 식(6)의 해를 다음과 같이 표시하는 것이 가능하다.

$$d_i = d_{ik}\delta_k \quad (i=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, m) \quad (7)$$

위 식을 가상일의 원리식(3)에 대입하면, 최종적으로 다음식이 얻어진다.

$$(d_{ik}K_{ij}d_{jl})\delta_l = pd_{if} \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

$\delta_1 \sim \delta_m$, 중에서 사전에 알고 있는 절점변위속도의 방향을 지정하여 그것을 구속하고, 나머지 m 개의 미지수를 식(8)에서 구하는 것이 가능하다. $m \geq 2$ 이상이지만 $m=2$ 로서도 정도가 좋은 해를 효율적으로 얻는 것이 가능하다.

4. 유한요소법에 의한 파괴거동해석

유한요소법에 의하여 파괴거동해석을 하는 경우 주의를 해야할 점으로 사용하는 요소의 종류가 있다. 기반재료가 파괴가 되면 체적일정의 상태에서 무한의 변형을 일으킨다. 유한요소법에서는 이러한 조건을 만족하기 위해서, 강성방정식을 풀어서 얻어지는 절점변위속도에 요소내의 체적이 일정하도록 하는 구속이 추가되어 진다. 예를들어 평면변형률문제에 있어서 3각형1차요소를 사용하는 경우 요소내의 변형률이 일정해야 하므로 절점변위속도에 대하여 하나의 요소당 1개의 구속이 가해진다. 이와같이 유한요소해석에서는 사용하는 요소의 형상과 절점수에 의존한 변형의 구속이 추가되어, 그것에 의해 절점변위속도의 자유도수는 현저히 저하되어 변형의 발생을 어렵게 만드는 록킹현상이 발생되어 양호한 결과를 얻어지지 않는다. 더욱더 탄소성유한요소해석에 의한 항복하중 계산뿐만 아니라 적절히 파괴거동을 시뮬레이션하기 위해서는 요소의 배치와 적분점의 취급, 초기부정의 위치, 대변형이론 및 압력제어 등에 대한 고려가 필요하다. 본 논문에서는 기반재료의 파괴거동을 묘사하기 위해서 재료의 선형변형률연화조건(linear strain softening)을 도입하고, 재료의 항복조건은 Von Mises조건을 이용한다. 또한 사용한 수치적분법은 소성변형후의 응력이 항복조건을 만족하도록 최소 소성변형률증분의 크기를 결정하는 mean normal법을 사용했다(Tomita, 1990).

4.1 변위제어에 의한 파괴거동해석

해석대상으로서 평면변형률조건하의 일축압

축문제에 대한 파괴과정에 대하여 검토한다. 일축압축의 대칭파괴모드를 가정하고 대칭성을 이용하여 해석대상의 1/4을 대상으로 해석을 행한다. 폭과 길이비 $H/W=2$ or 1 인 경우에 대하여 고려하며, $H/W=2$ 인 경우는 대칭파괴를 일으키기 위해 일부에 결함있는 요소를 집어넣어 해석한다. 즉 공시체의 좌측 밑 부분의 요소에 다른 요소와 다르게 0.5항복강도를 갖는 초기부정을 사용한다. 또한 공시체의 상단의 x방향의 변위는 구속하며, y방향은 압축 변위를 강제적으로 주어 해석한다(그림-1참조).

