

# 평균 포인케어맵을 이용한 Noisy Field에서의 chaos거동의 검출방법

## Detecting Chaotic Motions of a Piecewise-Linear System in the Noisy Fields by Mean Poincare Maps

마 호 성\*  
Mha, Ho-Seong

### 요 지

랜덤하중 하에서의 구분적선형시스템이 갖는 노이즈(noise)의 영향으로 인해 그 특성이 많이 감소되거나 소멸된 응답거동으로부터 chaos거동을 검출하는 방법을 개발, 분석하였다. 해양에서 구조물이 받는 파력은 결정론적(deterministic)이 아닌 추계론적(stochastic)이다. 바람, 파도 그리고 조류 등에 의한 파력은 유한도의 랜덤성(randomness)을 갖으며, 이러한 파력은 지배적인 조화가진하중(harmonic excitation force)과 정규 백색노이즈(Gaussian white noise)를 더함으로써 표현할 수 있다. 외적 동요(external perturbation)를 받는 시스템의 응답거동은 그 거동이 방해 받으며(disturbed), 이로 인해 chaos응답거동을 확인하기가 어려우며, 그 거동의 특성이 일반적인 랜덤거동과 다를 바가 없다. 이러한 경우, 평균 포인케어맵(mean Poincare map)을 이용하여 랜덤노이즈에 의해 발견되지 않는 chaos응답거동을 식별할 수 있다.

본 연구에서는 직접수치시뮬레이션(direct numerical simulation)상에서 이러한 평균 포인케어맵을 만드는 방법을 개발하였으며, 얻어진 평균 포인케어맵의 적용범위에 대하여 분석하였다. 평균 포인케어맵은 노이즈가 포함된 조화가진하중을 받는 시스템의 chaos응답거동을 확인하는데 있어서 노이즈의 강도가 높을 때 일반적인 포인케어맵만으로는 놓칠 수 있는 chaos응답거동을 성공적으로 확인할 수 있음을 알아내었다. 또한 시스템의 응답거동에서 chaos의 특성이 완전히 사라지는 노이즈의 강도를 얻을 수 있음도 알아내었다.

### Abstract

The method to distinguish chaotic attractors in the perturbed response behaviors of a piecewise-linear system under combined regular and external randomness is provided and examined. In the noisy fields such as the ocean environment, excitation forces induced by wind, waves and currents contain a finite degree of randomness. Under external random perturbations, the system responses are disturbed, and consequently chaotic signatures in the response attractors are not distinguishable, but rather look just random-like. Mean Poincare map can be utilized to identify such chaotic responses veiled due to the random noise by averaging the noise effect out of the perturbed responses.

In this study, the procedure to create mean Poincare map combined with the direct numerical simulations is provided and examined. It is found that mean Poincare maps can successfully distinguish chaotic attractors under stochastic excitations, and also can give the information of limit value of noise intensity with which the chaos signature in system responses vanishes.

*Keywords* : attractor, chaos, mean Poincare map, noise, piecewise-linear system, random

\* 정회원·연세대학교 토목공학과, 연수연구원

• 이 논문에 대한 토론을 1998년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

근래에 많은 관심을 끌고 있는 chaos운동은 여러 연구를 통해 많은 기계적 또는 구조적 비선형시스템에서 발견되고 있으며, 해양구조물의 거동에서 역시 발견되고 있다<sup>7,12,13,14)</sup>. 이러한 chaos운동은 모든 비선형시스템이 본래부터 갖고 있는 특성인 것이 밝혀졌으며 현대과학에 대혁명적 의미를 창출하였다. 비선형시스템은 일반적으로 다양한 운동을 보이는데 주기운동을 보이는 시스템의 매개변수가 어느 한계값을 넘으면 시스템은 chaos운동을 보일 수 있으며, 이러한 chaos운동의 발생점에 대한 안정성 및 매개변수가 발생조건에 미치는 영향에 대한 연구도 있었다<sup>1),2)</sup>.

chaos의 어원은 그리스어로서 우주가 생기기 전의 태고의 무의 상태(無 : emptiness)를 뜻하고, 문학적 의미로는 심한 무질서나 혼돈 또는 미숙한 우주의 원래상태 등을 뜻하며, 근래의 논문 등에서의 chaos는 초기치에 민감한 종속성을 갖는 물리적, 수학적 시스템에서의 운동을 명하는 용어로 쓰여지고 있다<sup>8)</sup>. chaos운동이 랜덤운동과 다른 점은 다음과 같이 설명될 수 있다. 랜덤운동은 시스템에 가해지는 입력에 대해 정확한 정보가 없으며 입력 자체가 랜덤이거나, 또는 매개변수가 랜덤인 경우에서 랜덤입력이나 매개변수의 통계적 특성만이 유효한 경우의 시스템에 대하여 쓰여지는 반면, chaos운동은 입력이나 매개변수에 랜덤성이 없는 결정론적 문제에 대하여 쓰여지고 있다. 이러한 chaos운동은 결정론적 시스템으로부터 발생한다는 점으로 미루어 규칙운동(ordered motion)과 불규칙운동(disordered motion)의 과도적 현상을 해석하거나 또는 과도적 현상을 간단한 수학적 방정식을 이용하여 모형화할 수 있다는 가능성을 제시한다는 점에 그 의미를 부여할 수 있다. 그러므로 chaos운동에 대한 보다 많은 연구와 이해가 필요하다.

