

다양한 변위감쇠특성을 고려할 수 있는 p-버전 정적 무한요소

p-Version Static Infinite Element for Representing
Various Displacement Decay Characteristics

고 광 훈*¹

Koh, Kwang-Hoon

이 승 래*²

Lee, Seung-Rae

Abstract

This paper presents a two-dimensional p-version static infinite element for analyzing $1/r^n$ displacement decay type problems in unbounded media. The proposed element is developed by using shape functions based on approximate expressions of an analytical solution. Numerical results are presented for an opening in a homogeneous elastic infinite medium and a rigid footing rested on a homogeneous elastic half-space. The numerical results show the effectiveness of the proposed infinite element.

요 지

본 논문에서는 무한영역에서 발생하는 임의의 $1/r^n$ 변위감쇠특성을 해석할 수 있는 p-버전 정적 무한요소를 연구하였다. 무한요소를 개발하기 위하여 이론해를 근사화한 형상함수를 사용하였다. 균질한 무한 탄성체내의 공동변형문제와 반무한탄성체위에 놓인 강성기초의 거동해석을 통하여, 본 연구에서 개발된 무한요소가 무한영역을 효율적으로 묘사할 수 있음을 검토하였다.

Keywords : $1/r^n$ displacement decay characteristics, Laguerre polynomial, Infinite element, p-version

1. 서 론

지반공학을 포함한 여러 공학적 문제를 해결하고자 할때, 해석대상 구조물의 주변에 반무한 지반, 매우 넓은 해양(ocean), 대기(atmosphere)등의 거의 무한한 매질이 존재하는 경우

가 많다. 이러한 무한영역을 다루는 대표적인 문제로는 반무한체위의 한점에 작용하는 연직 하중에 대한 Boussinesq(1878)의 이론해, Flamant의 평면변형문제(Timoshenko & Goodier, 1970) 및 Stokes(1851)의 점성흐름문제등이 있다. 무한영역을 포함하는 문제들은 무한

*¹ 성회원, 한국전력기술(주) 책임기술원

*² 성회원, 한국과학기술원 토목공학과 부교수

요소를 이용하여 모델링하면 해석을 효율적으로 할 수 있는데, 무한요소법에서는 해석대상 구조물에 인접한 영역은 일반적인 유한요소로 무한영역은 무한요소로 모델링한다.

무한요소의 개념은 무한영역을 무한요소를 이용하여 고려하는 점을 제외하면 일반 유한요소와 비슷하다. Ungless(1973)와 Bettess(1977)가 무한요소법의 개념을 정리한 이후, 탄성정력학문제(Beer & Meek 1981, Bettess 1992), 탄성동력학문제(Chow & Smith 1981, Medina & Penzien 1982, 김재민 & 윤정방 1995), 지반의 변형문제(Marques & Owen 1984, 이성민 & 장승필 1996), 동수력학문제(Bettess & Zienkiewicz 1977, Park 등 1991) 등의 여러 분야에 무한요소를 이용한 여러 해석방법이 발전/적용되어왔다.

무한영역의 문제는 문제특성에 따라 무한영역에서의 변위감쇠특성이 $1/r^n$ ($n=0.5, 1, 2, \text{etc}$)로 다양하게 나타나는데, 지금까지는 각각의 감쇠특성에 대해서 개별적으로 적용가능한 무한요소를 이용하여 모델링하였다(Lynn & Hadid 1981, Kumar 1985). 그러나 이러한 경우에는 정해를 알거나 무한영역의 변위감쇠특성을 아는 경우에만 무한영역의 해석이 가능하므로, 임의의 감쇠특성을 고려할 수 있는 보다 광범위한 경우에 적용가능한 무한요소의 개발이 요구되었다. 이에 본 연구에서는 무한영역에 따른 다양한 변위감쇠특성을 해석할 수 있는 p-버전 정적 무한요소(p-version static infinite element)를 개발하고자 한다. 그리고 이 요소를 이용한 해석을 수행하여 그 결과를 유한요소해석결과와 비교함으로써, 개발된 요소의 효율성을 입증하고자 한다.

2. 다양한 변위감쇠특성의 표현방법

2.1 직교다항식을 이용한 $1/r^n$ 의 변위감쇠 형태 표현

일차원 무한영역에서의 해 $u(x)$ 가 다음과 같이 나타날 때,

$$u(x) = \frac{1}{(1+x)^n}, \quad x \in [0, \infty), \quad n > 0 \quad (1)$$

$u(x)$ 는 $x=0$ 에서 1이고, $x \rightarrow \infty$ 에서 0이 되며, x 가 증가함에 따라 $u(x)$ 는 계속적으로 감소한다.

이 때, $u(x)$ 를 다항식의 급수형태인 $u^h(x)$ 로 다음과 같이 근사화할 수 있다고 가정한다.