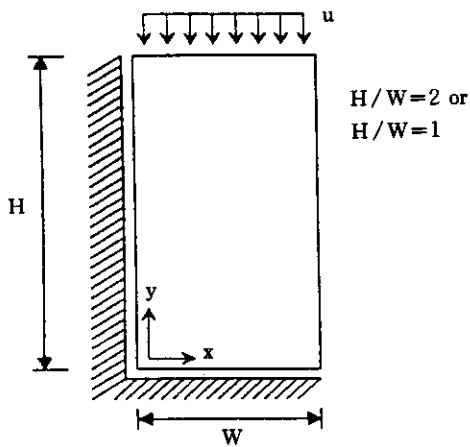


그림 1. 대칭파괴모델

4.1.1 요소의 선택과 적분점의 취급

파괴거동 수치해석시 체적일점을 나타내는 재료에 대해, 이용한 요소와 적분점이 수치해석결과에 미치는 영향을 검토하기 위해서 4절점, 8절점, 4CST (Crossed Triangle)요소(Tvergaard 등 2인, 1981)와 적분점선택을 달리한 경우(GP41, GP42, GP82, GP83, 여기서 첫번째 숫자는 절점수, 마지막 숫자는 한방향의 적분점 갯수를 의미)를 사용하여 $H/W=1$ 인 일축압축 파괴거동해석을 행하였다(공시체메쉬 10×10 ; 탄성계수 $E=30000 \text{ kgf/cm}^2$, 포아손비 $\nu=0.3$, 항복응력 $\sigma_y=36 \text{ kgf/cm}^2$, 선형연화

계수 $h=-1000 \text{ kgf/cm}^2$). 해석결과, 완전적분한 4절점요소(GP42)에서는 변형의 발생을 어렵게 만드는 록킹현상이 발생되며, 저감적분한 4절점요소(GP41)에서는 제로에너지모드가 발생하여 양호한 결과가 얻어지지 않는 것을 알 수 있다(그림-2참조). 또한 그림-3의 응력-변형률관계를 살펴보면 최고점 이후와 같은 변형률 조건하에서 다른 요소에 비하여 보다 응력이 감소한 8절점 저감요소(GP82)와 4CST요소인

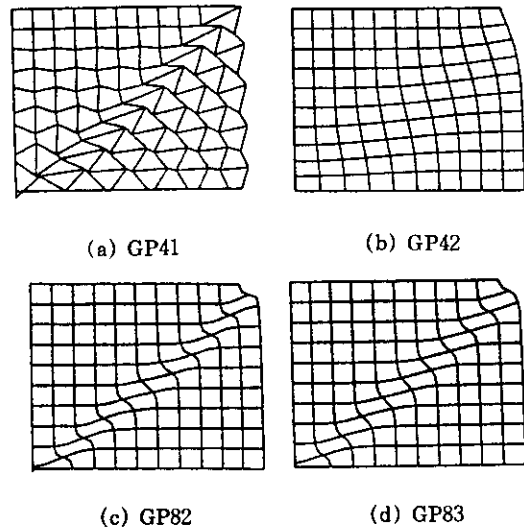


그림 2. 변형도

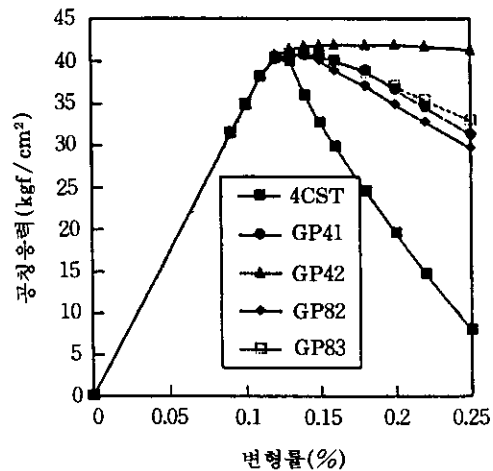


그림 3. 응력-변형률 곡선

경우가 비교적 변형률연화거동을 잘 묘사하는 것을 알 수 있다.

4.1.2 요소의 배치와 초기부정의 영향

재료의 파괴거동의 해석결과에 미치는 요소의 배치에 대하여 검토하기 위해서 그림 4와 같은 3가지 배치경우에 대하여 해석을 행하였다 (대칭파괴모드, $H/W=2$ 인 경우). 이후의 계산에 이용한 재료정수는 $E=20000\text{kgf/cm}^2$, $\nu=0.3$, $\sigma_y=100\text{kgf/cm}^2$, $h=-1000\text{kgf/cm}^2$ 이다. 계산의 결과를 보면, 예상되어진 전단방향에 맞지않는 경우에는 역방향의 파괴방향이 나타난다(그림 5(a)참조). 또한 예상된 파괴각도를 고려하여 요소를 배치한 경우에는 파괴과정은 요소의 수에 의존하게 된다(그림 5(b), (c) 참조).