해양구조물에서 볼 수 있는 계선시스템(mooring system)은 구조적 특성으로 인해 케이블이 늘어나거나 케이블에 미리 가해 준 프리텐션보다

인장력이 커지면서 야기되는 비연속성으로 인해 비선형이 된다. 이러한 해양시스템은 구분적선형으로 표현하기에 적합하며, 구분적선형시스템은 해양구조물의 거동분석에 이용될 수 있다<sup>5,11,12,13)</sup>. 이러한 해양구조물이 경험하는 파력은 흔히 결정론적으로 가정되는 경우가 많으나 파력에 포함되어 있는 랜덤성 또한 고려하여야 한다.

해양에서의 파력(wave excitations)은 그 특성상 실질적으로 랜덤하며 이러한 파력은 조화하중과 정규확률과정의 백색노이즈를 더한 합력으로 표현할 수 있다. 조화하중에 의한 시스템의 응답으로 이루어진 attractor에 대한 노이즈의 영향은 보통 그 attractor가 갖는 fractal 구조를 파괴하고 차원(dimensionality)을 증가하는 것으로 밝혀졌다<sup>1),2)</sup>. 주어진 파력에 포함된 랜덤성은 그 강도가 커짐에 따라 시스템이 갖는 chaos응답거동의 특성을 저하시키며 궁극적으로 chaos attractor를 사라지게 한다<sup>7,14)</sup>. 그러므로 이러한 경우, 노이즈로 인해 감춰져 있는 응답거동을 파악할 필요가 있다. 이러한 노이즈는 컴퓨터 시뮬레이션 상에서도 존재할 수 있으며, 그러므로 노이즈의 영향을 제거한 후의 결과를 얻을 수 있는 새로운 방법론을 제시함으로써 시스템의 응답거동에서의 chaos의 존재를 밝힐 수 있다.

본 연구에서는 파력을 받는 구분적선형시스템의 비선형거동의 특성을 분석함에 있어 노이즈의 영향으로 인해 chaos운동의 특성(signature)을 파악하기 어려운 시스템의 응답거동을 평균 포인케어맵을 이용하여 노이즈의 영향을 평균적으로 없앴으로써 파악하였다. 노이즈의 강도를 변화하여 시스템에 가함으로써 일반적인 포인케어맵과 평균 포인케어맵의 차이를 분석하였고 또한 평균 포인케어맵이 chaos응답을 검출할 수 있는 노이즈강도의 한계값을 구하였다.

## 2. 수식 모델

노이즈가 포함된 파력을 받는 해양계선시스템의 비선형거동의 모델링에 단일 자유도를 갖는 구분적선형시스템을 이용하였다. 구분적선형시스

템은 계선구조물의 동적 응답해석에 많이 이용되어 왔으며, 이러한 계선구조물은 큰 거동변위에 의해 계선 메커니즘의 늘어남으로 인해 시스템의 강성도에 불연속성을 야기시킨다. 이러한 불연속성은 구분적선형시스템으로 모델화 할 수 있다. 구분적선형시스템의 지배운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$m_s \ddot{X} + c_s \dot{X} + R^*(X) = F(t) \quad (1)$$

여기서,  $X$ 는 변위,  $m_s$ 는 질량,  $c_s$ 는 감쇠상수로 선형으로 가정하며,  $R^*(X)$ 은 구분적선형복원력이고,  $F(t)$ 는 파력에 의해서 시스템에 가해지는 가진력이다. 계선시스템과 상응되는 구분적선형복원력을 Fig. 1에 나타내었다.