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{m=1}^M a_m e^{-\beta x} GL_{m-1}(x), \quad x \in [0, \infty) \quad (2)$$

또는

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{m=1}^M a_m \Psi_m(x), \quad x \in [0, \infty) \quad (3)$$

여기서

$$\Psi_m(x) = e^{-\beta x} GL_{m-1}(x), \quad (m=1, 2, \dots, M) \quad (4)$$

이며, $GL_{m-1}(x)$ 는 $(m-1)$ 차의 Laguerre 다항식(Davis & Rabinowitz, 1984)이고, a_m 은 계수이며, M 은 $u^h(x)$ 를 다항식으로 표현할 때의 최대급수숫자이다.

함수 $u(x)$ 를 식(2)와 같이 표현할 수 있기 위해서는 다음사항들이 만족되어야 한다.

(1) $\Psi_m(x)$ 가 모든 m 에 대하여 영변위조건(regular condition)을 만족해야 함.

(2) 함수 $u(x)$ 와 $u^h(x)$ 의 차이를 오차함수 $e(x) = u(x) - u^h(x)$ 라 하고, 이 오차함수의 Norm을 $\|e\| = \int_0^\infty [u(x) - u^h(x)]^2 dx$ 로 정의하면, $\lim_{M \rightarrow \infty} \|e\| = 0$ 이어야 함.

2.2 영변위조건의 검토

일차원 무한영역의 해 $u(x)$ 가 무한위치에서, 변위가 영(zero)라는 영변위조건이 식(3)의 모든 $\Psi_m(x)$ 에 대하여 만족해야 한다. 즉,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Psi_m(x) = 0, \quad (m=1, 2, \dots, \infty) \quad (5)$$

이어야 한다. 이에대한 조건을 검토하기 위하여 Laguerre다항식의 다음 특성을 이용하면(Davis & Rabinowitz, 1984),

$$|GL_m(x)| \leq e^{x/2}, \quad x \geq 0, \quad (6)$$

$$(m=0, 1, 2, \dots, \infty)$$

식(5)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} e^{-\beta/2^M} = 0 \quad (7)$$

따라서 윗식을 만족하는 계수 e 에 대한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\beta > 1/2 \quad (8)$$

2.3 오차함수의 수렴성검토

해석대상영역 전체에 대하여 오차함수의 제곱을 더하면 다음과 같다.

$$J = \|e\|^2 = \int_0^1 [u(x) - u^h(x)]^2 dx, \quad x \in [0, 1] \quad (9)$$

이 때 $\frac{\partial J}{\partial a_n} = 0$ ($n=1, 2, \dots, M$)을 취하여 정리하면 다음과 같다.

$$[K_{ij}] \{a_j\} = \{f_i\}, \quad (i=j=1, 2, \dots, M) \quad (10)$$

여기서 $\{a_j\} = [a_1, a_2, \dots, a_M]^T$, $\{f_i\} = [f_1, f_2, \dots, f_M]^T$ 이며, K_{ij} 와 f_i 는 다음과 같다.

$$K_{ij} = \int_0^1 e^{-2\beta x} GL_{i-1}(x) GL_{j-1}(x) dx, \quad (i=j=1, 2, \dots, M) \quad (11a)$$

$$f_i = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} e^{-\beta x} GL_{i-1}(x) dx, \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad (11b)$$

이 때, $u^h(x)$ 는 $M \rightarrow \infty$ 일 때 $\|e\| \rightarrow 0$ 이 되도록

표 1. M과 n에 따른 $\|e\|$ 값의 변화($\beta=0.75$ 일때)

M value	n=0.75	n=1.0	n=2.0
1	0.9783	0.2213	0.0161
2	0.7951	0.1620	0.0091
3	0.6591	0.1064	0.0011
4	0.5845	0.0859	0.0007
5	0.5262	0.0687	0.0000
6	0.4844	0.0587	0.0000
7	0.4502	0.0505	0.0000
8	0.4231	0.0447	0.0000
9	0.4005	0.0400	0.0000
10	0.3829	0.0367	0.0000
15	0.3797	0.0358	0.0000
20	0.3289	0.0273	0.0000
$\int_0^1 [u(x)]^2 dx$	2.0000	1.0000	0.3333

하는 함수로 다음의 조건을 만족하여야한다.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 [u(x) - u^h(x)]^2 dx = 0 \quad (12)$$

$\|e\|$ 와 $\int_0^1 [u(x)]^2 dx$ 의 값을 비교하고, $\|e\|$ 의 수렴성을 검토하기 위하여 $\beta=0.75$ 일 때 M과 n의 값을 변화시키면서 $\|e\|$ 와 $\int_0^1 [u(x)]^2 dx$ 를 계산하여 표 1에 나타내었다. 이로부터 $\lim_{M \rightarrow \infty} \|e\| = 0$ 임을 알 수 있으며, n이 커질수록 빨리 수렴함을 알 수 있다.

