파생 금융 상품의 가격 결정을 위한 인공 신경망 기법의 이용

조희연* · 양진설**

Pricing of Derivative Securities Using Artificial Neural Network

He Youn Cho*, Jin Seol Yang**

요 약

파생금융상품이란 주식이나 채권과 같은 기준자산에 대해서 발행되는 2차 금융상품으로써 기존의 재무이론에서는 수리적 모형에 기반을 둔 가격결정모형을 이용하여 가치를 평가하였다. 그러나 이러한 전통적인 가격결정모형은 복잡한 현실세계를 단순화시키기 위한 제반 가정을 요구하기 때문에 이러한 가정이 현실에 부적합한 경우에는 모형가격이 실제가격으로부터 커다란 괴리를 갖게 된다. 본 연구에서는 전통적인 가격결정방법의 단점을 극복할 수 있는 자료 의존적인 인공신경망기법을 제시하고 대표적인 파생금융상품인 국내 전환사채의 가격결정에 적용해 봄으로써 그 가능성을 제시하였다. 인공신경망기법을 전환사채의 가격결정에 적용한 결과 전통적 가격결정방법에 비해 평균절대오차를 70%정도 줄일 수 있었다.

주제어 : 인공신경망, 파생금융상품, 옵션, 전환사채, 유한차분법

I. 서 론

1996년 5월에 개설된 선물시장을 비롯해 향후 도입될 새로운 파생금융상품은 우리 나라 금융시장에 커다란 변화를 가져올 것으로 기대된다. 파생금융상품이란 주식이나 채권과 같은 기준자산에 대해서 발행되는 2차 금융상품으로써 위험을 회피하기

* 울산대학교 경영대학 경영학부 조교수
** 삼성생명주식회사 정보기획팀장

위한 수단이나 또는 투기의 대상으로써 사용될 수 있다. 전통적으로 투자이론에서는 이러한 파생금융상품을 평가하기 위하여 수리적 모형에 기반을 둔 가격결정모형을 이용하였다. 그러나 이러한 전통적인 가격결정모형은 기준자산의 확률과정에 대한 가정이나 기타 복잡한 현실세계를 단순화시키기 위한 가정을 요구한다. 그러므로 이러한 가정이 부적합한 경우에는 모형의 해를 정확하게 구했다고 하더라도 모형가격은 실제가격과 괴리를 갖게 된다.

본 연구에서는 위와 같은 전통적인 가격결정방법의 단점을 극복할 수 있는 파생금융상품에 대한 가격결정방법으로써 자료 의존적인(Data-driven) 인공신경망기법을 제시하고 국내 전환사채에 적용해봄으로써 그 가능성을 확인하고자 한다. 파생금융상품에 대한 가격결정모형 유도는 파생금융상품의 가격을 그 가격에 영향을 주는 요인들의 함수로써 표현하는 것이다. Black과 Sholes(1973)의 옵션가격결정모형에서 볼 수 있듯이 파생금융상품의 가격결정모형은 복잡한 비선형의 형태를 갖게 된다. 인공신경망기법은 잘 알려진 바와 같이 이러한 비선형의 함수를 결정하는데 효과적이다. 또한 인공신경망기법은 특성상 파생금융상품에 대한 가격결정시 전통적인 방법에 비해 다음과 같은 장점을 갖는다. 첫째로 인공신경망기법은 가격결정 함수를 찾는 데 기준자산의 확률과정 및 기타 가정을 필요로 하지 않기 때문에 이로부터 발생되는 오차를 막을 수 있다. 둘째로 인공신경망기법은 적응적 모형이므로 임의의 한 싯점에서 시장의 구조적 변화에 자동적으로 적응할 수 있다. 즉 새로운 환경에서의 가격결정을 위한 새로운 모형화 과정 없이 기존 모형으로부터 신속한 적응이 가능하다. 셋째로 전통적인 가격결정모형은 새로운 파생상품에 대하여는 새로운 모형을 유도해야 하지만 인공신경망기법은 훈련시키기에 충분한 자료가 제공되는 한 다양한 파생금융상품의 가격 결정에 이용할 수 있다.

본 연구는 전환사채의 가격결정 모형화를 위해서 오류역전파 학습과정을 가지는 다계층 신경망구조를 사용하도록 한다. 신경망기법에서 신경망의 구조는 신경망의 성과에 커다란 영향을 미치게 되므로 신중하게 결정되어야 한다. 구조결정에 관한 몇몇 연구가 있어 왔지만 최적의 신경망구조는 문제성격, 입출력 자료 및 사용된 학습 알고리즘에 따라서 결정되게 된다. 일반적으로 이러한 결정은 휴리스틱(Heuristic)한 비교, 즉 각 구조별 학습오차 비교를 통해서 이루어지게 된다. 본 연구에서는 실험결과 최저의 학습오차를 보인 4계층 신경망 구조를 사용한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. II장에서는 국내 전환사채에 대한 설명 및 전통적인 가격결정모형을 설명하고 III장에서는 국내 전환사채를 평가하기 위한 인공신경망모형을 제시한다. IV장에서는 국내 전환사채에 대한 실제 자료를 이용하여 전통적인 가격결정방법과 인공신경망모형을 비교하고 각 모형의 성과를 측정한다. V장에서는 본 연구의 결론 및 앞으로의 연구방향을 제시한다.