파도의 복잡성으로 인해 해양구조물과 파도의 상호작용을 계산하는 정확한 방법(exact solution)은 없으나, 작은 규모의 구조물에 대해서는 잘 알려진 Morison방정식을 이용하여 그 가진력의 근사치를 주어진 파의 프로파일로부터 얻을 수 있다<sup>4)</sup>. 선형화된 항력<sup>3,9)</sup>을 이용하여 Morison방정식을 이용하면 시스템의 운동방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$m_s \ddot{X} + c_s \dot{X} + R(X) = \rho V (1 + C_A) \dot{u} - \rho V C_A \ddot{X} + \frac{1}{2} \rho A_p C_D a_f (u - \dot{X}) \quad (2)$$

식(2)에서  $u$ 와  $\dot{u}$ 은 물입자의 속도와 가속도,  $X$ =시스템의 변위,  $\rho$ =물입자의 질량,  $V$ =시스템의 부피,  $A_p$ =투영면적,  $C_A$ =추가질량계수, 그리고,  $C_D$ =항력계수,  $a_f$ =선형항력계수이다. 식(2)에서 물입자의 속도와 가속도는 진행파의 물 표면에서의 프로파일로부터 구할 수 있다. 랜덤 동요를 포함한 파의 변위는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$h_w(t) = A_o \cos \Omega t + \zeta(t) \quad (3)$$

여기서,  $\zeta(t)$ 는 그 평균치가 0이고, delta-correlated인 가우스 백색노이즈이다.

식(3)의 파의 프로파일로부터 선형파이론을 이용하여 물입자의 수평방향의 속도와 가속도를 구한 후, 새로운 무차원 변수  $x = X/A_o$ ,  $t = \Omega t$ 를 식(2)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 정규화된 무차원식을 얻을 수 있다<sup>14)</sup>.

$$\dot{x} + 2 \frac{\xi}{\beta^2} \dot{x} + R(x) = F_o \cos(t + \phi) + \eta(t) \quad (4)$$

$R(x)$ 은 구분적선형시스템의 정규화된 무차원 복원력으로 다음과 같이 표현된다.

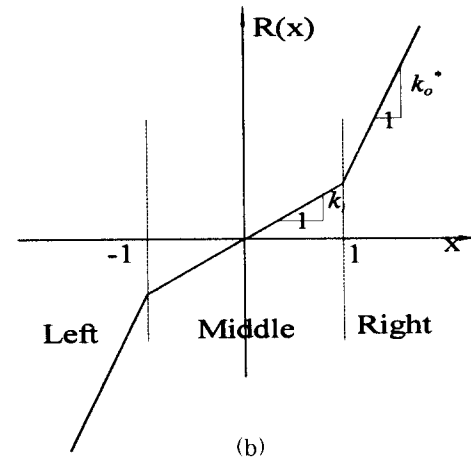
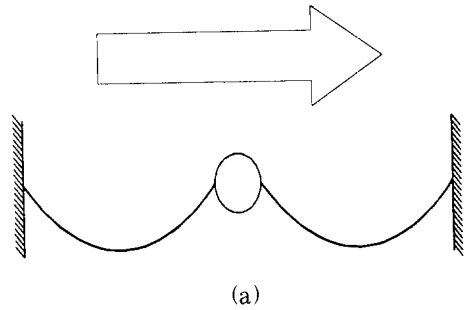


Fig. 1 구분적선형시스템의 복원력(Restoring Force)과 대응하는 계선구조물의 모형도:  $k_i$ =inside stiffness;  $k_o$ =outside stiffness;  $A_c$ =critical displacement.

$$R(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^2}(x-1) + \frac{1}{\beta^2} & x > 1 \\ \frac{x}{\beta^2} & -1 < x < 1 \\ \frac{\alpha}{\beta^2}(x+1) - \frac{1}{\beta^2} & x < -1 \end{cases}$$

여기서,  $\beta = \beta_i$ ,  $\alpha = K_o/K_i =$  강성도비이다.

식 (4)에서  $\eta(t)$ 는 추계론적 하중으로 평균치가 0이고 delta-correlated인 백색노이즈로 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &= 0 \\ \langle \eta(t) \eta(t') \rangle &= q \delta(t-t') \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $q$ 는 노이즈의 강도를 조절하는 강도 매개변수이다.

정의에 의한 이상화된 백색노이즈의 주파수의 범위는 무한이나, 실질적으로 이러한 노이즈를 재현하기는 불가능하다. 그러므로, 시뮬레이션에서는 유한한 주파수범위를 갖는 (band-limited) 근사치 백색노이즈를 구하여 사용하였다. band-limited 백색노이즈는 결정론적 진폭  $A_k$ , 랜덤주파수  $V_k$ , 그리고 랜덤위상차  $\phi_k$ 와 함께 다음과 같이 삼각함수의 합으로 나타낼 수 있다<sup>6)</sup>.