따라서 앞에서 살펴본 바와 같이 식 (8)과 식 (12)로부터, 무한영역에서의 변위감쇠특성이 $1/r^n$ ($n=0.5, 1, 2, \text{etc}$)일 경우, 식 (2)와 같이 Laguerre 다항식의 급수로 감쇠특성을 표현할 수 있음을 알 수 있다(단, $\beta > 1/2$).

3. p-버전 정적 무한요소(p-version static infinite element)

유한요소법을 이용하여 해석하는 경우, 해석 결과에 대한 오차를 줄이기 위하여 h-버전기법이나, p-버전기법을 사용하는 것이 제안되었다(Szabo 1979, Babuska, Szabo & Katz 1981). h-버전기법은 형상함수의 차수는 고정하고 요소를 잘게 자름으로써 오차를 줄이는 방법이며, p-버전기법은 요소의 크기를 고정하고 형상함수로 사용된 다항식의 차수를 높임으로써 해의 정확도를 높이는 방법이다.

무한요소를 이용하여 무한영역을 모델링할 경우 무한영역을 세분화하는 것은 일반적으로 곤란하므로 h-버전기법의 적용은 어려우나, 해석영역을 나누지 않고 다항식의 차수를 높이는 p-버전기법은 무한요소에도 적용이 가능한 것으로 판단된다. 이에 본 연구에서는 앞의 2절에서 설명한 바와 같이 무한영역의 특성에 따라 다양한 감쇠특성을 고려할 수 있는 함수를 사용하였다. 따라서 형상함수를 새로 구성하거나 해석영역을 다시 나눌 필요없이 형상함수의 차수만 변경함으로써, 문제에 따라 다양한 변위감쇠특성을 고려할 수 있는 p-버전 정적 무

한요소를 개발하였다.

3.1 기하학적 형상함수

무한요소에서 국부좌표계(local coordinates)로부터 전체좌표계(global coordinates)로의 사상(mapping)은 그림 1에 보인바와 같으며, 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N L_j(\eta) \mathbf{x}_j(1+\xi) \quad (13a)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N L_j(\eta) y_j(1+\xi) \quad (13b)$$

여기에서 N 은 절점수, x 와 y 는 외부영역에서의 x 및 y 좌표이며, L_j 는 j 절점의 Lagrangian 함수이다. 국부좌표 ξ 와 η 의 범위는 $\xi \in [0, \infty)$, $\eta \in [-1, 1]$ 이다.

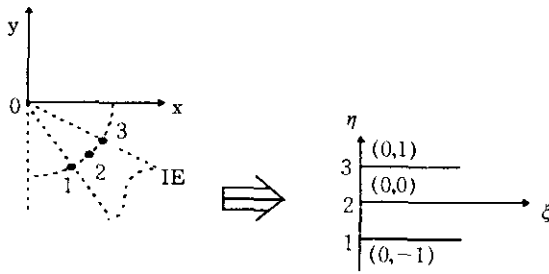


그림 1. 무한요소에서의 좌표변환

3.2 변위형상함수

무한요소에서의 변위는 다음과 같이 여러 함수의 조합으로 나타낼 수 있다(김재민 & 윤정방 1995).

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^P N_{jm}(\xi, \eta) \mathbf{a}_{jm} \quad (14)$$

여기서 $N_{jm}(\xi, \eta)$ 는 형상함수로서 $N_{jm}(\xi, \eta) = L_j(\eta) \Psi_m(\xi)$ 이고, N 은 절점수, P 는 다항식 Ψ_m 의 최대차수이며, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 는 변위벡터($=u_x, u_y >^T$), \mathbf{a}_{jm} 은 N_{jm} 과 연관된 매개변수벡터, Ψ_m 은 식 (4)에 나타난 무한대방향으로의 감쇠함수이다. 식 (14)를 행렬식형태로 나타내면 다음

과 같다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{N}_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{a} \quad (15)$$

여기서 $\mathbf{N}_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 는 형상함수행렬, \mathbf{a} 는 $\mathbf{N}_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 에 관련된 일반좌표벡터(generalized coordinate vector)로 다음과 같다.

$$\mathbf{N}_a = [N_{11} \ I, \dots, N_{1P} \ I \mid N_{21} \ I, \dots, N_{2P} \ I \mid \dots \mid N_{N1} \ I, \dots, N_{NP} \ I] \quad (16)$$

$$\mathbf{a} = \langle \mathbf{a}_{11}^T, \dots, \mathbf{a}_{1P}^T \mid \mathbf{a}_{21}^T, \dots, \mathbf{a}_{2P}^T \mid \dots \mid \mathbf{a}_{N1}^T, \dots, \mathbf{a}_{NP}^T \rangle^T \quad (17)$$

여기서 I 는 2×2 단위행렬이다.

