

구분적선형시스템을 이용한 해양 구조물의 거동분석

Analysis of response behaviors of offshore mooring structures by a piecewise-linear system

마 호 성*
Mha, Ho-Seong

요지

해양계선시스템(offshore mooring system)의 거동을 구분적선형시스템(piecewise-linear system)을 이용하여 분석하였다. 계선시스템의 복원력을 유도하고 거기에 상응하는 균사차 구분적선형시스템의 복원력을 구하여 두 시스템의 복원력을 비교하였다. 다양한 파력 하에서의 계선시스템의 응답거동을 분석하였다.

시스템의 비선형정도 및 매개변수의 영향에 대하여 집중적으로 연구하였다. 시스템의 응답거동의 특성은 포인케어맵(Poincare map)을 통하여 확인하였다. 구분적선형시스템을 이용하여 분석한 결과, 계선시스템은 일반 조화, 열조화 및 복잡한 비선형거동인 chaos를 포함한 다양한 응답거동을 갖음을 알아냈다. 여러 값의 매개변수를 적용하여 시스템의 응답거동에 미치는 영향을 알아냈으며, 매개변수지도를 통하여 응답거동의 영역을 확인하였다.

Abstract

A piecewise-linear system is utilized to model the offshore mooring system. The approximated piecewise-linear restoring force is obtained to be compared with the analytically derived restoring force of a mooring system. Two systems are compared to verify the applicability of the piecewise-linear system to evaluate responses of the mooring system. Using the piecewise-linear system, the response behaviors of mooring systems are examined under various excitations.

Nonlinearity of the system and effects of both system and excitation parameters are intensively examined. System responses are identified mainly by observing Poincare maps. The mooring system is found to have various types of responses such as regular harmonic, subharmonic and complex nonlinear behaviors, including chaos by utilizing a piecewise-linear system. Various values of parameters are applied to determine the effects of parameters upon system responses. Response domains are determined by establishing parametric maps.

Keywords : piecewise-linear system, nonlinear, mooring system, Poincare map, chaos, parametric map

* 성회원·연세대학교 토풍공학과, 연구원

• 이 논문에 대한 토론을 1998년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

새로운 에너지자원에 대한 요구가 늘어나면서 탄화수소를 찾는 탐구와 그 생산은 점차적으로 깊은 바다로 향하여 왔다. 그 결과, 지난 수십 년간 해양구조물의 필요성은 증가되어 왔다. 해양 시스템은 큰 운동변위로 인해 본질적으로 비선형이 되며, 바람, 파도, 그리고 조류 등을 받는 시스템의 거동에 대한 정확한 예측은 학문상이나 실제상에 있어 커다란 도전이다. 복잡한 비선형, 또는 chaos일 가능성을 갖는 이러한 시스템의 거동이 많은 분석학적인 연구에서 보고되고 있으며, 이러한 결과는 랜덤파도 같은 노이즈의 근원에 대한 설계 또는 이해를 하는데 있어 희망을 준다는 점에서 많은 관심을 받고 있다⁶⁾.

비선형 요소를 갖는 동적시스템 중에서 재료적 또는 기하학적으로 비선형성을 갖는 많은 실제 구조시스템은 분석적으로 근사하게 구분적선형 시스템으로 나타낼 수 있다^{9,10)}. 계선이 느슨해지면서 강성도에 불연속성을 야기하므로 인해 몇몇 해양구조물의 구조적 특성 또한 구분적선형으로 나타내기에 적합하다 단일 자유도를 갖는 구분적선형시스템은 그 구조의 단순함과 반면 그 적용범위의 다양함으로 인해 이러한 해양구조물의 거동에 대한 연구에 이용되어 왔다^{5,11,12,13)}.

본 연구에서는 구분적선형시스템을 이용하여 외부파력(external excitation) 하에서의 계선시스템의 거동에 대하여 분석하였다. 구분적선형시스템이 계선시스템의 거동분석에 적합한가를 검토하기 위하여 계선시스템의 복원력을 유도하여 상응하는 구분적선형복원력을 비교하였으며, 그 결과 최대오차는 10^{-2} 로 그 적용의 타당성을 확인하였다. 시스템의 매개변수인 강성도비와 감쇠비 그리고 파력의 진폭 및 주기가 응답거동에 미치는 영향을 매개변수의 분석을 통하여 분석하였다.

2. 구분적선형시스템

구분적선형시스템의 지배운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$m_s \ddot{X} + c_s \dot{X} + R^*(X) = F(t) \quad (1)$$

여기서, X 는 변위, m_s 는 질량, c_s 는 감쇠상수로 선형으로 가정하며, $R^*(X)$ 은 구분적선형복원력이고, $F(t)$ 는 파력에 의해서 시스템 가해지는 힘이다. 구분적선형시스템의 복원력을 Fig. 1에 나타내었다. Fig. 1에서, k_1^* =한계변위내 강성도, k_o^* =한계변위외 강성도, A_c =한계변이다.

파도의 복잡성으로 인해 해양구조물과 파도의 상호작용을 계산하는 정확한 분석적 방법(exact analytical method)은 없으나, 작은 규모의 구조물(small body)에 대해서는 잘 알려진 Morison 방정식을 이용하여 그 파도에 의한 여기력의 근사치를 얻을 수 있다²⁾. 이 글에서는 파도에 의한 여기력을 앞으로 파력으로 규정한다. 식(1)에서 파력 $F(t)$ 는 관성력(inertia force)과 항력(drag force)으로 이루어진다. Morison방정식에 의해 상대속도모델의 단위길이에 대한 파력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f = f_I + f_D = C_M \rho \frac{\pi}{4} D^2 \dot{u} - C_A \rho \frac{\pi}{4} D^2 \dot{X} + C_D \frac{1}{2} \rho D |u - \dot{X}| (u - \dot{X}) \quad (2)$$

식(2)에서 u 와 \dot{u} 은 물입자의 수평방향의 속도와 가속도, X =시스템의 변위, C_M =관성계수, ρ =물입자의 질량, D =시스템의 지름, C_A =추가질량계수, 그리고, C_D =항력계수이다. 시스템에 가

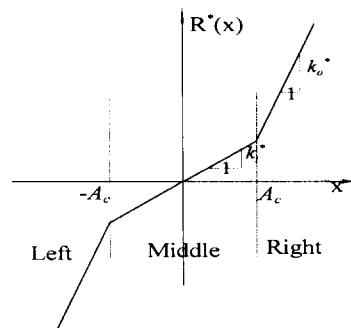


Fig. 1 구분적선형시스템의 복원력 $R(x)$

해지는 총 힘은 식(2)을 적분해서 얻을 수 있다. 항력항에 포함되어 있는 비선형 항은 선형화할 수 있으며^{1,8)}, 선형화된 항력을 이용하여, 파에 의한 전체 외력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = \rho V (1 + C_A) \dot{u} - \rho V C_A \ddot{X} + \frac{1}{2} \rho A_p C_D a_f (u - \dot{X}) \quad (3)$$

여기서 V =시스템의 부피, A_p =투영면적, a_f =항력선형계수이다. 식(3)에서 물입자의 속도와 가속도 u, \dot{u} 는 진행파의 물 표면에서의 profile로부터 선형파이론을 이용하여 구할 수 있다. 또한 파와 거동의 연결(coupling)을 풀기 위하여 파의 프로파일을 시스템의 평형상태($x=0$)에서 구하였다. 본 연구에서의 구분적선형시스템은 단자유도 시스템으로 가정하였으므로, 정수위($z=0$)에서의 수평방향의 파 운동만을 고려하였다. 수평방향의 파의 변위 $\mu(t)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mu(t) = A_0 \sin \Omega t \quad (4)$$

식(4)에서 $A_0 = \frac{\sin k' l / 2}{k'^2 / 2} \frac{H'}{2}$, k' =wave number, H' =파고, L =파장, Ω =파의 진동수이다. 식(3)을 식(1)에 대입하면 결정론적 파력을 받는 구분적선형시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m \ddot{X} + c_s \dot{X} + R^*(X) = \rho V (1 + C_A) \dot{u} - \rho V C_A \ddot{X} + \frac{1}{2} \rho A_p C_D a_f (u - \dot{X}) \quad (5)$$

여기서 편의상 차원을 갖는 실제 시간을 t^* 이라고 하고 식(4)로부터 u 와 \dot{u} 를 구하여 식(5)에 대입하면 다음과 같이 변환된다.

$$(m_s + \rho V C_A) \ddot{X} + (c_s + \frac{1}{2} \rho A_p C_D a_f) \dot{X} + R^*(X)$$

$$= -F_{oI} \sin(\Omega t^*) + F_{oD} \cos(\Omega t^*) \quad (6)$$

여기서, $F_{oI} = \rho V (1 + C_A) \Omega^2 A_0$, $F_{oD} = \frac{1}{2} A_p C_D a_f \Omega A_0$ 이다. 식(6)은 다시 다음과 같이 단순하게 변화시킬 수 있다.

$$m \ddot{X} + c \dot{X} + R^*(X) = F_o^* \cos(\Omega t^* + \phi) \quad (7)$$

여기서, $m = m_s + \rho V C_A$, $F_o^* = \sqrt{F_{oI}^2 + F_{oD}^2}$, $c = c_s + \frac{1}{2} A_p C_D a_f$, $\phi = \tan^{-1}(F_{oI}/F_{oD})$.