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(V_k t + \phi_k) \quad (6)$$

$\eta(t)$ 의 spectral density는

$$S_o = \begin{cases} \frac{D^2}{V_{max}-V_{min}} & \text{for } V \in \{V_{min}, V_{max}\} \\ 0 & \text{for } V \in \{V_{min}, V_{max}\} \end{cases}$$

여기서  $D^2 = E[\eta^2(t)] = \eta(t)$ 의 분산이다. 위상차  $\phi_k$ 는 독립 랜덤변수로 간격  $[0, 2\pi]$  사이에 균일하게 분포한다. 진폭  $A_k$ 는 결정론적으로 Rice 방법에 의해 그 값이 주어진다<sup>10)</sup>.

$$A_k = \sqrt{2S_o \Delta V}$$

$$\Delta V = \frac{V_{max} - V_{min}}{N}$$

여기서,  $N$ 은  $\eta(t)$ 을 이루는 harmonic의 개수이다.

주파수  $V_k$ 는 Shinozuka 방법에서와 같이 랜덤이며 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V_k = (k - 0.5) \Delta V + \delta V_k + V_{min}$$

$\delta V_k$ 는 독립랜덤변수로 그 범위가  $[-\Delta V/2, \Delta V/2]$  안에 균등하게 분포한다.

여기서 주의 깊게 볼 것은 정규백색노이즈의 분산은

$$\sigma^2 = E[\eta(t)^2] = R_o(0) = \int_0^\infty S_o(\omega) d\omega = q \delta(\tau) |_{\tau=0} \quad (7)$$

이고, band-limited 백색노이즈의 분산은

$$D^2 = \sigma^2 = E[\eta(t)^2] = S_o(V_{max} - V_{min}) \quad (8)$$

식 (4)에 보면, 결정론적 구분적선형시스템은 위상차  $\phi$ 를 0으로 주었을 때, 네 개의 파라미터  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\xi$  그리고  $F_o$ 로 완전히 묘사됨을 알 수 있다.

### 3. 평균 포인케어맵

앞에서 언급한 바와 같이, 강도가 클 경우 노이즈는 시스템이 갖는 chaos 응답을 소거한다. 본 연구의 결과에서 보듯이 어느 정도의 강도를 갖는 노이즈 하에서는 시스템은 chaos 특성을 유지한다. 그러나, 노이즈 강도가 임계값(critical value)을 넘을 경우 attractor의 구조는 없어지고 응답거동은 랜덤운동을 나타내게 된다. 이러한 노이즈에 의해 가려어진 응답거동을 구분해 내는데 있어 대안방법론이 필요하다.

시스템의 응답거동을 판별하는 방법 중 널리

쓰이는 포인케어맵은 일련의 위상면(phase plane) 상에서의 시간에 대해서 추출한 각 점의 시퀀스로 표현할 수 있다<sup>8)</sup>.

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

Kapitaniak<sup>6)</sup>은 평균 포인케어맵의 개념을 정의하였으며, 다음과 같이 표현될 수 있다. 우선 일반적인 포인케어맵을 mapping으로 표현하면 다음과 같다.

$$M(x(t)) = \{(x_i(t), x_j(t)) \mid t = kT,$$

$$k = 1, 2, \dots\}$$

여기서,  $M$ 은 mapping function,  $x(t)$ 는 응답해이고  $T$ 는 파력의 주기이다. 여기에 상응하는 평균 포인케어맵은 다음과 같다.

$$\langle M(x(t)) \rangle = \{ \langle x_i(t) \rangle, \langle x_j(t) \rangle \mid t = kT, k = 1, 2, \dots \}$$

여기서,  $\langle \rangle$ 는 앙상블 평균을 나타낸다. 그러므로, 평균 포인케어맵은 확률과정을 이루는 일반 포인케어맵상의 값들로 이루어진 realization들의 앙상블 평균이다. 노이즈강도가 응답거동의 attractor를 파괴할 만큼 큰 경우, 평균 포인케어맵은 노이즈의 영향을 앙상블 평균을 통해 감소 또는 제거할 수 있다. 수치해석을 통해 평균 포인케어맵을 구하는 방법을 Fig. 2에 나타내었다. Fig. 2에서 보듯이 첫 번째 mean Poincare 점은 파력의 첫 번째 사이클에서 모든 realization들의 일반 Poincare 점(○로 표시)들의 평균값(●로 표시)으로 구할 수 있다. 이렇게 구한 평균값인 mean Poincare점의 값을 다음단계의 simulation의 초기치로 이용하여 그 점으로부터 앙상블을 이루는 모든 시스템의 거동은 다시 출

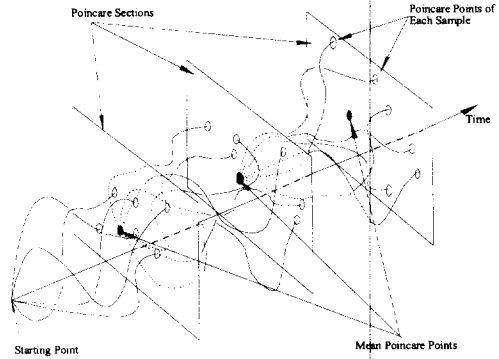


Fig. 2 Illustration of generating the mean Poincare map : ○ = landing points of each sample function ; ● = mean Poincare points.