II. 국내 전환사채의 개념 및 가격결정모형

전환사채란 전환사채 발행 회사에 대하여 발행후 일정기간(전환기간)내에 일정한 조건(전환조건)으로 당해 발행회사의 주식으로 전환할 수 있는 권리(전환권)가 부여된 채권을 지칭한다. 그러므로 전환사채는 일반채권과 전환권인 옵션이 결합된 합성증권으로 볼 수 있다. 국내에서 전환사채는 1963년에 처음으로 발행되었으나 1980년대 중반

까지는 투자가 및 발행기업의 인식부족뿐만 아니라 주식시장의 여건미비로 발행시장 및 유통시장이 제대로 형성되지 못하였다. 그러나 1980년 중반이후 주식시장의 활황 및 1993년의 외국인에 대한 무보증 전환사채시장 개방으로 인하여 전환사채의 발행이 활발해지고 있다. 이에 따라 현재 투신을 비롯해 여러 증권회사에서 전환사채평가 시스템을 개발 완료했거나 개발 중에 있다.

전환사채에 대한 본격적인 연구는 Ingersoll (1977), Brennan과 Schwartz(1977) 에 의해서 시작되었다. Ingersoll은 투자가의 전환사채에 대한 최적전환전략과 기업의 전환사채에 대한 최적 콜전략을 유도하고 Morton(1974)의 옵션평가모형을 이용하여 몇몇 특수한 경우에 있어서 전환사채에 대한 해석적 해(Analytic solution)를 유도하였다. 이에 반해 Brennan과 Schwartz는 수치해석적 기법을 이용하여 전환사채의 평가 모형을 제시하였다. 그러므로 Brennan과 Schwartz의 모형은 근사적 해이기는 하지만 해석적 해가 존재하지 않는 일반적 전환사채에 대한 해를 줄 수 있다. McConnell과 Schwartz(1986)은 Brennan과 Schwartz모형의 단점을 보완하여 무이자이고 콜과 풋조항이 있는 전환사채인 LYON(Liquid Yield Option Note)의 가격결정모형을 유도하였다. 본 장에서는 Brennan과 Schwartz(1977)의 연구와 McConnell과 Schwartz (1986)의 연구에 기반을 둔 수치 해석적 기법을 이용하여 국내 전환사채의 평가모형을 구축한다. McConnell과 Schwartz (1986)는 다음의 5가지 가정하에서 재정이득이 발생하지 않는다는 조건 (No Arbitrage Condition)을 이용하여 식 (1)과 같은 가격결정을 위한 편 미분방정식을 유도하였다.

첫째, 전환사채의 가치는 발행기업의 주식가격에 의존한다. 둘째로, 이자율의 기간구조는 수평이고 확정적이다. 셋째로, 주식가격(S)은 일정한 분산(σ)을 갖는 확산모형(Diffusion Process)를 따른다고 가정한다. 넷째로, 자본시장은 완전 자본시장(Perfect Market)이고 투자자 및 발행자는 비용없이 모든 정보에 접근 가능하다. 다섯째, 투자가는 최적전환전략을 따른다. 최적전환전략이란 투자가가 각 시점에서 전환사채의 가치를 극대화시키는 전략으로 전환사채의 가치가 전환가치보다 작게 되자 마자 전환하는 전략이다.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 W_{ss} + rSW_s - W_\tau - rW = 0 \qquad (1)$$

여기서, $W_s = \frac{\partial W}{\partial S}$, $W_{ss} = \frac{\partial^2 W}{\partial S^2}$, $W_\tau = \frac{\partial W}{\partial \tau}$,

W= 전환사채의 가치, S= 주가,

σ= 주식수익률 분산,

τ= 만기, r= 무위험수익률.

위의 편미분 방정식 (1)에 전환사채의 특성을 나타내는 제반 경계조건을 적용하여 해를 구하면 일반적인 전환사채에 대한 이론적 가치를 구할 수 있다.

그러나 국내 전환사채의 경우에는 일반적인 전환사채의 특성이외에 몇 가지 특징을 갖고 있기 때문에 본 연구에서는 이러한 국내전환사채의 특징을 고려할 수 있도록 McConnell과 Schwartz의 모형을 수정하였다. 국내전환의 경우 첫 번째 특징은 전환가능기간이 발행후 보통 6개월－1년후부터 시작되고 만기시점이전에 전환금지 기간이 설정된다. 둘째로는 전환사채가 만기까지 전환되지 않았을 경우에 액면금액(Par Value)을 상환하는 것이 아니라 만기상환율을 이용하여 계산되는 금액을 상환하게 된다. 셋째로 전환사채를 전환했을 때 받게 되는 기준주식의 종류가 신주인 경우가 많기 때문에 기준주식이 보통 구주인 경우와 다른 가격모형을

갖게 된다.