식(7)에 새로운 무차원 변수 $x = X/A$, $t = \Omega t^*$ 를 소개한 후, 정리하면 다음과 같은 정규화된 무차원 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{x} + 2\frac{\xi}{\beta}\dot{x} + R(x) = F_o \cos(t + \phi) \quad (8)$$

여기서, $\xi = c/c_s$ =감쇠비, $\beta = \Omega/\omega_r$ =진동수비, $F_o = F_o^*/(m \Omega^2 A)$. 정규화된 무차원 구분적선형 복원력은 강성도비 $\alpha (= K_o/K)$ 와 함께 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$R(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^2}(x-1) + \frac{1}{\beta^2} & x > 1 \\ \frac{x}{\beta^2} & -1 < x < 1 \\ \frac{\alpha}{\beta^2}(x+1) - \frac{1}{\beta^2} & x < -1 \end{cases} \quad (9)$$

식(9)로부터, 구분적선형시스템은 위상차 ϕ 를 0으로 주었을 때, 네 개의 파라메터 α, β, ξ, F_o 로 완전히 묘사됨을 알 수 있다. 다음은 여러 형태의 계선시스템의 특성과 복원력에 대하여 분석하였다.

계선시스템의 복원력과 구분적선형복원력

계선시스템이 갖는 비선형성은 기하학적인 형상으로부터 생긴다. 계선시스템은 평형상태에서의 계선의 구조에 따라 대표적으로 세 가지 경우로 나눌 수 있는데, 계선에 끌리텐션을 준 경우(pr-tension), 계선이 팽팽하게 있는 경우(taut), 그리고

계선이 늘어져 있는 경우(slack)이다. (Fig. 2)

이러한 계선시스템의 복원력은 구분적선형으로 표현하기에 적합하다(Fig. 2d 참조).

Fig. 2의 세 가지 경우중 계선이 항상 팽팽함을 유지하는 경우에 대한 집중적인 연구결과, 해양계 선구조물은 그 응답거동에서 풍부한 chaos를 갖음이 밝혀졌다⁴⁾. 여기에서는 구분적선형시스템의 적용성에 대하여 계선시스템의 복원력과 상응하는 구분적선형복원력을 구한 후 비교함으로써 알아보았다. 우선, 계선시스템 복원력을 구하기 위하여 계선이 항상 팽팽한 경우의 시스템을 선택하였다. 항상 계선이 팽팽하게 유지되기 위하여 연속 복원력 $R(x)$ 을 선택하였으며⁴⁾ 이 복원력은 초기 프리텐션($T_0 = l_0/l_c \geq 1$)을 유지한다. 계선시스템의 평면도와 프로파일은 Fig. 3에 나타내었다. 직교성(orthogonality)에 의하여 x_2 와 x_6 방향의 변위는 없다고 가정하였다. 계선은 구의 중앙에 헌지로 연결되어 있으므로 회전운동이 자유로우므로 x_5 방향의 회전은 계선의 길이 l_L, R 의 변형에 영향을 미치지 않는다. 또한 진행파의 프로파일은 x_2 방향에 대하여 일정하다고 가정하였으며, 그러므로 x_4 에 대한 회전은 무시한다.

6차 자유도를 갖는 시스템과 그 구조를 3차원에서 나타내면 Fig. 4a, b와 같다. Fig. 4b에서 위치가 바뀐 계선의 각 방향의 투영길이는 $l_1 = b + x_1$, $l_2 = a$, $l_3 = x_3$ 과 같다. 여기서 b 는 구의 중심과 벽면의 도르래까지의 거리이고, d 는 벽면과 구의 표

면까지의 거리이다. l_1, l_2, l_3 은 각 방향 x_1, x_2, x_3 에 대한 투영길이이다. 기준좌표의 원점은 평형 상태에서의 구의 중앙점으로 하였다. 임의의 위치 x (x 는 위치벡터) 원쪽의 계선의 길이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$l_L = (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{\frac{1}{2}} = (d^2 + (b + x_1)^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

같은 방법으로 반대편의 계선의 길이를 구할 수 있다.

$$l_R = (d^2 + (b - x_1)^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

복원력은 위치에너지 $V_M(x)$ 를 변위($x_{1,3}$)에 대하여 미분함으로써 구할 수 있다.

$$R_M(x) = \frac{dV_M(x)}{dx} \quad (12)$$

강성도(k)에 의한 위치에너지는 다음과 같다.

$$V_M(x) = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \quad (13)$$

총 위치에너지는

$$V_M(x) = k(l_L(x) - l_c)^2 + (l_R(x) - l_c)^2 \quad (14)$$

여기서 l_c 는 프리텐션을 받기 전의 계선의 원

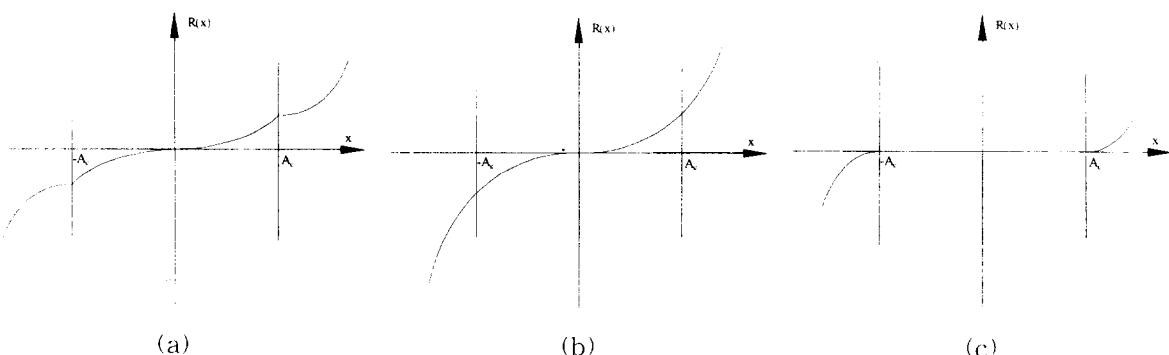


Fig. 2 Various configurations of mooring systems and corresponding restoring forces : (a) =pre-tension ; (b) =taut ; (c) =slack

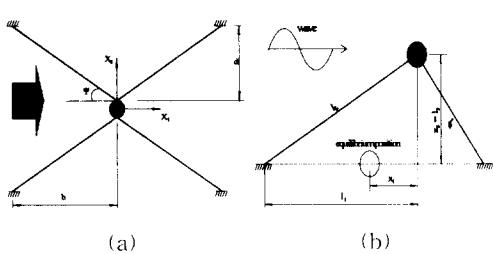


Fig. 3 Plan view and profile of the mooring system : (a) plan view, (b) profile

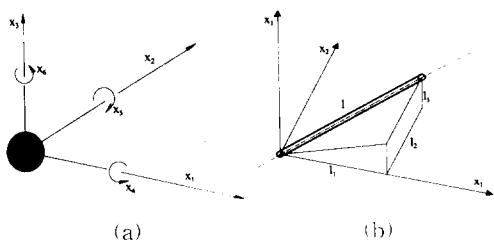


Fig. 4 Movements of sphere and cable : (a) 6 degree-of-freedom of sphere motion (translational movements : x_1, x_2, x_3 ; rotations : x_4, x_5, x_6), (b) 3 dimensional configuration of the spring cable.