행렬을 보다 체계적으로 구성하기 위하여, 무한요소에서의 변위를 절점변위 $\mathbf{u}^{(d)}$, 변변위 $\mathbf{u}^{(s)}$ 및 내부변위 $\mathbf{u}^{(b)}$ 로 구분하여 다음과 같이 표현한다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(d)} + \mathbf{u}^{(s)} + \mathbf{u}^{(b)} \quad (18)$$

또는

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{N}_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{q} \quad (19a)$$

$$\mathbf{N}_q = [N_d, N_s, N_b] \quad \mathbf{q} = \langle \mathbf{d}^T, \mathbf{s}^T, \mathbf{b}^T \rangle^T \quad (19b)$$

여기서 \mathbf{N}_q 는 새로운 형상함수행렬, \mathbf{q} 는 새로운 좌표벡터이며, \mathbf{d} 는 N_d 와 관련된 변위벡터, \mathbf{s} 와 \mathbf{b} 는 각각 N_s , N_b 와 관련된 변위벡터이다.

이 때, 변위 $\mathbf{u}^{(d)}$, $\mathbf{u}^{(s)}$, $\mathbf{u}^{(b)}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}^{(d)} = \sum_{j=1}^N N_{jt} \mathbf{d}_j = \sum_{j=1}^N L_j \Psi_t \mathbf{d}_j \quad (20a)$$

$$\mathbf{u}^{(s)} = \sum_{k=1}^P (N_{1k} - N_{11}) \mathbf{s}_k + \sum_{k=1}^P (N_{Nk} - N_{N1}) \mathbf{s}_k \quad (20b)$$

$$= \sum_{k=1}^P \tilde{N}_{1k} \mathbf{s}_k + \sum_{k=1}^P \tilde{N}_{Nk} \mathbf{s}_k = \sum_{k=1}^P L_1 \Phi_k \mathbf{s}_k + \sum_{k=2}^P L_N \Phi_k \mathbf{s}_k$$

$$\mathbf{u}^{(b)} = \sum_{j=2}^{N-1} \sum_{k=2}^P (N_{jk} - N_{j1}) \mathbf{b}_{jk} = \sum_{j=2}^{N-1} \sum_{k=2}^P \tilde{N}_{jk} \mathbf{b}_{jk}$$

$$= \sum_{j=2}^{N-1} \sum_{k=2}^P L_j \Phi_k \mathbf{b}_{jk} \quad (20c)$$

여기서 $\Phi_k(\xi) = \Psi_k(\xi) - \Psi_1(\xi)$ 이고 \mathbf{d}_j 는 절점 j 에서의 변위이며, \mathbf{s}_{jk} 와 \mathbf{b}_{jk} 는 각각 변변위와 내부변위이다. 3절점 무한요소에 대한 형상함수의 몇가지 예를 그림2에 나타내었다.

두 좌표 \mathbf{a} 와 \mathbf{q} 의 관계는 식 (15), (16) 및 (17)로부터 $\mathbf{a} = \mathbf{T}_{a1} \mathbf{q}$ 의 관계로 표현될 수 있으며, 여기에서 N_d 와 N_s 의 관계는 다음과 같다.