국내전환사채의 특성을 나타내는 제반 경계조건을 만족하는 편 미분 방정식 (1)의 해석적 해를 구할 수 없기 때문에 수치 해석적 해를 구해야 한다. 본 연구에서는 근사적인 해를 구할 수 있는 방법으로 내재적 유한차분법(Implicit Finite Difference Method)을 이용한다. (Brennan과 Schwartz (1977)) 내재적 유한차분법의 단점은 매 단계마다 연립방정식을 풀어야 하므로 계산시간이 외재적 유한차분법에 비해서 많이 걸리게 된다. 그러나 외재적 유한차분법은 점근성을 보장하지 못하나 내재적 유한차분법은 점근성을 보장받을 수 있다.

III. 인공 신경망 모형

파생금융상품에 대한 기존의 재무적 가격결정모형들은 복잡한 현실세계를 단순화시키기 위한 여러 가정들을 사용함으로써 가정의 현실 적합 여부에 따라 문제가 발생할 수 있다. 특히 국내 전환사채 시장은 발행시장 측면에서는 발행물량이 증가하고 있으나 유통시장의 경우 기관투자가들이 인수후에 전환하거나 만기까지 보유하는 전략을 주로 취하고 중도 거래를 하지 않기 때문에 유동성이 매우 떨어진다. 그러므로, 유통시장은 모형에서 가정하는 완전 자본시장이나 효율적 자본시장으로부터 거리가 멀고 이로 인하여 모형의 적합성이 문제시 된다. 그러나 불완전 자본시장이나 또는 비효율적 자본시장과 같은 가정하에서는 모형을 유도할 수가 없기 때문에 국내 전환사채의 경우 가격결정에 어려움을 겪게 된다. 따라서 본 장에서는 위와 같은 전통적인 가격결정모형들의 문제점을 극복하기 위해 인공신경망기법을 도입하고 국내 전환사채의 가격결정에 이용하고자 한다. 인공신경망기법을 국내 전환사채 가격결정에 적용시킴에 있어서 전환사채의 가치에 영향을 미치는 요인들에 관한 어떠한 수학적 표현이나 가정도 필요치 않으며, 단순히 현실 세계에서 측정된 입력-출력 패턴들만을 학습자료로 사용하여 학습이 이루어지게 된다. 이는 채권 전문가가 그들의 과거 투자경험을 지식화하고 이를 이용하여 미래 투자 결정을 내리는 것과 동일하다.

3.1 신경망 구조

전환사채의 가격결정 모형화를 위해서 전방위 오류역전파 (Feedforward Backpropagation) 학습과정을 가지는 다계층 신경망구조를 사용하도록 한다. 신경망 기법에서 신경망의 구조는 신경망의 성과에 커다란 영향을 미치게 되므로 신중하게 결정되어야 한다. 구조결정에 관한 몇몇 연구가 있어 왔지만 최적의 신경망구조는 문제성격 및 사용된 학습알고리즘에 따라 결정되게 된다. 일반적으로 이러한 결정은 휴리스틱(Heuristic)한 비교, 즉 각 구조별 학습오차의 비교를 통해서 이루어지게 된다. 본 연구에서는 3 계층 구조(One hidden layer) 구조와 4 계층(Two hidden layer) 구조에 대하여 학습오차를 비교하였으며, 이때 입력 및 출력 계층에서의 단위 수는 사용변수의 수에 따라 사전적으로 결정되지만, 중간계층 (Hidden layer)에서의 단위의 개수는 작은 수에서부터 큰 수로 증가시키면서 각각의 학습오류를 비교함으로써 결정하였다.

3.2 실험 설계

전환사채는 일반채권에 전환권이라는 옵션을 추가한 합성증권이다. 따라서 본 연구에서는 인공신

경망 기법을 전환사채의 가격 결정에 사용하는데 있어서 일반채권 부분과 옵션 부분으로 나누어서 계산한 다음 이 두 부분을 더하여 전환사채의 가격을 구하는 방식을 취한다. 이는 일반채권 부분의 경우 간단한 채권가격공식에 의하여 구할 수 있으므로 이 공식에 의하여 구하였고 옵션부분만 인공신경망 기법을 사용하여 추정한다.