래 길이이다. 새로운 값 l_c 를 도입함으로써 프리텐션은 자연스럽게 고려되며 프리테션 T_o 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T_o = k(l_{op} - l_c)$$

여기서 l_{op} 는 프리테션이 가해진 후의 계선의 길이이다. $x_1, 3$ 방향에 대한 복원력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_{x_i}(x) = \frac{\partial V_M(x)}{\partial x_i} \quad \text{for } i=1, 3 \quad (15)$$

그러므로 x_1 방향의 복원력은

$$R_{x_1}(x) = k \left\{ 4x_1 + l_c \left(2b \frac{l_L - l_R}{l_L l_R} - 2x_1 \frac{l_L + l_R}{l_L l_R} \right) \right\} \quad (16)$$

같은 방법으로 x_3 을 구하면 다음과 같다.

$$R_{x_3}(x) = k \left\{ 4x_3 + l_c \left(-2x_3 \frac{l_L + l_R}{l_L l_R} \right) \right\} \quad (17)$$

계선시스템에 상응하는 구분적시스템의 복원력을 구함에 있어 복원력은 대칭이므로 플러스(또는 마이너스) 지역의 $R_{linear}(x)$ 만이 필요하며, Least square method를 이용하였다. 계산의 편의를 위하여 식 (9)는 새로운 변수 k 만으로 표현할 수 있다.

$$R_{linear}(x) = \begin{cases} \lambda k x & |x| \leq A_c \\ \lambda k(x - A_c) + \lambda k A_c & |x| > A_c \end{cases} \quad (18)$$

가운데 구간인 $|x| \leq A_c$ 에서, ε^2 은

$$\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^N (R(x_j) - \lambda x_j)^2 \quad (19)$$

여기서 $R(x)$ 는 x_1 방향의 계선시스템의 복원력이다. 식 (16)을 식 (19)에 대입하여 풀면,

$$\varepsilon^2 = k^2 \sum_{j=1}^N (4x_j + l_c I - \lambda x_j)^2 \quad (20)$$

여기서 $I = 2b \frac{l_L - l_R}{l_L l_R} - 2x_1 \frac{l_L + l_R}{l_L l_R}$ 이다.

식 (20)의 에러 ε^2 를 최소화에는 $\partial \varepsilon^2 / \partial \lambda = 0$ 의 조건이 필요하다. 그러므로

$$\lambda_i = \frac{\sum_{j=1}^N (4x_j^2 + l_c I x_j)}{\sum_{j=1}^N x_j^2} \quad (21)$$

같은 방법으로, 오른쪽 구간인 $x \geq A_c$ 에서도 least square를 구하면 다음과 같다.

$$\varepsilon^2 = k^2 \sum_{j=1}^N (4x_j + l_c I(x_j - A_c) - \lambda_o(x_j - A_c) - \lambda_i A_c)^2 \quad (22)$$

$\varepsilon^2 = 0$ 에 대하여 식 (22)를 풀면,

$$\lambda_o = \frac{\sum_{j=1}^N (4x_j(x_j - A_c) + l_c I(x_j - A_c) - \lambda A_c(x_j - A_c))}{\sum_{j=1}^N (x_j - A_c)^2} \quad (23)$$

식 (21) 과 (23)에서 구한 λ 값을 이용하면 구분적 선형시스템의 강성도비 α 는 다음과 같이 구해진다.

$$\alpha = \frac{k_o}{k_i} = \frac{\lambda_o}{\lambda_i} \quad (24)$$

60° 와 90° 의 형상을 갖는 계선시스템(Fig. 2a)에서 $\Psi=60^\circ$, $\Psi=90^\circ$ 과 상응하는 구분적선형시스템의 복원력을 비교한 결과, 두 시스템의 복원력은 서로 매우 잘 일치한다(Fig. 4). 우선 $\Psi=90^\circ$ 인 경우(Fig. 5a, b), 프리텐션이 없는 경우($l_o/l_c=0$)에, 시스템은 가장 강한 비선형성을 보이며(Fig. 5a), 자연히 가장 큰 근사에러($\epsilon=0.00658$)가 강성도의 불연속점에서 발생한다. 기하학적으로 가장 비선형인 $\Psi=90^\circ$ 의 구조에서 프리텐션이 있는 경우에는($l_o/l_c=0.8$) 비선형성을 줄어듦을 알 수 있으며 두 시스템은 프리텐션이 없는 경우보다 더욱 잘 일치함을 알 수 있다(Fig. 5b). $\Psi=60^\circ$ 인 경우에는 계선시스템의 복원력은 거의 선형에 가까우며, 두 시스템은 거의 완벽하게 일치함을 알 수 있다(Fig. 5c). 이 경우의 에러는 $\epsilon=0.00778$ 로 $\Psi=90^\circ$ 의 경우의 10%수준이다. 강성도비 α 는 1.1058로써 거의 선형임을 알 수 있다. 두 시스템의 복원력을 비교한 결과, 구분적선형시스템은 계선시스템의 근사시스템으로써의 적용에 적합함을 밝혔다.

3. 국부 분석해와 수치시뮬레이션방법

구분적선형시스템의 운동방정식은 세 지역의 선형시스템으로 표현할 수 있으므로, 각 지역에

서의 분석해를 구할 수 있다. 구간 $|x| \leq 1$ 에서의 분석해는 다음과 같다.

$$x(t) = e^{-\xi\omega_i t}(A\sin\omega_{id}t + B\cos\omega_{id}t) + \rho(t + \phi + \theta) \quad (25)$$

식 (25)에서

$$A = \frac{\dot{x}_o - \rho\cos(\phi + \theta) + \xi\omega_i(x_o - \rho\sin(\phi + \theta))}{\omega_{id}},$$

$B = x_o - \rho\sin(\phi + \theta)$ 이며

$$\rho = \frac{F_o}{k_i\sqrt{(1 - \omega_i^2)^2 + (2\xi/\omega_i)^2}}, \quad \omega_i = \sqrt{k_i},$$

$$\omega_{id} = \omega_i\sqrt{1 - \xi^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \delta_i^2}{2\xi\delta_i}\right) \text{이다.}$$

구간 $x > 1$ 와 $x < -1$ 에서의 해도 같은 방법으로 구할 수 있으며 국부분석해를 이용한 값과 직접수치해석에 의한 값을 이용해 본 결과 일치함을 알아내었다. 실질적으로 시스템의 응답거동의 분석에서는 편의상 직접수치해석법에 의하여 시스템의 응답을 구하였다. 시스템의 응답거동을 시뮬레이션 함에 있어 4차 Runge-Kutta방법을 Newton방법과 함께 사용하였다³⁾.

수치해석방법에 대하여 Fig. 6으로 나타내었다. 시스템이 한계변위 안에서 머무를 때는 시스템의 거동은 구간의 $|x| \leq 1$ 시스템을 이용하여 주어진 초기치(x_o, \dot{x}_o)로 부터 구한다. 일정 구간내에서는 시스템거동은 직접수치해석방법인 Runge-Kutta방법이나 분석해를 이용하여 구할

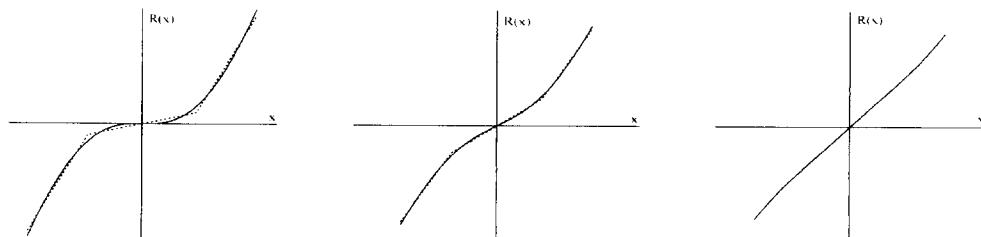


Fig. 5 Comparison between mooring restoring forces (solid line) and approximate piecewise-linear restoring forces (dashed line) with different configurations : $\Psi=90^\circ$ in (a), (b), $\Psi=60^\circ$ in (c) ; (a) $l_c=l_o$, $\alpha=7.7677$, (b) $l_c=0.8l_o$, $\alpha=2.3191$, (c) $l_c=0.8l_o$, $\alpha=1.2659$.