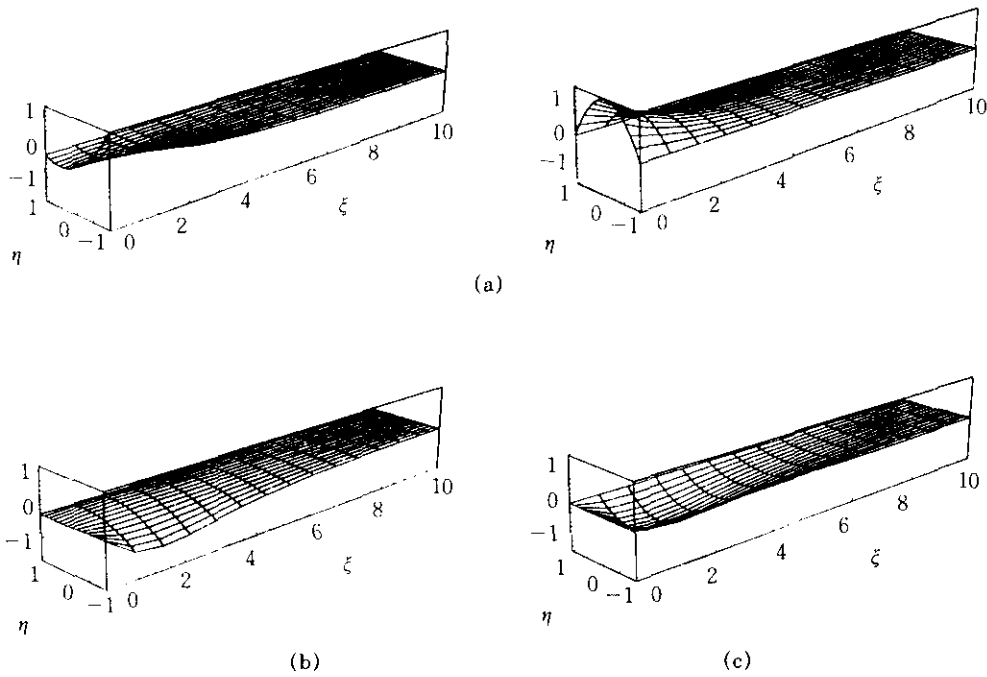


그림 2. 3절점 무한요소의 형상함수에
 (a) 절점모드 $N_{11}(\xi, \eta)$, $N_{21}(\xi, \eta)$ (b) 변모드 $\bar{N}_{12}(\xi, \eta)$ (c) 내부모드 $\bar{N}_{22}(\xi, \eta)$

$$N_i(x, y) = N_s(x, y) T_{sq} \quad (21)$$

3.3 무한요소의 강성행렬

무한요소의 강성행렬을 구성할 때, 계산을 효율적으로 수행하기 위하여, 요소행렬을 우선 좌표 \mathbf{a} 에 대하여 계산한 후, 새좌표 \mathbf{q} 에 대하여 변환한다(양신추 & 윤정방 1991).

일반좌표벡터 \mathbf{a} 와 관련된 강성행렬은 다음과 같다.

$$K_{aa} = \int_{-1}^1 \int_0^{10} B_s^T D B_s |J| d\xi d\eta \quad (22)$$

여기서 B_s 는 평면변형률 조건에서의 변형률-절점변위 관계행렬이고, D 는 평면변형률 조건에서의 응력-변형률 관계행렬이며, $|J|$ 는 자코비안 행렬식으로, ξ 에 대한 0에서 α 까지의 적분은 Gauss-Laguerre구적법을 적용하여 다음과 같이 수행한다(Davis & Rabinowitz 1984).

$$\int_0^\alpha G(x) e^{-sx} dx \approx \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{N_{int}} G\left(\frac{x_k}{s}\right) W_k \quad (23)$$

여기서 x_k 는 Gauss-Laguerre 적분점, W_k 는 weight factor이며, N_{int} 는 필요한 적분점의 숫자이다.

식(21)을 고려하면 새좌표 \mathbf{q} 와 관련된 강성행렬은 다음과 같다.

$$K_{qq} = T_{sq}^T \cdot K_{aa} \cdot T_{sq} \quad (24)$$

4. 예제해석

앞에서 기술한 무한요소의 효율성을 검토하기 위하여, 무한탄성체내의 공동(opening)에 내압이 작용하는 경우(그림 3)와 균질한 등방의 반무한 탄성지반위에 놓인 강성기초(rigid footing)에 하중이 작용하는 경우(그림 4)를 대상으로 해석을 수행하였다. 이 때 구조물과

인접한 영역(near field)은 2차원 평면변형을 유한요소로, 외부영역(far field)은 평면변형을 p-버전 정적 무한요소로 모델링하였다.

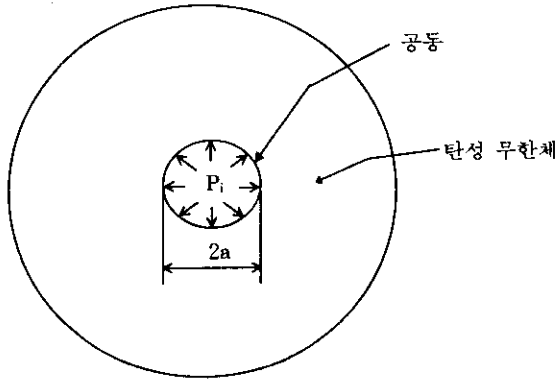


그림 3. 탄성 무한체내의 공동과 작용하중

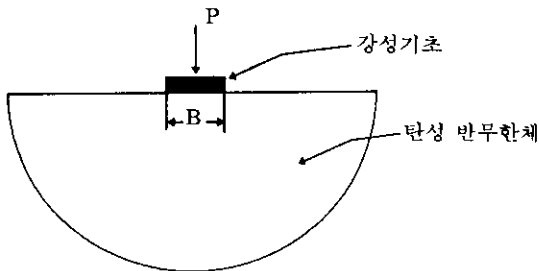


그림 4. 탄성 반무한체위에 놓인 강성기초와 작용하중

4.1 내압을 받는 공동의 거동

균질한 등방의 탄성 무한지반내에 놓인 공동이 평면변형을 조건에서 내압을 받을 경우, 공동의 반경방향변위 u_r 은 다음과 같다(Saada 1974).

$$u_r = \frac{a^2 p_i (1 + \nu)}{E_r}, \quad r > a \quad (25)$$

여기서 ν 는 포아슨비, E 는 무한지반의 탄성계수, a 는 공동의 반경이며, r 은 공동중심으로부터 떨어진 거리이다. 그림 5는 유한요소만

사용한 경우의 해석모델이며, 그림 6은 유한요소와 p-버전 무한요소를 복합적으로 사용한 경우의 해석모델이다. 사용된 물성치는 공동반경 $a=5\text{m}$, 지반의 탄성계수 $E=1000.0\text{KN/m}^2$, 포아슨비 $\nu=0.1$, 내압 $p_i=10.0\text{KN/m}^2$ 이다.