전환사채중 일반 채권부분의 가치는 전환사채의 발행조건에서 주어지는 만기와 만기상환률, 지급이자율 및 시장이자율(할인율)만 알면 쉽게 계산가능하기 때문에 인공신경망기법을 이용하여 추정할 필요가 없으며 또한 이로 인하여 학습에 필요한 입력변수의 수를 상당히 줄일 수 있다. 전환사채의 옵션부분을 추정하기 위하여 다음과 같은 변수들을 고려하였다. 첫 번째 변수는 현재주가와 전환가격의 비율을 나타내는 페러티(Parity)이다. 페러티 변수를 사용하면 전환사채 가격결정에 있어서 중요한 두 변수인 전환사채 발행기업의 현재주가와 전환가격을 동시에 고려할 수 있다. 페러티가 1보다 크다는 것은 현재주가가 전환가격보다 높다는 것을 의미하므로 현재 전환해도 이득이 발생되는 상태이다. 또한 페러티가 1보다 작다는 것은 현재주가가 전환가격보다 낮다는 것을 의미하므로 현재 전환하면 손실이 발생되는 상태이다. 두 번째 변수는 전환사채 발행기업의 주식가격에 대한 분산으로써 일반적으로 옵션의 가치는 분산이 클수록 증가하게 된다. 왜냐하면 옵션은 주식가격의 하락 위험은 제한되어 있지만 상승이득은 무제한이기 때문에 주식가격의 분산이 커질수록 옵션은 유리하게 된다. 세 번째 변수는 전환사채의 만기로써 만기가 길어질수록 전환기회가 증가하므로 옵션의 가치는 증가하게 된다. 네 번째 변수는 전환사채가 전환되었을 때 받게 되는 주식의 종류로써 이에는 보통주와 우선주가 있는데 최근의 우선주 파동 등으로 인하여 전환주식이 우선주인 경우와 보통주인 경우에 다른 가격 결정 방식이 될 것으로 기대된다. 다섯째 변수는 전환사채에 대한 보증여부로써 보증과 무보증의 두 가지 형태를 갖는다.

위에서 설명한 입력변수를 이용하여 본 연구에서는 다음의 2가지 경우에 대한 신경망구조 및 추정결과를 분석하고자 한다. 단 페러티 변수의 경우는 2개로 나누어서 사용하였는데, 페러티-1 변수는 현재주가와 전환가의 비율을 나타내고 페러티-2 변수는 25일 평균 주가와 전환가의 비율을 나타낸다. 페러티-2 변수를 사용한 이유는 불공정 가격조작 등으로 인해 주가가 단기 급변한 경우 현 주가가 적정한 가격을 나타내지 못할 가능성이 크므로 25일 평균주가를 사용함으로써 이러한 문제를 보완하기 위해서이다.

(실험-1) 전환사채의 옵션가치를 결정하는 주요 3 요인만을 고려
- 입력변수(3): 분산(Sigma), 만기(Maturity), 페러티-1(Parity)
- 출력변수(1): 전환사채의 옵션가치

(실험-2) 전환사채의 옵션가치를 결정하는 6개 요인을 고려
- 입력변수(6): 분산, 만기, 페러티-1, 페러티-2, 전환주식유형, 보증여부
- 출력변수(1): 전환사채의 옵션가치

Ⅳ. 인공신경망 모형의 성과 분석

본 연구에서는 재무모형과 인공신경망 모형간의 성과 비교를 위해 재무모형의 편 미분 방정식은 유한차분법중 내재적 유한차분법 알고리즘 (Brennan & Schwartz, 1980)을, 인공신경망 모형은 전방위 오류역전파 알고리즘(Rumelhart et al., 1986)을 PC에서 C언어로 직접 프로그래밍 하여 실험하였다.

4.1 자료 설명

전통적 수치해석기법 및 인공신경망을 이용하여 전환사채의 가치을 구하기 위해서는 크게 3종류의 자료가 요구된다. 즉 전환사채에 대한 발행조건, 전환사채 발행기업의 주가 시리즈, 할인율 자료가 요구된다. 첫째로 전환사채의 발행조건으로는 만기, 전환청구기간, 전환가격, 만기상환액, 연이율, 보증여부 등이 필요하다. 둘째로 할인율로는 전환사채가 보증인 경우에는 전환사채와 만기가 유사한 은행보증회사채의 수익률을 사용하고 무보증인 경우에는 무보증회사채의 수익률을 할인율로 사용한다. 셋째로 전환사채 발행기업의 현재주가 및 과거주가 시리즈로써 이것은 평가모형에서 사용되는 주식수익률의 분산을 계산하는 데 사용된다. 또한 주식수익률 분산은 전환사채 거래일 이전의 1년간 주별 수익률을 이용하여 추정하였다. 본 연구에서는 1994년 12월부터 1995년 4월까지 거래된 전환사채중에서 110개의 거래자료를 대상으로 분석하였다. 110개의 거래 자료중 처음 60개 자료는 인공신경망의 모형화를 위한 학습자료로 사용하였고 나머지 50개 자료는 모형화 결과에 대한 검증자료로 이용하였다.