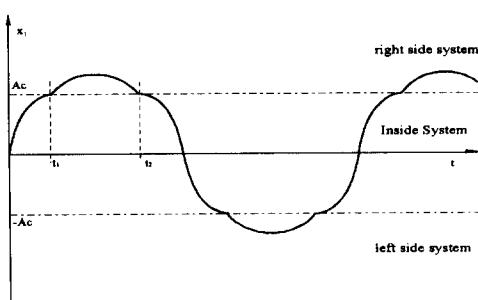


Fig. 6 Numerical solution procedure of piecewise-linear systems

수 있다. 시스템이 한계변위를 지나는 경우, 그때의 시간 t_1 은 Newton 방법을 이용하여 구하며, 또한 그때의 변위와 속도 (x_1, \dot{x}_1)를 구한다. 시스템이 오른쪽 경계를 넘은 후에는 오른쪽 구간의 시스템을 이용하여 시스템의 거동을 초기치 x_1, \dot{x}_1 을 이용하여 응답거동이 다시 시스템의 가운데 구간으로 돌아올 때 ($t = t_2$)까지의 거동을 구한다. 구분적 선형 시스템에서 강성도비 (α)를 1로 하면 시스템은 완전한 선형 시스템이 되며, 이 경우 수치해석 결과와 분석해를 비교해 본 결과 수치해석 결과는 정확함을 확인하였다.

4. 결과분석

우선 구분적 선형 시스템의 거동에서 전형적인 비선형 시스템으로써의 거동의 유무와 그 특성에 대하여 알아보았다. 비선형 시스템은 고유진동수와 변위의 상호작용을 나타내는 것으로 잘 알려져 있다. 또 하나의 전형적인 특성은 점프현상으로, 파력의 진폭을 일정하게 고정시킨 상태에서 여러 가지 진폭을 갖는 응답들이 존재하는 파력 진동수의 범위가 존재한다는 것이다. 더불어 수치해석 결과를 보다 확실한 검증을 위하여 구분적 선형 시스템의 불감쇠 자유진동(undamped free vibration)의 고유진동수 대비 분석적 표현⁷⁾과 그 결과를 비교하여 보았다(Fig. 7a). 수치해석 결과와 Nayfeh⁷⁾의 근사해는 실질적으로 서로 일치함을 볼 수 있으며, 그러므로 본 연구에서 구한 수치해석 방법은 정확하다는 것을 입증한다.

또한 그림으로부터 구분적 선형 시스템의 거동이 선형 시스템과는 다르게 고유진동수와 초기변위의 상호관계를 보임으로써 비선형 특성을 잘 보여주고 있다. 입력 파력의 진폭을 고정한 상태에서 진동수를 증가(또는 감소) 시킴으로써 frequency-response 곡선을 구하였다(Fig. 7b). 그림으로부터 점프현상은 잘 묘사되며, 잠재적인 공존거동의 존재를 알 수 있다. Fig. 8에서는 초기동요에 대한 시스템 응답의 민감도를 시스템의 두 거동을 이용하여 보이고 있다. 예전한 바와 같이 구분적 선형 시스템은 초기동요에 대하여 뚜렷한 민감도를 보인다. 매우 근접한 초기치로부터 출발한 두 응답은 서로로부터 분산함을 시간이력도로부터 볼 수 있다(Fig. 8a). 이 현상은 위상면(phase plane)에서 응답 궤도를 통하여 더 확연히 나타난다(Fig. 8b). 두 응답거동은 초기의 짧은 순간동안 서로 근접하게 운동하나 시간이 지남에 따라 서로 멀어지며, 궁극적으로 완전히 다른 궤도를 따라 운동하게 된다. 다음은 구분적 선형 시스템이 갖는 여러 형태의 거동의 특성을 시간이력도, 위상궤도, Fourier 스펙트럼, 포인케어맵, 그리고 bifurcation map 등을 통하여 분석하였다.

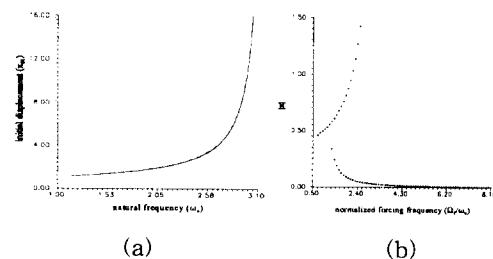


Fig. 7 Nonlinear phenomena of the piecewise-linear system : (a) comparison of approximate and numerical solutions in the interaction of initial displacement (x_0) and natural frequency (ω_n) (solid line = approximate analytical solution, dashed line = numerical solution); (b) frequency-response curve of a damped piecewise-linear system ($\xi=0.03, \alpha=10$).

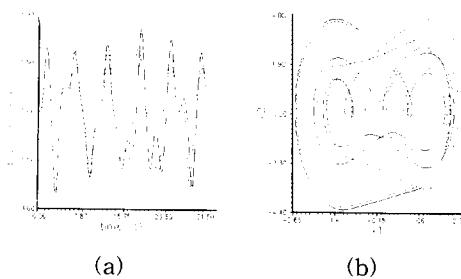


Fig. 8 Sensitivity of the piecewise-linear system to the initial perturbations ($\xi=0.03$, $\alpha=10$, $\beta=1$, $F_0=4.5$) : initial conditions (x_{01} , x_{02}) of solid line = (0, 0), dashed line = (0, 1.0); (b) phase trajectories.

본 연구에서는 일반거동은 P-N으로 표현하며, P-1은 응답거동이 주기적이며 그 주기가 파력의 주기의 N배임을 뜻한다. 그러므로 P-1응답은 조화운동, P-2응답은 주기가 파력주기의 두 배인 주기운동이다.

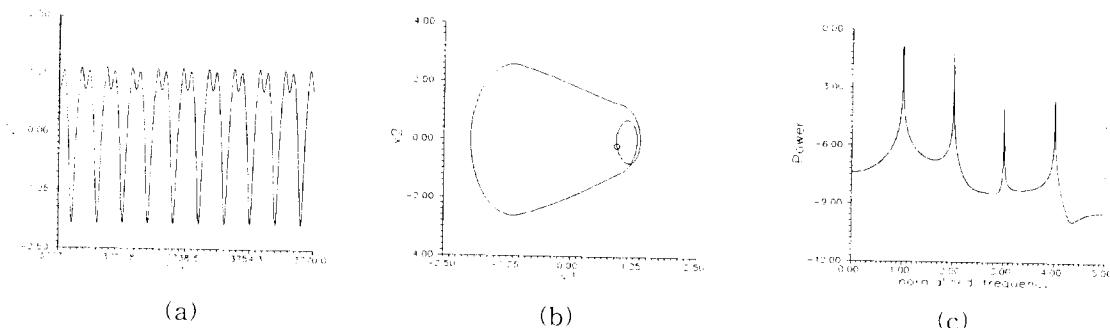


Fig. 9 P-1 regular response of a piecewise-linear system ($\xi=0.03$, $\alpha=10$, $\beta=1$, $F_0=2.7$) : (a) time history, (b) phase plane, (c) Fourier spectrum

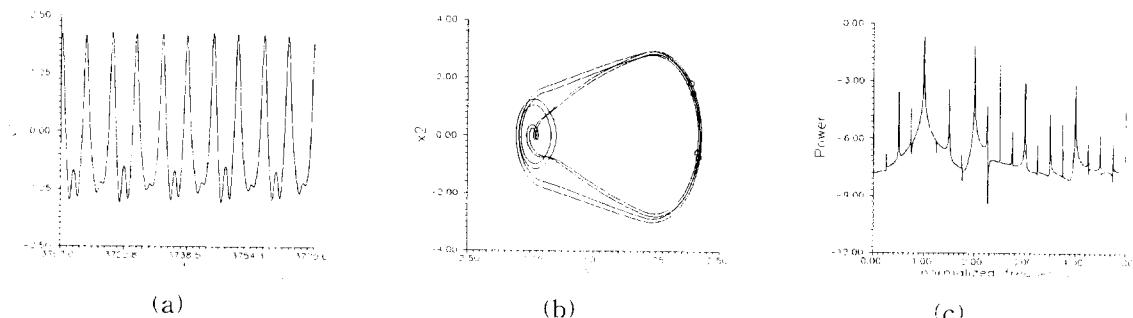


Fig. 10 P-2 regular response of a piecewise-linear system ($\xi=0.03$, $\alpha=10$, $\beta=1$, $F_0=3.23$) : (a) time history, (b) phase plane, (c) Fourier spectrum

Fig. 9에 P-1응답의 시간이력도와 위상궤도 (phase trajectory) 그리고 Fourier 스펙트럼을 나타내었다(a, b, c respectively). P-1응답은 조화운동을 시간이력 및 위상궤도를 통하여 잘 보여주고 있다(Fig. 9a, b). 위상면에서 P-1응답은 하나의 포인케어점과 폐곡선(closed orbit)을 보임으로 해서 응답거동이 조화주기운동임을 나타내고 있다. Fourier 스펙트럼에서는 최고점이 파력과 같은 진동수에서 발생함을 알 수 있다(Fig. 9c). 응답의 주기가 커지면서 시간이력도나 위상궤도만으로는 응답의 주기를 판별하기가 어려워짐을 알 수 있다(Fig. 10a, b). 그러나, 위상면상의 포인케어점들의 개수로써 응답주기는 결정될 수 있다. P-4응답은 위상면에서 네 개의 포인케어점을 보이고 있다(Fig. 10b). Fourier 스펙트럼에서는 열조화공명(subharmonic resonance)이 파력의 주기의 1/4의 위치에 나타난다(Fig. 10c).