공동표면에서의 반경방향변위에 대하여 정해(analytical solution), 유한요소만의 해석결과(FEM) 및 유한/무한요소해석결과를 그림 7에 나타내었다. 유한요소만 사용하여 해석한 경우 해석영역외부의 경계조건을 자유경계로 했을때 정해보다 과다한 결과를 주며, 유한/무한요소 해석결과는 전반적으로 정해와 가까운 결과를 보여준다. 또한 유한/무한요소해석의 경우 β 의 값에 크게 관계없이 Laguerre다항식의 차수가 2~3이 되면 정해에 거의 수렴한 결과를 보인다. 즉, 이경우는 무한영역에서의 변

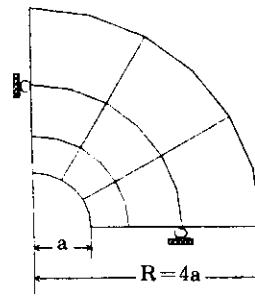


그림 5. 공동해석 유한요소모델

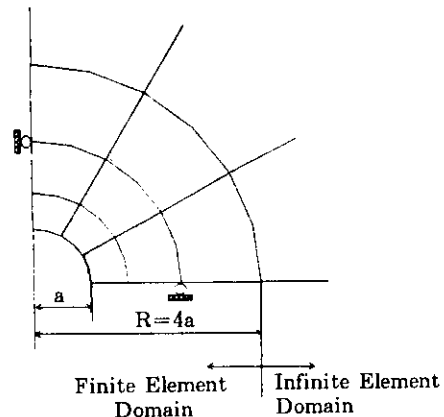


그림 6. 공동해석 유한/무한요소모델

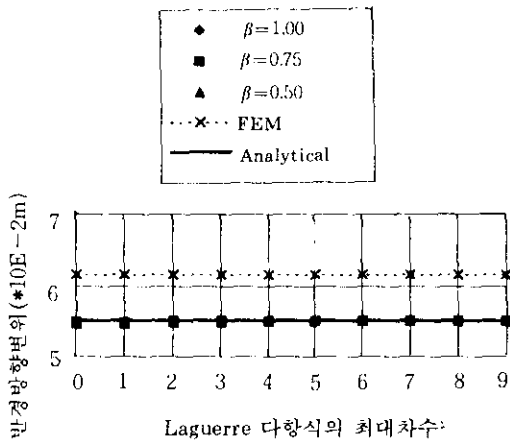


그림 7. 내압을 받는 공동표면에서의 반경방향변위

위감쇠특성이 매우 급격히 감쇠하는 특성을 나타내어, 다항식 차수의 어떤값을 사용하여도 쉽게 수렴해를 구할 수 있는 것으로 판단된다.

4.2 연직하중을 받는 강성기초의 거동

균질한 등방의 반무한 탄성지반위에 놓인 강성기초에 연직하중이 작용할 경우에 대한 기초의 침하거동을 평면변형률조건에서 해석하였다. 평면변형조건에서 연성기초(flexible footing)에 연직하중이 작용할때 유발되는 변위에 대한 이론해는 임의의 매개변수 d 를 포함하게 되는데(Timoshenko & Goodier 1970), 여기서 d 는 하중위치로부터 연직변위가 발생하지 않는다고 가정하는 점까지의 거리이다. 그러나 d 를 알 수 없으므로 정확한 해를 구할 수 없게 된다. 이와 마찬가지로 평면변형률 조건에서 강성기초에 연직하중이 작용할 경우에 대한 이론적 정해가 없으므로, 다음과 같은 두가지 수치해석모델을 사용하여 근사해를 구하고 그 결과를 비교하였다.

- (1) 유한요소로만 해석(그림 8) : 유한요소의 해석영역크기를 증가시켜가면서 다섯 경우에 대하여 해석.
- (2) 유한요소 + p-버전 무한요소해석(그림 9) : 인접한 영역은 유한요소로, 외부영역은 무한요소로 모델링하여 해석.

이때 사용한 물성치는 기초의 폭 $B=2.0m$, 지반의 탄성계수 $E=100.0KN/m^2$, 포아송비 $\nu=0.1$, 연직하중 $P=2.0KN/m$ 이다.