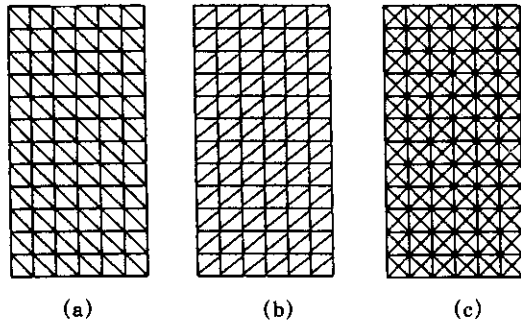


그림 4. 요소배치패턴

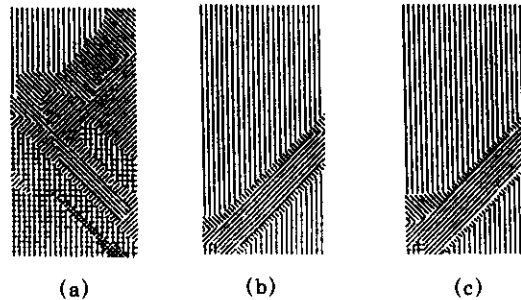


그림 5. 상당소성변형률분포도

또한, 파괴수치해석시 방아쇠역할로서 사용되는 초기부정의 영향을 분석하기 위해서 매우 적은 값의 초기부정 $0.99\sigma_y$ 를 가정하여 평면변형률문제의 전체모델을 사용하여 초기부정의 위치가 시료의 정중앙에 위치한 경우와 정중앙에서 조금 벗어난 위치에 있는 경우에 대하여 같은 조건하에서 해석을 행하였다(공시체메쉬 12×24 , 4CST요소). 그 결과 파괴모드와 응력-변형률관계가 각각 그림 6, 7에 나타내어졌다. 그 결과 초기부정위치가 정중앙에서 조금 벗어난 경우 파괴과정은 비대칭형상으로 나타내어지고, 또한 응력-변형률관계에서 비대칭파괴의 경우가 같은 변형률에서 더 응력이 감소하는 결과를 나타낸다.

4.1.3 미소, 대변형이론에 의한 영향

여기서는 미소변형이론과 대변형이론에 의한 파괴거동의 차이를 조사하기 위해서 완전탄소성모델($h=0.0$)을 이용하여 평면변형률조건의 일축압축문제에 대하여 전체모델을 사용하여 축변형률20%범위까지 해석을 하였다. 여기서 이용한 요소는 4CST이며 메쉬는 12×24 이다. 경계조건으로 모든경계의 x방향은 자유이며, 단 하단의 중앙절점의 x방향은 구속되어 있다. 그림 8에 미소변형이론과 대변형이론에 대하여 공칭응력(공시체의 상단에 걸리는 힘을 초기면적으로 나눈값)-변형률관계를 표시한