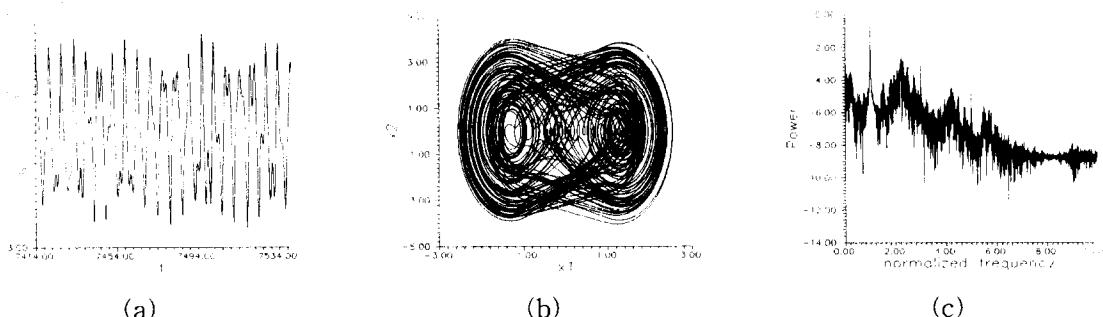


Fig. 11 Chaotic response of a piecewise-linear system ($\xi=0.03$, $\alpha=10$, $\beta=1$, $F_0=4.5$) : (a) time history, (b) phase plane, (c) Fourier spectrum

Fig. 10에 chaos응답의 결과를 나타내었다. 시간 이력도는 결정론적인 시스템(deterministic system)으로부터 불규칙한 운동을 보임으로써 chaos의 잠재적인 존재를 시사한다(Fig. 11a). 위상궤도는 chaos의 전형적인 특성인 위상면을 채우고 있으며, 궤도는 결코 닫히지 않음을 알 수 있다(Fig. 11b). Fourier스펙트럼은 넓은 주파수대(broad band spectrum)에 에너지가 퍼져있음을 보이며, 이는 chaos응답의 존재를 암시하고 있다(Fig. 11c). 시간이력도, 위상궤도, 그리고 Fourier스펙트럼은 chaos의 존재를 추론하는데 쓰일 수 있다. 그러나 포인케어맵은 위상면상에서 strange attractor의 fractal 구조를 보임으로써 chaos의 존재에 대한 명확한 증거를 제시할 수 있다¹⁶⁾.

다음은 구분적선형시스템이 갖는 chaos응답거동을 포인케어맵 상에 표시하였다(Fig. 12). 본 연구에서는 이 포인케어맵을 이용하여 시스템의 응답거동의 특성을 분석한다.

시스템 및 파력의 매개변수가 시스템의 응답거동에 미치는 영향을 분석함에 앞서 감쇠비와 파력의 진폭에 대한 period-doubling 현상을 연구하였다. period-doubling 현상은 chaos시스템의 큰 특징 중 하나로 시스템의 거동 중 chaos의 존재를 보여준다. Fig. 13은 일반주기반응에서 chaos응답으로 가는 cascade를 보여주고 있다. Fig. 13a에서 감쇠비가 줄어듦에 따라 시스템의 응답의 주기는 어떤 값에서 두 배로 늘어남을 알 수 있다. 이러한 현상은 감쇠비가 한계값(ξ_c)에 이를 때까지 계속되며 한계값이 하에서는 시스템의 거동은 chaos가 된다. 이와 같은 현상은 파력

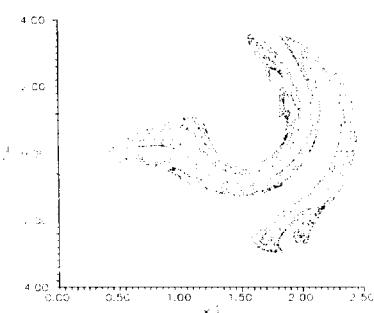


Fig. 12 Poincare map of the chaotic response of the piecewise-linear system ($\xi=0.03$, $\alpha=10$, $\beta=1$, $F_0=4.5$)

의 진폭을 증가시키는 경우에도 발견된다(Fig. 13b). 이러한 현상을 bifurcation이라고 한다.

구분적선형시스템의 bifurcation diagram으로부터 매 bifurcation마다 시스템의 응답거동의 주기는 항상 두 배로 늘어날 필요는 없으며, 세 배로도 늘어날 수 있음을 알아내었으며, chaos거동이 발생한 후에도 계속적인 bifurcation 후 시스템의 거동은 다시 일반주기거동으로 돌아올 수도 있음을 Fig. 13b로부터 발견하였다. 또한 chaos거동이 주로 발생하는 bifurcation diagram상의 영역에서 열조화운동(subharmonic motion)이 고주기거동이 발생하는 지역에서 좁은 창을 보이면서 불규칙적으로 발생함도 알아내었다. period-doubling은 2-D 위상면상에서 더욱 확실히 알 수 있다(Fig. 14). 여기서는 bifurcation현상을 감쇠비를 감소하면서 설명한다. 감쇠비가 $\xi=0.3$ 인 경우 시스템은 P-1거동을 보임을 알 수

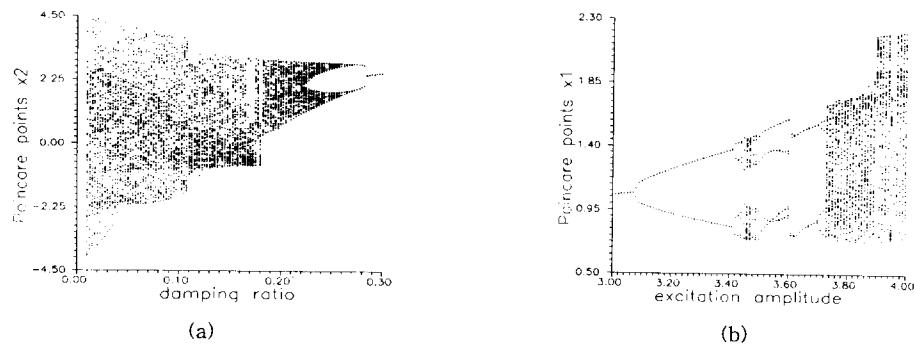


Fig. 13 Period-doubling processes in bifurcation diagrams : (a) varying damping ratio(ξ) ; (b) varying excitation amplitude(F_0)

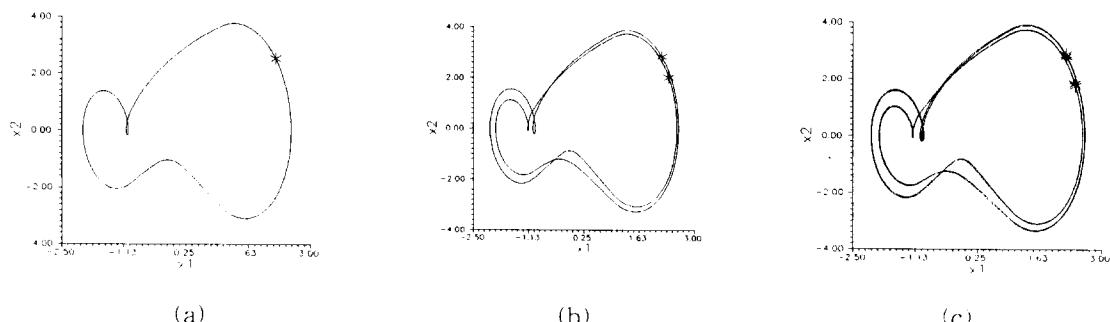


Fig. 14 Cascade of period-doubling processes with the decreasing damping ratio in the phase plane and Fourier spectra : (a) P-1 response ($\xi=0.3$), (b) P-2 response ($\xi=0.275$), (c) P-4 response ($\xi=0.265$) ; * = Poincare points.