발한다. 같은 방법으로 steady-state의 평균 포인케어맵을 구함으로써 노이즈의 영향을 평균적으로 없앨 수 있다.

#### 4. 결과분석

구분적선형시스템은 그 주어진 시스템 및 파력의 매개변수에 따라 주기성운동인 조화응답(harmonic response), 열조화응답(subharmonic response)과 비주기성(aperiodic)인 유사주기응답(quasiperiodic response), 그리고 chaos를 포함한 복잡한 비선형거동 등 다양한 종류의 응답거동을 보인다. 다양한 매개변수값을 시스템에 적용해 본 결과 구분적 선형시스템은 많은 chaos응답을 갖음을 알아내었다. 구분적 선형시스템의 응답거동중에서 조화응답, 열조화응답, 그리고 chaos응답의 예를 Fig. 3에 보였다. Fig. 3의 결과에서 보듯이 구분적선형시스템의 응답거동은 주어진 조화가진파력의 진폭에 따라 다양한 운동을 보임을 알 수 있다.

외부 파력 안에 노이즈가 존재할 경우에 시스템이 갖는 chaos응답의 거동 특성을 보기 위하여 구분적선형시스템이 갖는 여러 응답거동중에서 대표적인 chaos응답을 갖는 시스템을 선택하여 노이즈가 없는 경우의 chaos응답과 노이즈가 있

는 경우의 같은 시스템이 갖는 응답거동을 비교하여 보았다(Fig. 4). Fig. 4a에서 보듯이 포인케어맵 상에서 시스템의 응답거동은 chaos 응답의 특성인 섬세한 fractal구조를 잘 나타내고 있다.

여기에 높은 강도의 노이즈가 가해질 경우 그 특성을 뚜렷이 나타내던 시스템의 거동이 노이즈의 영향에 의하여 흐트러져 있는 것을 확연히 알 수 있다(Fig. 4b). chaos 응답의 내부구조는 완전히

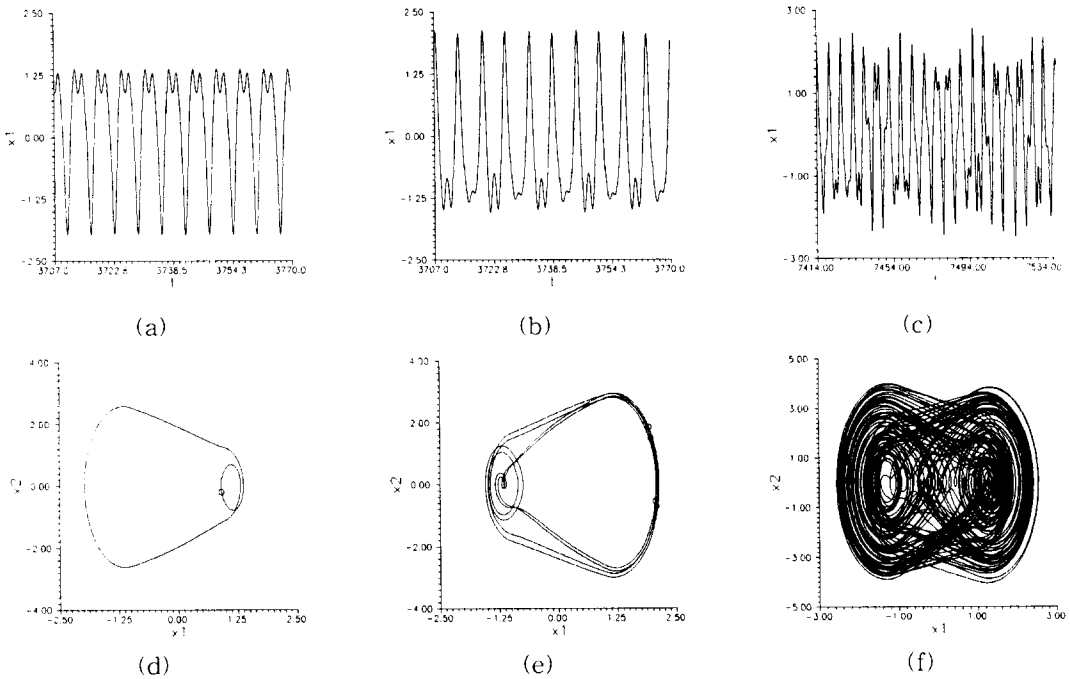


Fig. 3 Regular and chaotic responses of a piecewise-linear system ( $\xi=0.03$ ,  $\alpha=10$ ,  $\beta=1$ ) : (a), (b), (c)=time histories; (d), (e), (f)=phase planes; (a), (d) harmonic response ( $F_0=2.7$ ), (b), (e) subharmonic response ( $F_0=3.23$ ), (c), (f)  $F_0=4.5$ (chaotic response)