유한요소만을 사용하여 해석한 경우, 해석영역의 크기변화에 따른 강성기초 침하량의 변화는 그림 10(a)와 같다. 해석영역의 크기($X=Y=W$)를 증가시켜 해석하면 침하량이 계속적으로 증가하여 수렴하지않는 것으로 판단된다. 한편 p-버전 정적 무한요소를 사용한 경우, 유한요소 모델링 영역은 그림 5와 같이 $X=2B$, $Y=2B$ 로 매우작게 하였다. 해석결과 그림 10(b)에서와 같이 형상함수에 사용한 Laguerre 다항식의 최대차수를 증가시킬수록 침하량이 증가하며, β 값이 0.55~0.75일때 안정된 해를 주고있다.

위의 수치해석결과들은 본 문제의 경우 수렴해가 존재하지 않음을 보여준다고 할수있다. 즉, 연성기초의 경우와 마찬가지로 d 가 증가할

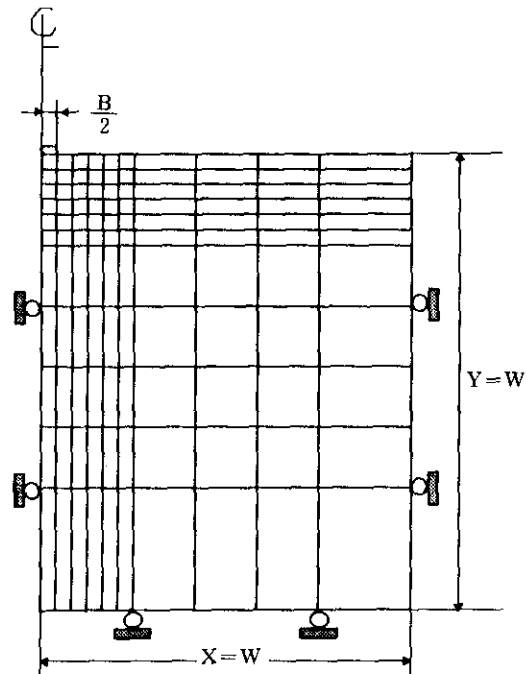


그림 8. 기초해석 유한요소모델

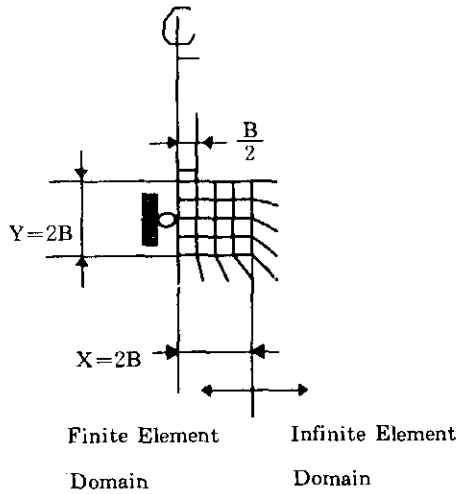
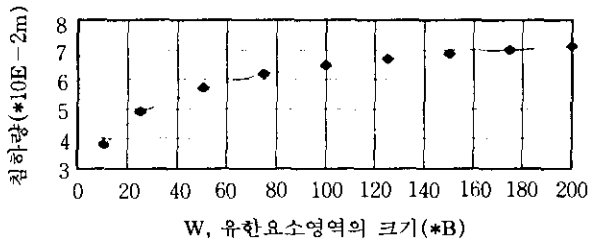
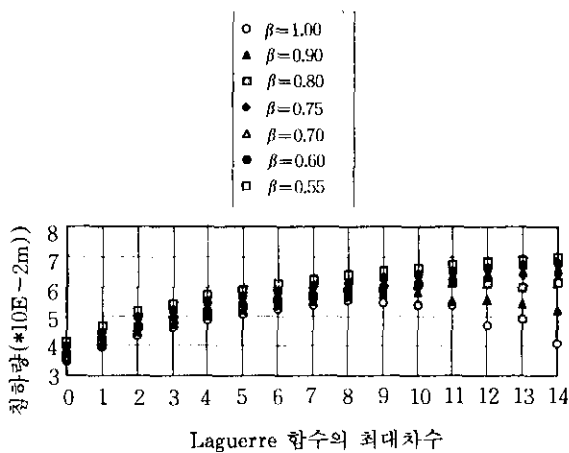


그림 9. 기초해석 유한/무한요소 복합모델



(a) 유한요소만으로 해석한 경우



(b) 유한요소/p-버전무한요소로 해석한 경우

그림 10. 연직하중을 받는 강성기초의 침하량

수록 변위가 증가함을 보여주고있다. 그러나 무한요소에서의 다항식차수를 증가시킬수록 유한요소해석에서의 해석영역을 크게한 것과 비슷한 결과를 주는 것은, 본해석방법이 무한 영역의 특성을 적절히 묘사하고 있다고 볼 수 있다.