있다(Fig. 14a). 감쇠비가 $\xi=0.275$ 인 경우, 위상 궤도는 P-1거동의 궤도를 두 번 반복하며, 포인 케어점이 두 개임을 알 수 있다(Fig. 14b). 감쇠 비가 $\xi=0.265$ 인 경우 P-4거동이 나타나며, 위상 궤도는 네 번 P-1응답의 궤도와 비슷한 궤도를 그리며 근처 주위를 맴돌며 위상면을 매워 감을 알 수 있다. 또한 네 개의 포인케어점을 갖음을 알 수 있다(Fig. 14c). 더 작은 감쇠비($\xi=0.2575$) 가 시스템에 주어질 경우, 8개의 포인케어점을 보이며 위상궤도는 8 번 겹쳐지게 된다. 이러한 period-doubling현상을 계속하여, 위상궤도는 위 상면을 더욱더 철저히 매워가면서 chaos응답으로 변해간다. 다음은 강성도비가 시스템의 거동에 미치는 영향을 살펴보았다. 우선 강성도비를 적은 값부터 큰 값으로 변화하여 시스템에 적용하면서 자유운동에 대한 위상궤도를 구하였다(Fig. 15).

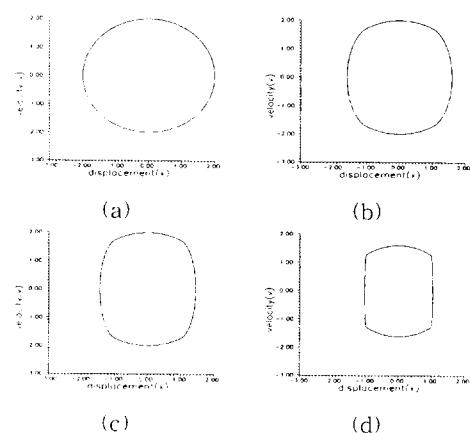


Fig. 15 Phase trajectories of undamped free vibrations with various stiffness ratios : initial conditions (x_{01}, x_{02}) = (0, 2) ; (a) $\alpha=1$ (linear system), (b) $\alpha=5$, (c) $\alpha=10$, (d) $\alpha=1000$.

강성도비가 $\alpha=1$ 인 경우는 구분적선형시스템은 완전한 선형시스템을 이루며, 시스템의 거동은 원형궤도를 위상면에 나타낸다(Fig. 15a). $\alpha=5$ 인 경우 위상궤도는 원형이 아닌 타원궤도를 보이며, $\alpha=10$ 인 경우 위상궤도는 심한 타원을 이룬다(Fig. 15b, c). 극단적으로 높은 강성도비 $\alpha=1000$ 을 갖는 경우, 한계변위는 경계면이 되며, 충돌운동(impacting motion)과 같이 시스템은 한계변위의 위치에서 같은 크기의 속도를 갖고 반대편으로 튀겨 나감을 보인다(Fig. 15d). 이 결과로부터 강성도비 α 가 증가함에 따라 시스템은 높은 비선형성을 보임을 알 수 있으며, α 를 극단적으로 크게 가정함으로써 충돌시스템의 거동을 분석하는데 구분적선형시스템이 쓰여질 수 있음을 알았다. Fourier 스펙트럼과 거동진폭곡선(response amplitude curve)을 이용하여 강성도비의 영향을 분석해 보았다. 강성도비를 증가하면서 각 강성도값을 갖는 시스템의 응답에 대한 Fourier 스펙트럼과 거동진폭곡선을 구한 후 동일 공간에 둘으로써 3차원 상에서 보다 나은 시각적 정보를 제공하였다(Fig. 16). 앞의 결과와 마찬가지로 $\alpha=1$ 인 경우, 시스템은 선형시스템과 마찬가지로 하나의 주된 공명진동수(resonant frequency)를 보인다(Fig. 16a). α 가 증가함에 따라 ($1 < \alpha \leq 5$), 같은 진동수를 갖는 조화운동이 $(2m-1)\omega$ ($m=1, 2, 3, \dots$)의 꼴로써 주공명진동수(primary resonant frequency)의 기수 배로 나타남을 알 수 있다. 이러한 형상은 잘 알려진 비선형적 현상이다. $\alpha=6$ 인 경우 새로운 진동수가 $m\omega$ 의 꼴로서 추가적으로 나타나며 이는 시스템거동이 대칭성을 잃음을 시사한다.

주공명진동수는 α 가 증가하면서 그 값의 변화가 없으며 단지 그 진폭이 약간 감소한다. $\omega/2$ 의 값을 갖는 열조화에 해당하는 진동수가 $m\omega/2$ 의 추가적인 진동수와 함께 $\alpha=10$ 일 때 나타남을 알 수 있다. Fourier 스펙트럼의 결과로부터 선형(linearity)은 시스템의 강성도비가 작은 경우 ($\alpha=2$)에서부터 깨어짐을 고주파수영역에 추가로 조화진동수를 보임으로써 알 수 있다. 강성도비가 더욱 증가함에 따라 열조화진동수가 발생하며, 시스템은 강한 비선형으로 바뀐다. Fourier

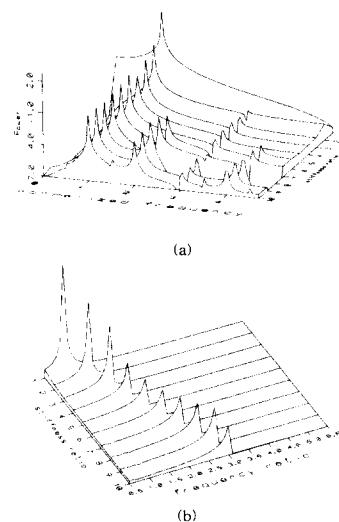


Fig. 16 Increasing nonlinearity of the piecewise-linear system with varying stiffness ratios ($\xi=0.03$, $F_0=3$) : (a) surface view of the Fourier spectra, (b) surface view of frequency-response curves.

스펙트럼의 결과와 마찬가지의 경향이 거동진폭곡선에서도 볼 수 있다(Fig. 16b). 시스템의 강성도비가 증가하면서 응답거동의 진폭곡선은 더욱 구부러지면서 점프현상은 더욱 확연히 목격할 수 있다. 강성도비의 변화에 따른 구분적선형시스템의 응답의 분포상황은 뒤에 매개변수에 대한 분석에서 더욱 자세히 소개한다.

일반 거동 또는 chaos응답거동 외에 또 다른 형태의 비주기성이며 chaos가 아닌 형상이 있는데 이를 준주기(quasi-periodic)운동이라 한다. 준주기운동은 시스템의 거동에 불약분(incommensurate) 진동수의 존재에 의하여 발생한다. 이러한 준주기운동은 감쇠가 없거나(undamped), 감쇠가 아주 적은 경우의 구분적선형시스템의 거동에서 발견되었다(Fig. 17). 준주기운동은 계속적인 닫힌 모습(continuous closed figure) 또는 궤도의 형상으로써 판독할 수 있다. 감쇠가 없는 경우 적은 강성도비 ($\alpha=3$)를 갖는 구분적선형시스템은 전형적인 준주기운동을 위상궤도와 포인케어맵을 통해 보여주고 있다(Fig. 17a, b). 포인케어맵은 하나의 완전히 닫힌 곡선을 보이고

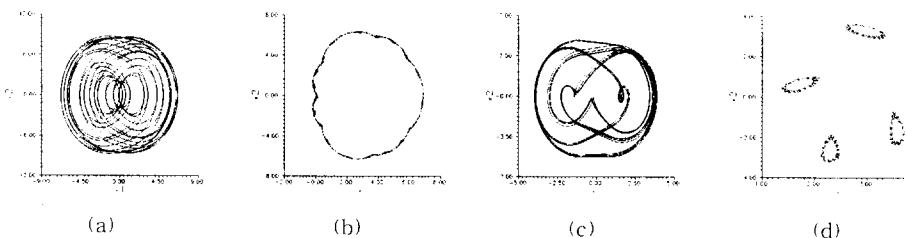


Fig. 17 Quasiperiodic responses of the piecewise-linear systems : (a) (b) undamped system ($\xi=0$, $\alpha=3$, $\beta=1$, $F_0=4.5$) ; (c) (d) slightly damped system ($\xi=0.0001$, $\alpha=4$, $\beta=1$, $F_0=4.5$) ; (a) (c) phase orbits, (b) (d) Poincaré maps.