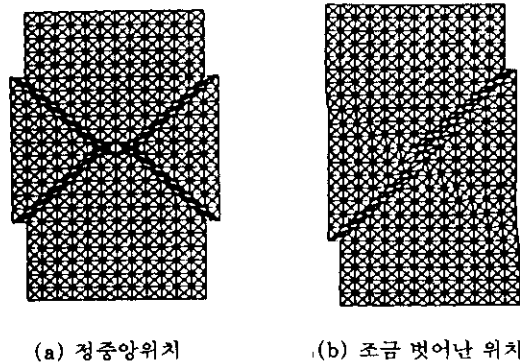


그림 6. 변형도

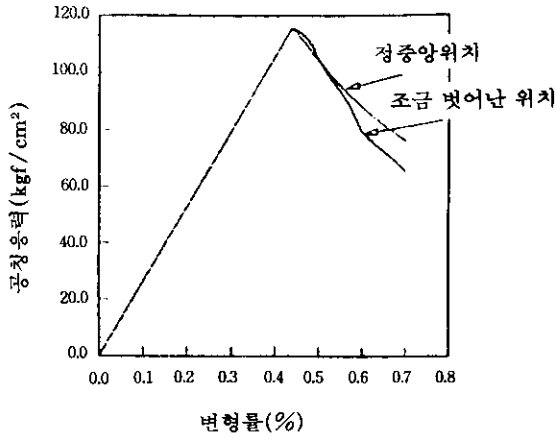


그림 7. 응력-변형률곡선

다. 이 결과를 분석하면 대변형이론을 이용한 경우 공칭응력이 과대평가 된다. 그러나 진응력(true stress; 공시체의 상단에 계산되는 평균 응력)으로 표현하면 대변형해석경우 변형률 15% 이상되면 기하학적인 불안정에 의하여 응력이 감소하는 것을 볼 수 있다(그림 8 참조). 또한 그림 9에 표시하듯이 각 이론에 의한 변형모드에 차이가 크게 발생되며, 대변형의 경우가 실제적인 파괴모드에 가까운 기하학적 불안정 현상을 나타낸다. 또한 변형률연화조건을 이용하여 미소변형범위내의 파괴과정에 대하여도 해석을 하였다 ($H/W=2$, 대칭 파괴모드

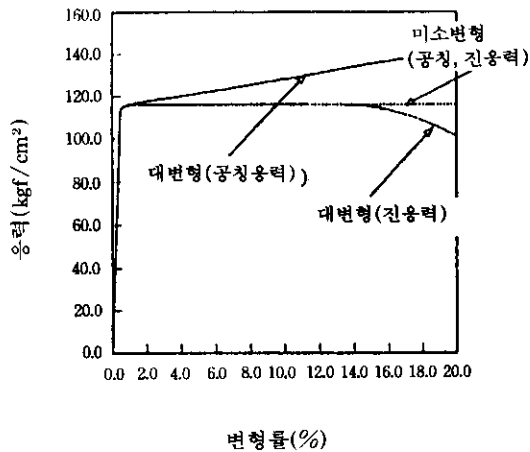
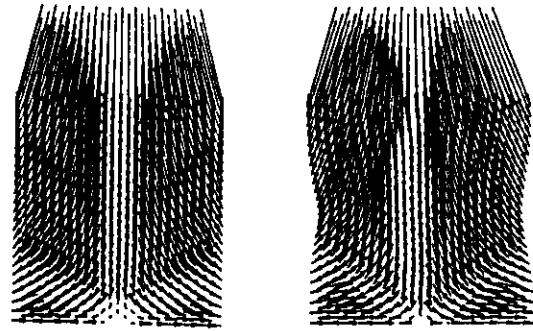


그림 8. 응력-변형률곡선



(a) 미소변형이론

(b) 대변형이론

그림 9. 변형도

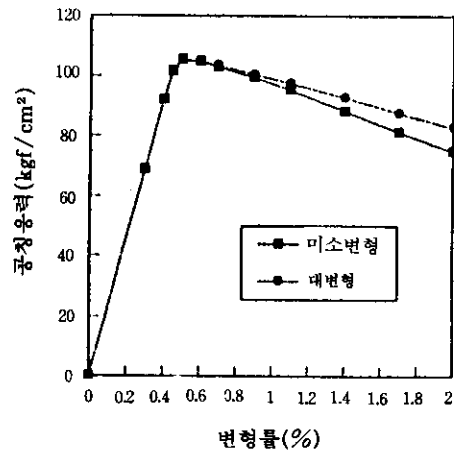
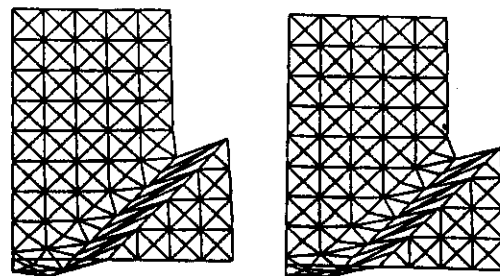


그림 10. 응력-변형률곡선



(a) 미소변형이론

(b) 대변형이론

그림 11. 변형도

1/4모델). 그림-10의 응력-변형률관계를 분석해 보면 대변형이론의 경우, 변형에 따른 기하학적인 강성이 나타나 미소변형의 경우보다 최고점응력후 응력이 보다 덜 감소하는 것을 알 수 있다. 즉, 미소변형의 경우는 최고점하중후 하중감소에 대해 발생변위를 과소평가할 우려가 있다(그림 11 참조).