4.2 전통적 수치해석기법에 의한 전환사채 가치평가

전통적 수치해석기법에 의한 전환사채의 가치를 구하기 위하여 내재적 유한차분알고리즘을 C언어를 사용하여 프로그램으로 작성하였다. 본 프로그램을 사용하여 전환사채 거래자료중 검증자료 50개에 대하여 모형가격을 구한 결과 시장거래가격은 모형가격의 약 78%가 되었다. 또한 시장거래가격과 모형가격의 평균절대오차(MAE)를 식 (2)와 같이 정의할 때 수치 해석기법에 의한 평균절대오차는 44,085원이었다.

$$\text{평균절대오차}(MAE) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sqrt{(\widehat{P}_i - P_i)^2}}{N} \qquad (2)$$

여기서 $P_i = i$번째 전환사채의 시장거래가격
$\widehat{P}_i = i$번째 전환사채의 모형가격

이러한 모형가격과 시장거래가격과의 괴리는 다음의 두 가지 측면에서 해석할 수 있다.

첫째로 전환사채 평가모형의 가정이 현실을 제대로 반영하지 못한 데서 이러한 차이의 원인을 찾을 수 있다. 즉 전환사채 평가모형은 전환사채의 옵션부분의 가치를 과대 평가하고 있는 것으로 볼 수 있다. 주식 수익률이 로그정규(Log Normal) 분포를 따른다는 가정이나 또는 연속적 재정거래(Dynamic Hedging)가 가능하다는 조건, 거래비용이 존재하지 않는 완전 자본시장 등의 가정이 현실과 괴리가 있기 때문이다. 즉 전환사채에 대한 전통적 평가모형은 이러한 여러 현실적인 요인들을 고려하지 못한다는 점에서 보완이 요구된다고 할 수 있다.

둘째로 우리 나라의 경우 전환사채의 대부분을 기관에서 거래하는데 이러한 금융기관들이 아직까지 전환사채에 대한 과학적인 평가모형을 갖추고 있지 못하다는 점이다. 그러므로 이들 기관들은 과거에 사용하던 초보적인 평가기법을 기초로 거래를 함으로써 실제 거래가격과 정상가격이 다를 수 있다. 전환사채 거래시 거래 실무자들이 옵션에 대한

이해가 부족하고 그로 인하여 전환사채에 포함되어 있는 옵션의 가치를 제대로 평가하지 못하는 것이 현실이다. 이러한 현상은 <표1>과 <표2>에서 볼 수 있는데 <표1>은 주가의 분산이 변할 때 전환사채의 시장가격과 모형가격과의 비율을 나타낸 것으로 분산이 커질 수록 차이가 많이 발생한다는 것을 알 수 있다. 이것은 분산증가로 인한 전환사채 옵션부분의 증가만큼 시장가치는 증가하지 않는 다는 것을 나타낸다.

표 1. 주가 변동성(σ) 변화에 따른 성과 분석

주가 변동성 (σ)	비 율 (시장가격/모형가격)	평균 절대 오차
$\sigma < 0.22$	0.824	32,012.9
$0.22 < \sigma < 0.33$	0.763	41,138.2
$\sigma > 0.33$	0.714	58,680.4

<표2>는 페리티가 변할 때 전환사채의 시장가격과 모형가격과의 비율을 나타낸 것으로 페러티가 커질 수록 차이가 많이 발생한다는 것을 알 수 있다. 페러티 역시 분산과 마찬가지로 페러티 값이 커질수록 옵션의 가치가 증가되는 데 옵션의 증가분을 시장에서 충분히 반영하고 있지 않다는 것을 <표2>로 부터 알 수 있다.

표 2. 페러티 변화에 따른 성과 분석

페 러 티 (P)	비 율 (시장가격/모형가격)	평균 절대 오차
$P < 0.9$	0.880	15,209.3
$0.9 < P < 1.19$	0.843	19,880.3
$1.20 < P$	0.708	60,444.2

전환사채의 이론가격과 실제 거래가격과의 차이는 위의 두 가지 요인이 결합되어서 나타난 결과로 볼 수 있다.

4.3 인공신경망기법에 의한 전환사채 가치평가

인공신경망의 오류 역전파 알고리즘을 활용한 학습과정을 위하여 전환사채 거래자료 110개중 1994년 12월부터 1995년 2월까지의 거래자료 60개를 사용하였다. 인공신경망 구조 결정을 위해 3계층 구조와 4계층 구조에서의 중간 계층 단위(Unit)수 변경을 통한 휴리스틱 비교분석을 실시하였으며, 분석 결과는 <표 3> 과 같다. 이때 학습을 위한 초기 연결강도 및 분기점은 [-0.1, 0.1]의 범위를 가지는 균등분포(Uniform distribution)로부터 얻어지며, 학습률은 0.2를 가진다. 학습자료는 순차적으로 제공되며 정지 학습 규칙은 (1) 출력 단위에서의 학습자료 60개의 절대오차 합이 0.06이하이거나, (2) 학습자료의 학습횟수(Cycle)가 30,000번까지로 하여 최종 학습결과를 얻게 된다.