있는데, 이 현상은 시스템의 운동이 원환체(torus)에서 일어나며, 준주기운동이 포인케어면(Poincaré section)에서 원환체의 표면을 채운 것으로 설명할 수 있다. 매우 적은 감쇠를 갖는 시스템에서 또 다른 형태의 준주기운동이 발견되었는데, 위상궤도가 열조화운동과 흡사한 것을 볼 수 있으며 이는 포인케어맵을 관찰하면 쉽게 설명될 수 있다(Fig. 17c). 시스템의 거동이 네 개의 주기 attractor 주위를 맴도는 것을 포인케어맵을 통하여 알 수 있다. 본 연구를 통하여, 준주기운동은 낮은 강성도비($\alpha \leq 7$)와 매우 적은 감쇠비($\xi \leq 0.0001$)를 갖는 시스템에서 발견됨을 알 수 있다.

각 매개변수의 영향을 분석하기 위하여 강성도비, 감쇠비, 진동수비, 그리고 파력의 진폭에 대하여 매개변수분석을 통하여 매개변수지도를 구하였으며, 지도상에서 각 거동의 특성에 따라 응답거동의 분포를 구하였다. 우선, 강성도비와 파력진폭의 영향을 알아보았다. Fig. 18의 매개변수지도는 여러 종류의 시스템거동의 발생영역을 보여주고 있다. 강성도비가 $\alpha \leq 6$ 인 경우, 모든 시스템은 조화운동을 보이며 두 경우만이 열조화운동을 보이고 있다(2/102, approximately 2%). 강성도비가 $\alpha=7$ 인 경우, 시스템은 더 많은 열조화운동을 보이며(4/17 : 24%) 높은 비선형성을 보이나 아직 chaos응답을 갖지는 않는다. 보다 높은 강성도비($\alpha \geq 8$)를 갖는 경우, 주어진 파력의 진폭에 따라 chaos응답이 다른 조화운동 및 열조화운동과 함께 나타나기 시작한다. 이러한 경향은 강성도비가 증가함에 따라 계속해서 나타남을 Fig. 18을 통해서 알 수 있다.

그러므로, 강성도비가 적은 시스템에서는 ch-

aos응답이 나타나지 않음을 본 연구결과로부터 알았으며, 높은 강성도비를 갖는 시스템일수록 고도의 비선형거동을 갖음을 알아내었다. 또한, 강성도비가 $\alpha=10$ 인 시스템이 가장 많은 chaos응답거동을 갖음을 알아내었다.

시스템의 감쇠비가 응답거동에 미치는 영향을 매개변수지도와 포인케어맵을 통하여 알아보았다. Fig. 19는 여러 값의 감쇠비를 시스템에 적용한 결과로써 감쇠비와 파력의 진폭에 대한 매개변수영역에서의 응답거동의 분포를 보여주고 있다. chaos응답이 발생하는 경우는 전체의 60%로 일반응답의 발생확률보다 빈번함을 알 수 있다. 각 감쇠비에 대한 chaos응답의 발생빈도는 감쇠비가 $\xi=0.18$ 보다 작을 경우에는 거의 일정하며, 감쇠비가 $\xi \geq 0.19$ 인 경우부터는 chaos응답거동의 발생률이 감쇠비의 증가에 따라 줄어듦을

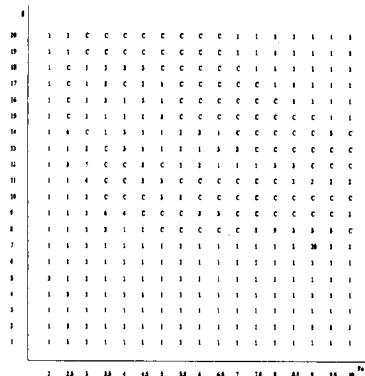


Fig. 18 Distribution of the responses of the piecewise-linear system on the parametric domain map of stiffness ratio α and excitation amplitude F_0 ($\xi=0.03$, $\beta=1$).

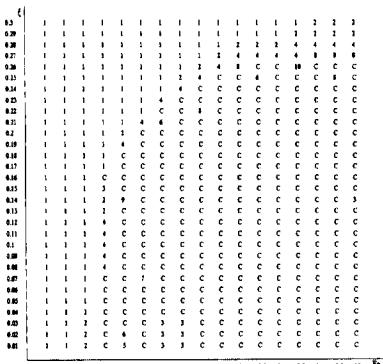


Fig. 19 Distribution of the responses of the piecewise-linear system on the parametric domain map of damping ratio ξ and excitation amplitude F_0 ($\alpha=10$, $\beta=1$).

알 수 있다. 감쇠비가 $\xi \geq 0.26$ 인 경우부터는 더 이상 chaos응답이 발생하지 않는다. 감쇠비가 증가함에 따라 시스템의 응답거동에서 chaos응답이 사라지는 현상은 Fig. 13a의 bifurcation현상으로부터 보다 명료하게 나타난다. 이 결과로부터 감쇠비의 영향은 그 값이 한계값보다 커지면

시스템의 응답거동은 chaos를 잊으며 일반주기 운동을 보인다고 말 할 수 있다. 감쇠비의 영향을 보다 자세히 나타내기 위해 감쇠비를 증가하면서 시스템의 응답거동을 포인케어맵을 통하여 분석해 보았다(Fig. 20).

감쇠가 없는 경우의 시스템의 응답거동은 chaos 응답을 이루지 못하며 위상면상에서 불규칙한 운동을 보임을 알 수 있다(Fig. 20a). 그러므로 감쇠비가 없는 시스템의 응답거동에서는 chaos운동의 fractal 패턴을 볼 수 없음을 알 수 있다. 허나, 매우 작은 감쇠비를 갖는 시스템이라도 ($\xi=0.005$), 시스템응답의 attractor들은 수축하기 시작하면서 strange attractor의 형상을 보이기 시작한다(Fig. 20b). $\xi=0.01$ 인 경우, 시스템의 응답거동은 많이 정돈은 되었으나, 아직은 흐트러진 모습의 chaos 응답(fuzzy chaotic response)을 보인다(Fig. 20c). $\xi=0.03$ 인 경우, 시스템의 응답은 깨끗한 chaos응답의 fractal structure를 위상면상에 보임을 알 수 있다(Fig. 20d). $\xi=0.1$ 인 경우에는 많이 수축하였으나, 여전히 chaos응답을 유지한다(Fig. 20e). 궁극적으로 감쇠정도가 한계값(여기서는 ξ

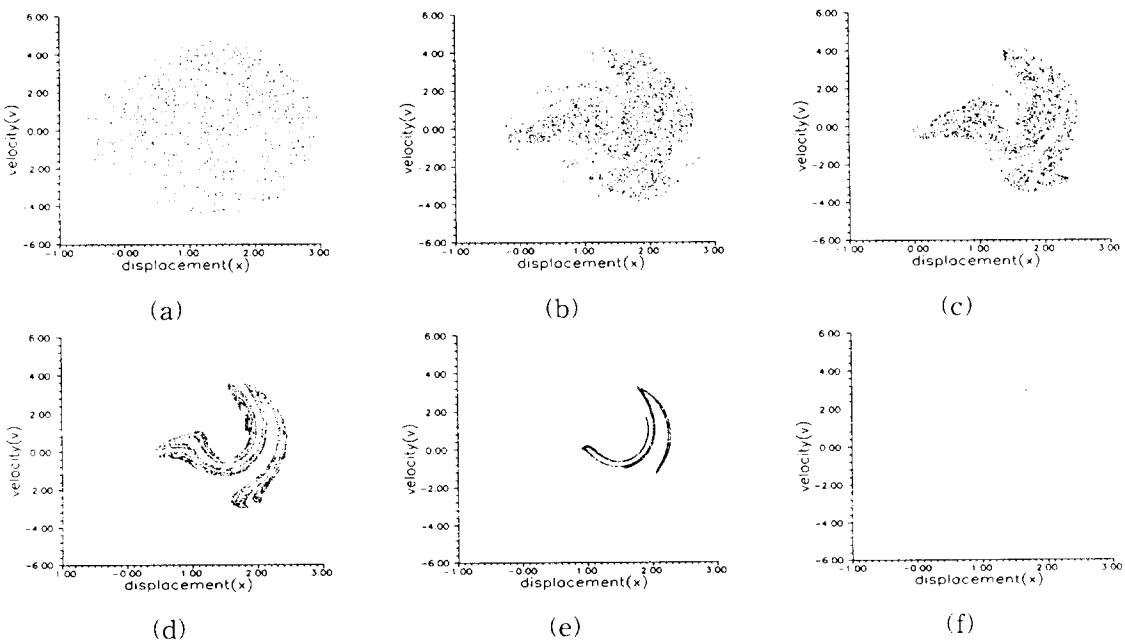


Fig. 20 System responses with various damping ratios ($\alpha=10$, $\beta=1$, $F_0=4.5$) : (a) $\xi=0$, (b) $\xi=0.005$, (c) $\xi=0.01$, (d) $\xi=0.03$, (e) $\xi=0.1$, (f) $\xi=0.21$

=0.21) 이상 커지면 시스템의 응답거동은 P-2응답으로 바뀜을 알 수 있다(Fig. 20f). 시스템의 감쇠비의 영향분석결과, 일정범위내의 감쇠비는 시스템의 응답거동에서 chaos응답을 유발시키나, 한계값을 넘으면, 결국 시스템으로부터 chaos성질을 파괴함을 알아내었다.