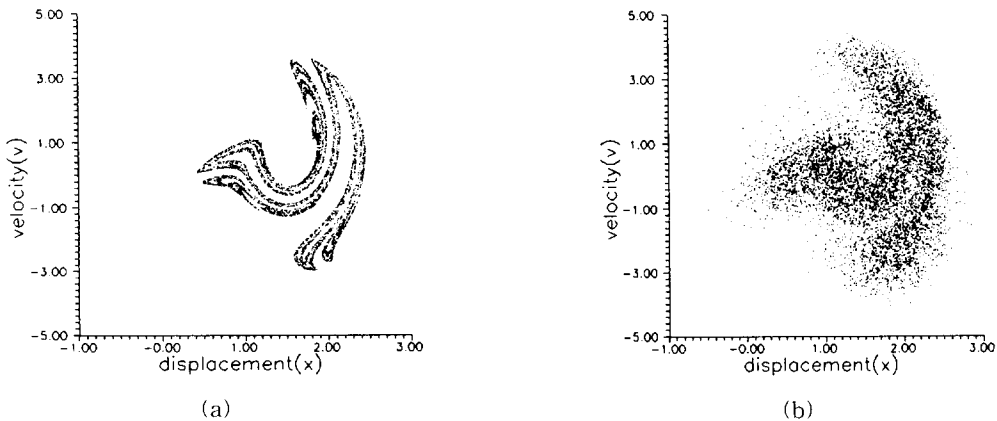


Fig. 4 Effect of external randomness on a chaotic system ( $\xi=0.03$ ,  $\alpha=10$ ,  $\beta=1$ ,  $F_0=4.5$ ) : (a) chaotic response without noise ( $D=0$ ) ; (b) perturbed chaotic response ( $D=0.45$ )

파괴되어 chaos운동의 특성인 Cantor set을 보이던 attractor들이 더 이상 자리를 지키지 못하고 그 패턴이 없어졌으며, 분포경계 또한 팽창되었을 뿐 아니라, 많은 포인케어점들이 경계 밖으로 랜덤 하게 퍼져 있음을 볼 수 있다. 이러한 포인케어점들의 위상면상에서의 분포상태는 노이즈가 없는 경우, 시스템의 거동이 chaos인 것을 모르는 경우, 시스템이 chaos응답을 갖는다는 정보를 얻

기 힘들음을 시사하고 있다. 그러므로 위 결과는 노이즈가 있는 경우에서 시스템의 chaos응답거동의 유무파악은 물론 특성을 파악하기 위한 도구의 필요성을 제시하고 있다. 조화하중에 노이즈의 강도를 증가하면서 가함으로써 노이즈의 존재 하에서의 시스템이 갖는 chaos응답의 거동의 안정도를 조사하였다. 다양한 노이즈강도를 시스템의 파워에 적용함으로써 같은 결과로부터 일반 포인케