이와같이 p-버전 무한요소를 사용할 경우 해석영역을 매우 작게하여도 해석영역을 매우 크게 사용한 유한요소해석결과와 유사한 결과를 구할 수 있으며, 유한요소로만 해석할 때와 달리 모델링 영역설정을 여러번하지 않아도 되므로 매우 편리함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 무한영역에서의 다양한 변위 감쇠형태($1/r^n$, $n=0.5, 1, 2$, etc)를 고려하여 해석할 수 있는 p-버전 정적 무한요소를 개발하였다. 다양한 감쇠형태를 표현하기 위하여 Laguerre다항식을 이용하여 근사식을 유도하였으며, 그 타당성을 오차함수를 이용하여 검토하였다. 본 방법을 사용하면 모델링이 매우 편리하며, 정해를 알지 못하거나, 감쇠형태를 모르는 문제에서도 비교적 정확하면서 안정된 해를 얻을수 있다.

평면변형률조건의 공동변형문제와 강성기초 거동문제에 적용하여 본 결과, 감쇠계수 β 는 $\beta=0.55\sim 0.75$ 일때 안정된 결과를 기대할 수 있었으며, 일반적으로 $\beta=0.60$ 을 사용할 것을 추천할 수 있다. 형상함수를 구성하는 다항식 차수의 경우, 차수를 증가시키면 정해에 가까운 수렴해를 얻을수 있으며, 공동해석의 경우에는 차수가 2~3만 되어도 정해에 가까운 결과가 구해졌다.

본 해석방법은 균질영역의 문제에 적용되었지만, 본고에서 제안한 형상함수를 약간 수정하면 비균질영역의 문제에도 적용이 가능하므로, 무한영역을 포함하는 다양한 문제해석에 사용될 수 있다.

참 고 문 헌

1. 김재민, 윤정방 (1995), "다층반무한지반에서의 지반-구조물 상호작용해석을 위한 동적무한요소", 대한토목학회논문집, 15권 1호 pp.51-62
2. 양신추, 윤정방 (1991), "지반-구조물의 상호작용해석을 위한 무한요소", 대한토목학회논문집, 11권 3호 pp.47-58
3. 이성민, 장승필 (1996), "터널안정성해석시 무한요소적용성평가", 대한토목학회논문집, 16권 III-1호 pp.155-165
4. Babuska, I., Szabo B. A. and Katz, I. N. (1981), "The p-version of the Finite Element Method", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 18, pp.515-545
5. Beer, G. and Meek, J. L. (1981), "Infinite Domain Elements", Numerical Methods in Engineering, Vol.17, pp.43-52
6. Bettess, P. (1977), "Infinite Elements", Numerical Methods in Engineering, Vol.11, pp. 54-64
7. Bettess, P. and Zienkiewicz, O.C. (1977), "Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements", Numerical Methods in Engineering, Vol.11, pp.1271-1290
8. Bettess, P. (1992), "More on infinite elements", Numerical Methods in Engineering, Vol.15, pp.1613-1626
9. Boussinesq, J. (1878), "Equilibre d'elasticite d'un sol isotrop sans pesanteur, supportant differents poids", Comptes Rendus, 86, 1260
10. Chow, Y. K. and Smith, I. M. (1981), "Static and Periodic Infinite Solid Elements", Numerical Methods in Engineering, Vol.17, pp.503-526
11. Davis, Philip T. and Rabinowitz, Philip (1984), Methods of Numerical Integration, 2nd Edition, Academic Press, pp.39-40.
12. Kumar, Prabhat (1985), "Static Infinite Element Formulation", ASCE ST Vol III, No. 11 pp.2355-2372
13. Lynn, Paul P. and Hadid, H. A. (1981), "Infinite Elements with 1/r" Type Decay", Numerical Methods in Engineering, Vol.17, pp.347-355
14. Marques, J. M. M. C. & Owen, D. R. J. (1984), "Infinite Elements in Quasi-Static Materially Nonlinear Problems", Computers & Structures, Vol.18 No.14 pp.735-751
15. Medina, F. and Penzien, J. (1982), "Infinite Elements for Elastodynamics", Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol.10, pp.699-709
16. Park, W.S., Yun, C.B. and Pyun, C.K. (1991), "Infinite Elements for Evaluation of Hydrodynamic Forces on Offshore Structures", Computers and Structures, Vol.40, pp. 837-847
17. Saada, Adel S. (1974), Elasticity Theory and Applications, Pergamon Press Inc., pp. 329-331
18. Stokes, G. G. (1851), "On the effect of inter-nal friction of fluids on the motion of pendulums", Trans. Cambridge Phil. Soc. Vol.iv, pp 8-106.
19. Szabo, B. A. (1979), "Some Recent Developments in Finite Element Analysis", Comp. Math. Appl., Vol.5, pp.99-115
20. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. (1970), Theory of Elasticity, 3rd Edition, McGraw Hill, pp.97-109.
21. Ungless, R. L. (1973), An Infinite Element Method, M A Sc Thesis, University of British Columbia

(접수일자 1996. 8. 29)