<표 3>의 실험결과로부터 최종 선택된 신경망 구조는 3개의 입력 변수를 갖는 <실험 1>인 경우에는 3 - 15 - 7 - 1의 4계층 구조이고 4개의 입력 변수를 갖는 <실험 2>인 경우에는 6 - 32 - 16 - 1의 4계층 구조이다.

표 3. 인공신경망 구조별 학습결과

(a) 3개 입력 변수, 1개 출력 변수의 경우

3계층 구조(3-□-1)		4계층 구조(3-□-□-1)		
은닉층1의 단위수	평균절대오차	은닉층1의 단위수	은닉층2의 단위수	평균절대오차
3	15,825.4	6	3	12,152.7
6	12,169.2	10	5	12,577.3
9	13,256.9	15	7	11,673.8
12	13,672.5	20	10	13,244.7

(b) 6개 입력 변수, 1개 출력 변수의 경우

3계층 구조(6-□-1)		4계층 구조(6-□-□-1)		
은닉층1의 단위수	평균절대오차	은닉층1의 단위수	은닉층2의 단위수	평균절대오차
6	12,275.5	12	6	10,591.2
12	13,233.7	24	12	10,247.8
15	11,627.6	30	15	9,872.7
18	12,281.6	32	16	9,527.8
24	15,326.6	36	18	12,685.3

다음으로는 선택된 신경망 구조를 이용하여 인공신경망 기법의 성과를 재무적 가격결정기법과 비교하기 위하여 110개의 거래자료중 60개의 학습자료를 제외한 50개의 검증자료를 이용하여 두 기법의 평균절대오차를 비교하였다. 이에 대한 결과는 <표4>에 나타나 있다.

표 4. 두 기법의 성과 비교

가격 결정 기법	평균 절대 오차
전통적 재무기법	44,085
신경망 기법-1 (실험1)	14,964
신경망 기법-2 (실험2)	13,069

<표4>로부터 인공신경망기법의 평균절대오차는 전통적 재무이론에 기반한 가격결정 방법의 평균절대오차에 비해 약 30%수준에 머문다는 것을 알 수 있다. 이것은 국내 전환사채 시장이 아직까지는 제도미비와 거래자의 인식 부족 및 낮은 유동성 등으로 인하여 재무이론의 모형을 적용하기가 어렵기 때문에 가정에 의존하지 않는 인공신경망 기법의 적용이 보다 효과적이라는 것을 나타낸다. 또한 인공신경망 기법중에서도 기법-2가 기법-1에 비해서 약간의 우월한 결과를 주고 있는데 이것은 기법-2에서 추가적으로 사용한 입력변수인 페러티-2, 전환주식유형, 보증여부의 변수가 전환사채의 가격결정에 약간의 영향을 주고 있다는 것을 의미한다.

그러므로 인공신경망기법-2를 이용하여 전환사채 평가시스템을 구축하는 것이 나머지 두 기법보다 효과적일 것으로 기대되며 이러한 시스템은 국내 전환사채의 매매시 의사결정자에게 중요한 정보를 제공할 것으로 기대된다.

Ⅳ. 결론 및 제언

전환사채는 현재 우리 나라에서 거래되고 있는 대표적인 파생금융상품으로써 투자가 및 발행자 모두에게 좋은 투자대상이나 자금조달방법이 될 수 있다. 또한 중소기업 발행 무보증 전환사채에 대한 외국인투자허용으로 인하여 전환사채에 대한 일반의 관심이 고조되고 있다. 그러나 국내 전환사채시장은 아직까지 거래가 활발치 못하기 때문에 완전자본시장이나 효율적 자본시장과는 상당한 거리가 있다. 그러므로 완전 자본시장이나 효율적 자본시장의 가정하에서 유도된 재무적 가격결정모형은 현실과 상당한 괴리를 갖게 된다. 이러한 이유로 인하여 국내의 몇몇 금융기관들은 전환사채에 대한 평가모형을 개발하고도 실제 매매에는 사용하고 있지 못한 실정이다.

본 연구에서는 위와 같은 전통적인 가격결정방법의 단점을 극복할 수 있는 파생금융상품에 대한 가격결정방법으로써 자료 의존적인 인공신경망기법을 제시하고 국내 전환사채에 적용해 봄으로써 그 가능성을 제시하였다. 본 연구에서는 1994년 12월부터 1995년 4월까지 거래된 110개의 전환사채 자료를 대상으로 전통적인 재무이론과 인공신경망

기법을 적용시켜 다음과 같은 결과를 유도하였다.