4.2 압력제어에 의한 파괴거동해석

여기서는 압력제어에 의해 나타나는 최고점하중후의 파괴거동에 대하여 조사하기 위해서 3절에서 기술한 방법을 이용하여 평면변형률 조건의 일축압축과정에 대하여 검토하였다 (8절점 저감적분요소GP82, 매쉬 5×10 사용). 우선, 이 방법의 타당성을 조사하기 위해서 그림-12 과 같은 모델을 이용하여 변위제어와(displacement control)와 압력제어(pressure control)에 의한 해석을 행하였다. 양 방법의 변형모드를 동일하게 하기 위하여 대칭파괴를 가정하였고, 강판의 x방향자유도를 구속하였다. 또한 압력제어의 경우, 사전에 알고있는 변위속도방향으로 강판A, B의 두점을 선정한다. 강판은 공시체 보다 강성, 항복응력을 10배값으로 모델링하였다. 또한 대칭파괴를 유도하기 위해 시료의 중앙에 $0.9\sigma_y$ 의 초기부정을 넣어 해석하였다. 계산결과, 변위제어와 압력제어 방법에

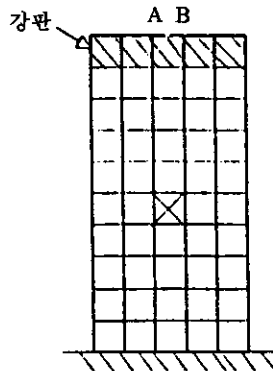


그림 12. 해석모델(압력제어)

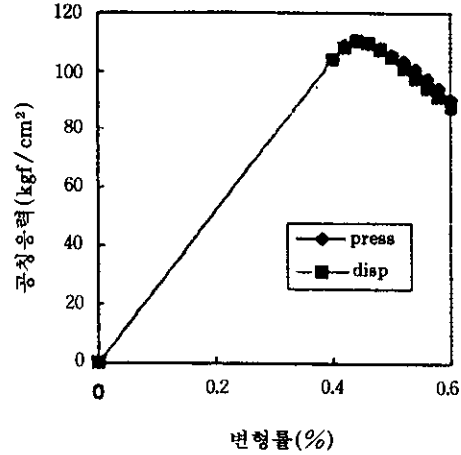
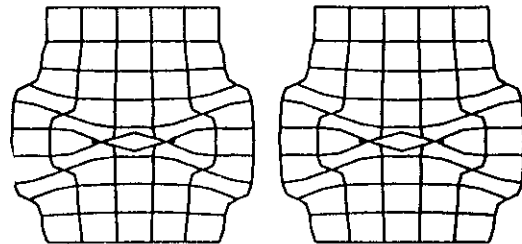


그림 13. 응력-변형률곡선



(a) 변위제어

(b) 압력제어

그림 14. 변형도

의한 양방법의 차이가 거의 없고 일치된 결과를 나타내어 본 방법의 타당성을 입증하였다 (그림-13,14참조).

또한 강판과 공시체의 항복응력을 같게 하여 위와 같은 조건으로 압력제어에 의해 해석한 결과 그림-15과 같은 예상외의 비대칭 파괴모드가 나타났다. 이것은 강판과 공시체의 상호작용에 의해 발생된 미소의 계산상의 오차가 전파되어 비대칭파괴를 유도한 것으로 고려된다. 또한, 변위제어와 압력제어의 차를 조사하기 위해서 비대칭파괴모드를 가정하여 강판의 왼쪽부분 밑의 요소에 초기부정을 넣어 해석하였다. 변위제어의 경우는 강판에 일정한 강제변위를 주기 때문에 강판이 회전하는 것이 불

가능하지만, 압력제어의 경우 상하, 좌우로 변형이 가능하기 때문에 강판이 좌우로 회전해 가는 것을 볼 수 있다(그림-16,17참조).