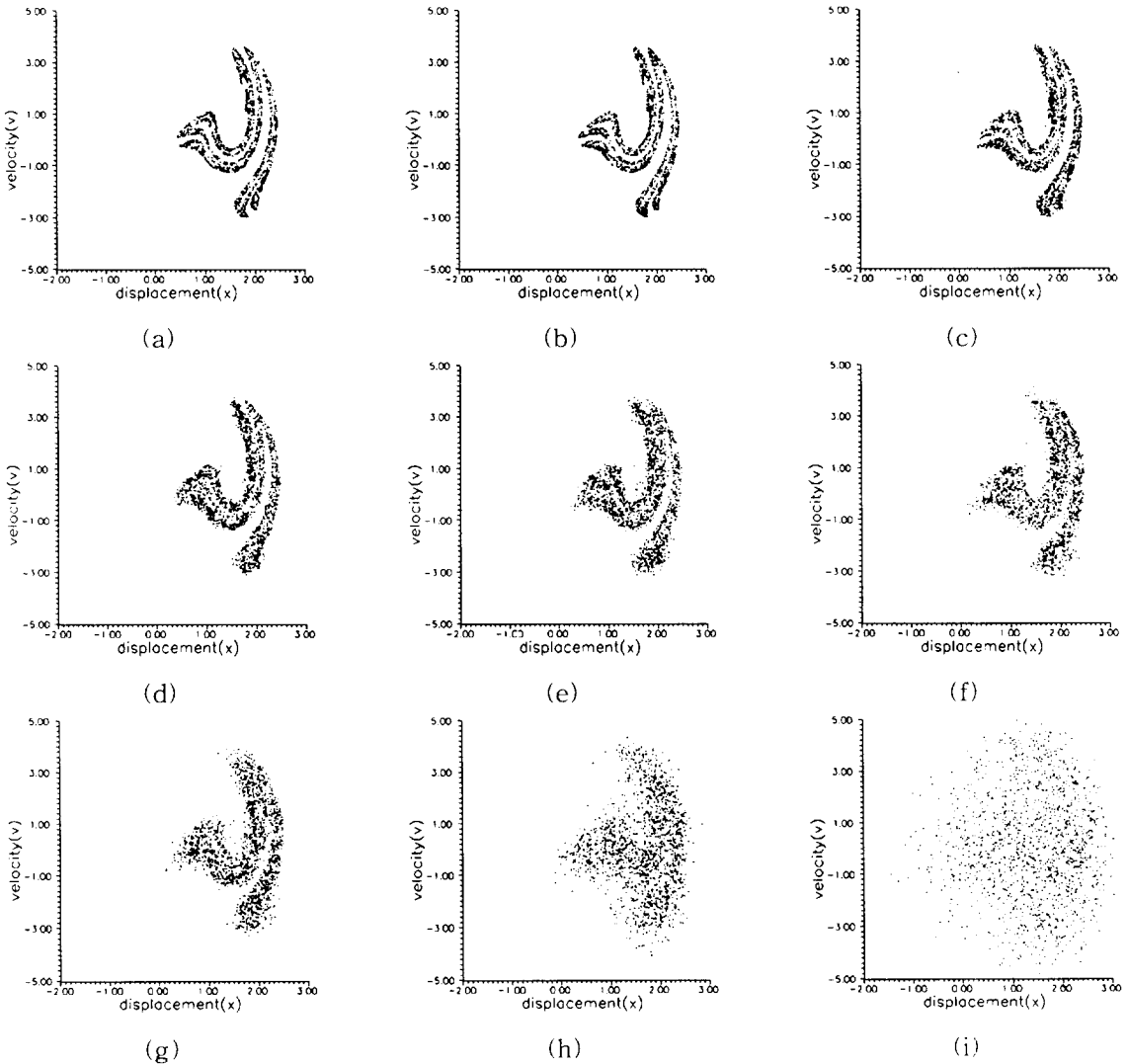


Fig. 5 Effect of noise intensity to chaotic responses in Poincaré maps ( $\xi=0.03$ ,  $\alpha=10$ ,  $\beta=1$ ,  $F_0=4.5$ ) : (a)  $D=0$ , (b)  $D=0.0045$  ( $\kappa=0.1\%$ ), (c)  $D=0.045$  ( $\kappa=1\%$ ), (d)  $D=0.09$  ( $\kappa=2\%$ ), (e)  $D=0.135$  ( $\kappa=3\%$ ), (f)  $D=0.18$  ( $\kappa=4\%$ ), (g)  $D=0.225$  ( $\kappa=5\%$ ), (h)  $D=0.45$  ( $\kappa=10\%$ ), (i)  $D=0.9$  ( $\kappa=20\%$ ).

어맵만을 이용하여 시스템의 chaos응답을 분별할 수 있는 노이즈강도의 정도를 알 수 있다. 노이즈의 강도는 식 (8)에서의 노이즈가 갖는 총 에너지, 즉 분산값인  $D$ 로써 나타내었으며, 그림의 설명에서는 편의상 이 분산값과 하중 중 지배적인 역할을 하는, 즉 노이즈가 없는 경우의 조화파력의 진폭과의 비 ( $\kappa=D/F_0$ )를 이용한다.