첫째, 전통적인 재무이론에 의한 가격결정방법은 전환사채의 시장거래가격에 비해 훨씬 높은 이론가격을 제시하고 있다. 전통적 기법을 이용하여 전환사채의 모형가격을 구한 결과 시장거래가격은 모형가격의 평균 78%수준에 머물렀고 시장거래가격과 모형가격의 평균절대오차도 44,085원이나 되었다. 특히 전통적 가격결정 방법은 전환사채의 옵션가치가 커질수록 큰 평균절대오차를 발생시킴으로써 주식가격의 변동성과 페러티가 클수록 평균절대오차가 커지는 현상을 보였다.

둘째, 인공신경망기법은 전통적 가격결정방법에 비해 훨씬 적은 평균절대오차를 주었다. 인공신경망기법에 의한 모형가격 산출시 평균절대오차는 13,069원으로 전통적 가격결정기법의 30% 수준에 불과 하였다.

향후 채권시장이 발전하고 개방화가 가속화되면 전환사채이외에도 옵션성격이 가미된 여러 채권상품들이 개발될 것이다. 예를 들어 최근 정부는 장기채권발행을 유도하고 있는데, 장기채는 특성상 이자율 변동위험 및 파산위험이 크기 때문에 이를 해소하기 위해서는 풋조항이나 콜조항 및 감채기금조항의 포함이 필수적이다. 본 연구에서 볼 수 있듯이 인공신경망기법은 이러한 파생금융상품의 가격결정에 좋은 대안이 될 수 있으므로 기관투자가들은 전환사채를 비롯한 파생금융상품에 대한 평가시스템 구축시 전통적인 재무이론 뿐만아니라 인공신경망기법을 이용하는 것이 필요하다고 사료된다.

참 고 문 헌

1. W.F. Ames. "Numerical methods for Partial Differencial Equations, Academic Press, 1977.
2. F. Black and, M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." Journal of Political Economy, vol. 81, 1973, pp. 637-659.
3. M.J. Brennan and E. S. Schwartz. "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds." Journal of Banking and Finance, vol. 3, 1979, pp. 133-155.
4. _______. "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis." Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, 1978, pp. 461-474.
5. _______. "Analysing Convertible Bonds", Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 15, 1980, pp. 907-929.
6. F.C. Chen, "Back-propagation neural networks for nonlinear self-tuning adaptive control," IEEE Control Systems Magazine, vol. 10, no. 3, 1990, pp. 44-48.
7. J.R. Chen, R.K. Belew, and G.B. Salomon, "A connectionist network for color selection," Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks," Washington D. C., vol. II, 1990 pp. 467-470.
8. G. Courtadon. "A More Accurate Finite Difference Approximation for the Value of Options." Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 17, 1982, pp. 697-703.
9. J.C. Cox, S.A. Ross, and M. Rubinstein. "Option Pricing: A Simplified Approach." Journal of Financial Economics, vol. 7,

1979, pp. 229-263.

10. R.K. Elsley, "A learning architecture for control based on back-propagation neural networks," Proceedings ICNN-88, San Diego , vol. II, 1988, pp. 587-594.
11. B. Fernandez, A.G. Parlos, and W.K. Tsai, "Nonlinear dynamic system identification using artificial neural networks," Proceedings of IJCNN-90, San Diego, vol II, 1990, pp. 133-141.
12. A. Linden and J. Kindermann, "A correlative view on backpropagation," Proceedings of the International Conference Connectionism in Perspective, University of Zurich, 1988, pp. 377-384.
13. R.P. Lippman, "An introduction to computing with neural nets," IEEE ASSP Magazine, vol. 3, no. 4, 1987, pp. 4-22.
14. R. Morton. "The Theory of Rational Option Pricing." Bell Journal of Economics and Management Science, vol. 4, 1973, pp. 141-183.
15. J.J. Mcconnell and E. S. Schwartz. "LYON Taming." Journal of Finance, vol. 41, 1986, pp. 561-577.
16. K.S. Narendra and K. Parthasarathy, "Identification and control of dynamical systems using neural networks," IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 1, no. 1, 1990, pp. 4-27.
17. D.H. Nguyen and B. Widrow, "Neural networks for self-learning control systems," IEEE Control Systems Magazine, vol. 10, no. 3, 1990, pp. 18-23.
18. Y.H. Pao and D.J. Sobajic, "Nonlinear process control with neural nets," Neurocomputing, vol. 2, no. 2, 1990, pp. 51-59.
19. Y.H. Pao, Adaptive Pattern Recognition and Neural Networks, (addition-Wesley, Reading, MA 1989).
20. D. Psaltis, A. Sideris, and A.A. Yamamura, "A multilayered neural network controller," IEEE Control Systems Magazine, vol. 8, no. 2, 1988, pp. 17-21.
21. D.E. Rumelhart, G.E. Hinton and R.J. Williams, "Learning internal representation by error propagation," in: D.E. Rumelhart and J.L. McClelland, ed., in Parallel Distributed Processing: Exploration in the Microstructure of Cognition, vol I (MIT Press, 1986, pp. 318-362.
22. R.M. Stulz. "Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Applications." Journal of Financial Economics, vol. 10, 1982, pp. 161-185.