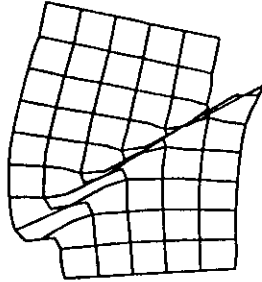
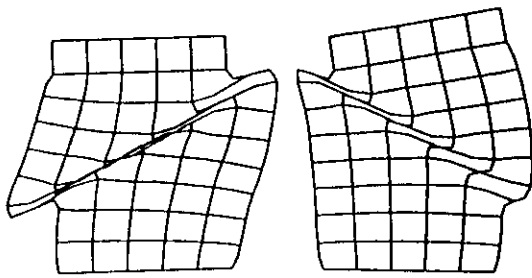


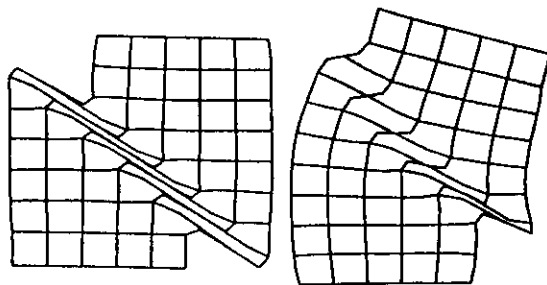
그림 15. 변형도



(a) 변위제어

(b) 압력제어

그림 16. 변형도(강판의 x방향구속)



(a) 변위제어

(b) 압력제어

그림 17. 변형도(강판의 x방향자유)

5. 결론

Von Mises 선형변형률연화모델을 이용하여 유한요소법으로 파괴거동을 해석하기 위해서 고려해야 할 몇가지 문제점 즉, 요소의 선택과 배치, 적분점의 취급, 초기부정의 영향, 미소변형과 대변형이론의 차, 변위제어와 압력제어에 의한 파괴거동의 차에 대하여, 평면변형률조건하의 일축압축문제를 이용하여 파괴거동 수치시뮬레이션을 행하였다. 일련의 파괴거동 수치해석으로 얻어진 결과를 요약해 보면 아래와 같다.

- (1) 파괴거동수치해석에 있어서 요소의 선택과 배치, 적분점의 취급에 따라 상이한 해석결과를 나타내므로 파괴거동해석시 주의를 요한다. 그 중에서 8절점 저감적분한 요소(GP82)와 4CST요소를 사용한 경우 록킹현상과 제로에너지모드를 피하며 변형률연화현상에 대해 좋은 결과를 준다.
- (2) 파괴거동해석을 보다 정밀히 분석하기 위해서는 미소변형범위에서도 일부 영역에 집중된 대변형이 발생되므로 대변형이론을 사용한 결과가 보다 좋은 결과를 준다.
- (3) 최고점하중후의 파괴거동을 수치시뮬레이션하는 경우 초기부정의 위치에 의해 파괴모드 및 응력-변형률관계가 크게 차이가 나며, 변위제어와 압력제어에 의해 나타나는 파괴거동양상은 압력제어시 강판의 상하자유도가 증가되어 강판이 회전하며 파괴가 발생된다.

참고 문헌

1. Bazant Z. P.(1986), "Mechanics of Distributed Cracking", Applied Mech. Review, Vol 39, No5. pp 675-705
2. Cividini A. and Gioda G.(1992), "A finite element analysis for direct shear tests on

- stiff clays", Int. J. for Nume. Anay. Meth. in Geomech., 18-5, pp875-887
3. Reed H. Z. and Hegemine Q. A.(1984), "Strain Softenig of Rock, Soil and Concrete", A Review Article, Mechanics of Materials 3, pp271-294
 4. Tatsuoka F., Nakamura S., Huang C. C. and Tani K.(1990), "Strength anisotropy and shear band direction in plane strain tests of sand", SOILS and FOUNDATIONS, Vol.30, No.1, pp.35-54
 5. Tomita Y. (1990), Computational elasto-plasticity, Yokendo press (in Japanese)
 6. Tvergaard V. (1976), "Effect of thickness inhomogeneities in internally pressurized elastic plastic spherical shells", J. Mech. Phys. Solids, 24, pp 291~297
 7. Tvergaard V., Neeldman A. and Lo K.K. (1981), "Flow localization in the plain strain tensile test", J. Mech. Phys. Solids, 39, pp115-142,

(접수일자 1996. 8. 12)