마지막으로, 파력의 주기와 진폭이 시스템의 응답거동에 미치는 영향을 연구하였다(Fig. 21). 결과적으로 말해 진동수비 β 가 일정범위인 [0.5, 2.2]밖에 있을 경우에는 시스템의 응답거동은 모두 일반조화운동인 P-1응답인 것을 알아내었다. 대부분의 chaos응답은 진동수비 β 가 [0.8, 1.1] 안에 있을 때 일어나며, 몇몇 chaos응답이 $\beta=0.5$, $\beta=0.6$ 일 때 파력이 큰 진폭을 갖는 경우에 일어남을 발견하였다. 그러므로 구분적선형시스템의 chaos응답은 파력의 주기가 내부시스템($-1 \leq x \leq 1$)의 고유진동수(ω)와 근사할 때 주로 일어남을 알아내었다. Fig. 22는 두 경우의 chaos응답을 보여주고 있는데, 파의 진동수가 같고 그 외의 매개변수가 변화할 경우 chaos응답의 구조는 비슷하였으나(Fig. 20 참조), 파의 진동수가 다른 경우 시스템의 chaos응답구조는 근본적으로 다름을 볼 수 있다. 그러므로 chaos응답의 모양은 파의 주기에 따라 바뀜을 알 수 있다.

파력의 진폭이 시스템응답에 미치는 영향은 앞에서의 결과들로부터 정리할 수 있다. 강성도비

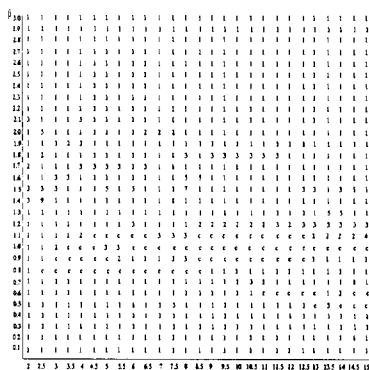


Fig. 21 Distribution of the responses of the piecewise-linear system on the parametric domain map of frequency ratio β and excitation amplitude F_0 ($\alpha=10$, $\xi=0.03$).

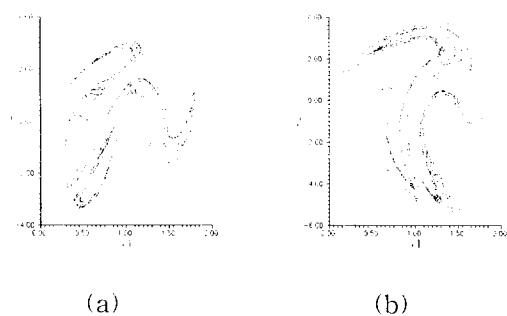


Fig. 22 Chaotic responses of the piecewise-linear systems with different frequency ratios β ($\xi=0.03$, $\alpha=10$): (a) $\beta=0.5$, $F_0=14$, (b) $\beta=0.6$, $F_0=13$.

가 작은 경우 ($\alpha \leq 10$)에는 진폭이 큰 파력이 보다 많은 chaos응답을 유발하며, 강성도비가 큰 경우에는 진폭이 적은 파력에 의해 chaos응답이 많이 발생함을 알 수 있다(Fig. 18). 강성도비가 $\alpha=10$ 인 경우, chaos응답은 $F_0 \geq 3$ 인 경우에 발생하고 더 적은 진폭의 파력에 대하여는 발생하지 않는다. 그러므로 chaos응답은 충분히 큰 파력에 의하여(그리고 시스템응답의 비선형성과 어울려서) 발생함을 알 수 있다. 감쇠비가 큰 시스템이 chaos응답을 갖기 위해서는 상대적으로 큰 진폭을 갖는 파력이 필요하다는 사실도 알아내었다(Fig. 19).

5. 결 론

해양계선시스템의 거동분석을 위하여 구분적 선형시스템의 거동을 분석한 결과, 구분적선형시스템은 조화, 열조화 및 chaos응답거동을 포함한 다양한 운동을 보임을 알았다. 매개변수지도를 이용한 분석을 통하여 모든 응답거동의 영역을 알아내었으며 각 거동의 특성을 분석하였다. 대부분의 chaos응답거동은 파력의 진동수가 내부시스템의 고유진동수와 근사한 경우에 발생하며 이러한 chaos응답은 강성도비가 $\alpha \geq 8$ 인 경우에만 존재함을 알았다. 시스템의 감쇠의 역할은 chaos응답의 발생에 큰 역할을 함이 밝혀졌으며, 감쇠비의 크기가 $[0.01 \leq \xi \leq 0.26]$ 인 경우에

chaos응답이 생기는 것을 알아냈다. 보다 큰 감쇠비는 궁극적으로 시스템으로부터 chaos응답의 발생을 소멸시킨다는 사실도 알아내었다. 같은 주기를 갖는 파력 하에서는 chaos응답은 다양한 진폭과 감쇠비아래에서도 유사한 형상을 유지하며 이로부터 chaos의 형상은 가해진 외부파력의 진동수에 종속함을 알아내었다.

본 연구를 통하여 구분적선형시스템은 해양계 선시스템의 거동분석에 있어 유용하게 쓰일 수 있음을 확인하였으며, 넓은 영역의 매개변수값에 대하여 가능한 시스템의 응답거동을 밝혀 내었다. 본 연구의 결과로부터 해양계선시스템의 거동분석에 있어 절대적으로 기초적인 연구의 시작이나 이러한 비선형적 거동의 발견 및 분석은 실제구조물의 거동분석에서 예측할 수 없었던 불규칙한 운동에 대하여 보다 많은 정보를 제공할 수 있으며, 더 나아가 설계 및 해석방법의 개선에도 쓰여질 수 있다.

참 고 문 헌

1. Dao, B. V. and Penzien, J. (1982). Comparison of Treatments of Non-linear Drag Forces Acting on Fixed Offshore Platforms. *Applied Ocean Research*, 4 (2), 66-72.
2. Dean, R. G. and Dalrymple, R. A. (1984). *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. World Scientific.
3. Gerald, C. F. and Wheatley, P. O. (1989). *Applied Numerical Analysis*. 4th Ed. Addison-Wesley Publishing Company.
4. Gottlieb, Oded and Yim, Solomon C. S. (1992). Nonlinear Oscillations, Bifurcations and Chaos in a Multi-Point Mooring System with a Geometric Nonlinearity. *Applied Ocean Research*, 14, 241-257.
5. Huang, Y. M., Krousgrill, C. M. and Bajaj, A. K. (1989). Dynamic Behavior of Offshore Structures with Bilinear Stiffness. *Journal of Fluids and Structures*, 3, 405-422.
6. Moon, F. C. (1987). *Chaotic Vibrations : An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons.
7. Nayfeh, A. H. and Mook, D. T. (1979). *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons.
8. Sarpkaya, T. and Isaacson, M. (1981). *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*. Van Nostrand Reinhold.
9. Schulman, J. N. (1982). Chaos in Piecewise-Linear Systems. *Physical Review A*, 28(1), 477-479.
10. Shaw, S. W. and Holmes, P. J. (1983). periodically Forced Piecewise Linear Oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 90(1), 129-155.
11. Thompson, J. M. T., Bokaiyan, A. R. and Ghaffari, R. (1983). Subharmonic Resonances and Chaotic Motions of Bilinear Oscillator. *Journal of Applied Mathematics*, 31, 207-234.
12. Thompson, J. M. T., Bokaiyan, A. R. and Ghaffari, R. 1984. Subharmonic and Chaotic Motions of Compliant Offshore Structures and Articulated Mooring Towers. *Journal of Energy Resources Technology*, 106, 106-198.
13. Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B. (1986). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley & Son, Chichester.

(접수일자 : 1997. 7. 28)