부 록

국내전환사채에 대한 수치해석적 가격결정방법

본문의 편미분 방정식 (1)에 전환사채의 특성을 나타내는 제반 경계조건들(만기 조건, 전환 조건, 극한기업가치 조건, 배당지급일 조건, 이자지급일 조건)을 적용해서는 해석적 해를 구할 수 없기 때문에 수치해석적 해를 구해야 한다. 본 연구에서는 근사적인 해를 구할 수 있는 방법으로 내재적 유한차분법(Implicit Finite Difference Method)을 이용하였다.

유한차분법을 적용시키기 위해서는 편미분방정식을 유한차분형태로 변화시키는 것이 필요하다. 전환사채는 주식가격과 시간의 함수로 나타나므로 그림 개념으로 볼 때 주식가격은 X축, 시간은 Y축, 전환사채의 가격은 Z축에 나타난다고 할 수 있다. 변화할 수 있는 주식가격의 최대 값이 S_{max}이고, 전환사채의 만기가 T일 때 주식가격 축을 m구간으로 나누고 시간 축을 n구간으로 나누면 주식가격의 단위변화량 h와 시간의 단위변화량 k는 다음과 같이 나타난다.

$$h = \frac{S_{max}}{m},\ k = \frac{T}{n}$$

내재적 유한차분법을 이용하여 전환사채에 대한 주식가격의 편미분을 정의하면 다음과 같다.

$$W_s = \frac{W_{i+1,\,j-1} - W_{i-1,\,j-1}}{2h}$$

$$W_{ss} = \frac{W_{i+1,\,j-1} - 2W_{i,\,j-1} + W_{i-1,\,j-1}}{h^2} \qquad \text{(A1)}$$

$$i = 1,2,\cdots,\ m-1,\ j = 1,2,\cdots,n.$$

또한 전환사채에 대한 시간의 편미분을 다음과 같이 정의한다.

$$W_t = \frac{W_{i,\,j} - W_{i,\,j-1}}{k} \qquad \text{(A2)}$$

식 (A1)과 식 (A2)를 본문의 식 (1)에 대입하고 또한 $S = hi,\ W = W_{i,\,j-1}$을 사용하면 식 (A3)를 유도할 수 있다.

$$W_{i,\,j} = a_{i-1} W_{i-1,\,j-1} + a_i W_{i,\,j-1} + a_{i+1} W_{i+1,\,j-1} \qquad \text{(A3)}$$

여기서 $a_{i-1} = \frac{1}{2} rki - \frac{1}{2} \sigma^2 k i^2$

$$a_i = 1 + \sigma^2 k i^2 + rk$$

$$a_{i+1} = -\frac{1}{2} rki - \frac{1}{2} \sigma^2 k i^2$$

식 (A3)를 행렬(Matrix)과 벡터(Vector)의 기호를 사용하여 간단한 형태로 정리하면 식 (A3)의 의미를 쉽게 파악할 수 있다.

$$A\overline{W}_{j-1} = \overline{W}_j \qquad \text{(A4)}$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} a_0 a_1 a_2 & & & \\ & a_1 a_2 a_3 & & \\ & & a_2 a_3 a_4 & \\ & & & \\ & & & a_{m-2} a_{m-1} a_m \end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_{j-1} = [W_{0,\,j-1} W_{1,\,j-1} W_{2,\,j-1} \cdots W_{m,\,j-1}]$$

$$\overline{W}_j = [W_{0,\,j}\ W_{1,\,j}\ W_{2,\,j}\ \cdots\ W_{m,\,j}]$$

위 연립방정식은 j시점의 전환사채가격 $\overline{W}_j$이 주어졌을 때 j-1시점의 가격 $\overline{W}_{j-1}$를 구하는 식으로 변수의 개수는 m+1개($W_{0,j}$ $W_{1,j}$ $W_{2,j}$ $\cdots$ $W_{m,j}$)이지만 방정식의 개수는 m-1개이므로 위 연립방정식을 풀기 위해서는 두 변수의 값을 고정시켜야 한다. 전환사채의 경우 경계조건들 중 두 가지의 극한 가치조건을 적용하면 이것을 해결할 수 있다. 내재적 유한차분법은 만기시점 T로부터 식 (A4)를 적용하여 한 단계씩 선형연립방정식을 풀면서 역으로 구해서 오면 시점 0에서의 전환사채가격을 구할 수 있다. 내재적 유한차분법의 단점은 위에서도 알 수 있듯이 매 단계마다 연립방정식을 풀어야 하므로 계산시간이 외재적 유한차분법에 비해서 많이 걸리게 된다. 그러나 외재적 유한차분법은 점근성을 보장하지 못하나 내재적 유한차분법은 점근성을 보장받을 수 있다.