Fig. 5에서는 노이즈가 존재하지 않는 경우 즉 결정론적시스템의 chaos응답으로부터 노이즈의 강도가 파력의 진폭의 20%에 달하는 경우까지 결과를 분석하였다. 노이즈의 영향의 비교를 보다 분명히 하기 위하여 결정론적시스템이 갖는, 즉, 노이즈가 없는 경우의 chaos응답을 Fig. 5a에 나타내어 노이즈를 가한 경우의 포인케어맵과 비교하였다. 노이즈의 강도가 낮은 경우 ( $\kappa=0.1\%$ )에는 시스템의 chaos응답은 노이즈가 없는 경우와 일치함을 볼 수 있으며, 이는  $\kappa=0.1\%$ 수준의 노이즈의 강도 하에서는 chaos응답은 거의 영향을 받지 않음을 시사한다(Fig. 5b). 그러나 노이즈강도가  $\kappa=1\%$ 에 이르면 (Fig. 5c), 깨끗한 chaos의 fractal 구조가 흐트러지기 시작하는 것을 볼 수 있다. 노이즈강도가  $\kappa=2\%$ 에 이르면 내부의 fractal구조는 거의 파괴되었음을 알 수 있으며, 전체적 chaos응답구조의 외부 경계도 조금씩 파괴되기 시작하는 것을 관찰할 수 있다(Fig. 5d). 노이즈강도가  $\kappa=3\%, 4\%, 5\%$ 로 점차적으로 증가하면서 chaos응답의 fractal구조를 크게 두 부분으로 가르고 있던 내부의 공백부분마저 서서히 매워지면서 그 외의 상세구조는 완전히 파괴되었음을 볼 수 있다(Fig. 5e, f, g). 노이즈강도가  $\kappa=10\%$ 에 이르면 모든 fractal 구조는 실질적으로 더 이상 관찰할 수 없으며, 거의 완벽히 파괴되었음을 볼 수 있다. 노이즈가 없는 chaos응답의 구조와 비교시, 단지 chaos응답이 갖고 있는 경계선을 약하게 드러내고 있음을 알 수 있다 (Fig. 5h). 노이즈강도가  $\kappa=20\%$ 에 이르면 더 이상의 chaos의 흔적은 찾을 수 없으며, 시스템의 응답거동은 완전한 랜덤의 그것을 닮고 있음을 알 수 있다(Fig. 5i). 위의 결과로부터 노이즈에 의해 변형된 응답거동을 관찰함에 있어 일반 포인케어맵만으로는 시스템의 chaos응답의 특성을 알 수 없으며 시스템에 내재되어 있는 chaos

응답의 확인 또한 어려움을 알았다.

다음은 평균 포인케어맵을 구함에 있어 적합한 샘플의 크기 (Number of realizations)를 정하기 위하여 다양한 샘플크기를 이용하여 평균 포인케어맵을 구하여 보았다(Fig. 6). 노이즈의 강도는 Fig. 5의 결과로부터 chaos응답의 상세구조가 완전히 파괴되는 정도 (Fig. 5g)인  $D=0.225$  ( $\kappa=5\%$ )를 시스템의 하중에 적용하였다. 비교시 편의상 결정론적 시스템의 chaos응답과 일반 포인케어맵을 Fig. 6a, b에 나타내었다. 샘플의 크기는 realization의 개수로써  $N$ 으로 표현한다.

$N=10$ 인 경우 평균 포인케어맵은 일반 포인케어맵의 형상보다 그 분포범위가 수축하여 결정론적 chaos응답의 분포의 경계선과 거의 같은 수준을 보이나, 상세한 내부 fractal구조는 아직 볼 수 없다(Fig. 6c).  $N=50$ 인 경우, 응답분포의 경계는 결정론적 chaos응답의 경계와 거의 일치하며, 내부 구조가 조금씩 드러나고 있음을 알 수 있다(Fig. 6d). 샘플크기가 더욱 커지면서 ( $N=100$ ), 이러한 경향은 계속되어 응답분포의 내부 구조는 더욱 뚜렷해진다(Fig. 6e).  $N=600$ 인 경우 평균 포인케어맵은 원래의 결정론적 시스템이 갖는 chaos응답의 상세한 fractal구조를 재현한 것을 볼 수 있다(Fig. 6f). 이 결과로부터 충분한 샘플크기 ( $N=600$ )를 이용한 평균 포인케어맵은 노이즈에 의해서 일반적인 포인케어맵으로는 볼 수 없었던 chaos응답의 상세한 내부구조 및 경계선을 복원하여 보여줄 수 있다. 또한 일반 포인케어맵 상에서 그 내부 구조가 거의 파괴된 chaos응답이 평균 포인케어맵 상에서는 확연히 관찰됨을 알 수 있다.

위의 결과로부터 평균 포인케어맵의 유용성은 밝혀졌으며, 평균 포인케어맵을 이용하면 노이즈 하에서도 chaos응답을 판별할 수 있으며, 또한 chaos응답의 구조적 특성을 파악할 수 있음을 알았다. 이러한 평균 포인케어맵의 적용한계를 시스템에 노이즈를 증가하면서 구한 응답거동에 대해서 얻어낸 일반 포인케어맵과 평균 포인케어맵을 비교하여 알아보았다. 약한 노이즈 ( $\kappa=1\%$ )가 시스템에 가해진 경우 평균 포인케어맵이 약간 섬세한 형상을 하는 것 외에는 두 포인케어맵은 거의 같은 모양을 유지한다(Fig. 7a,



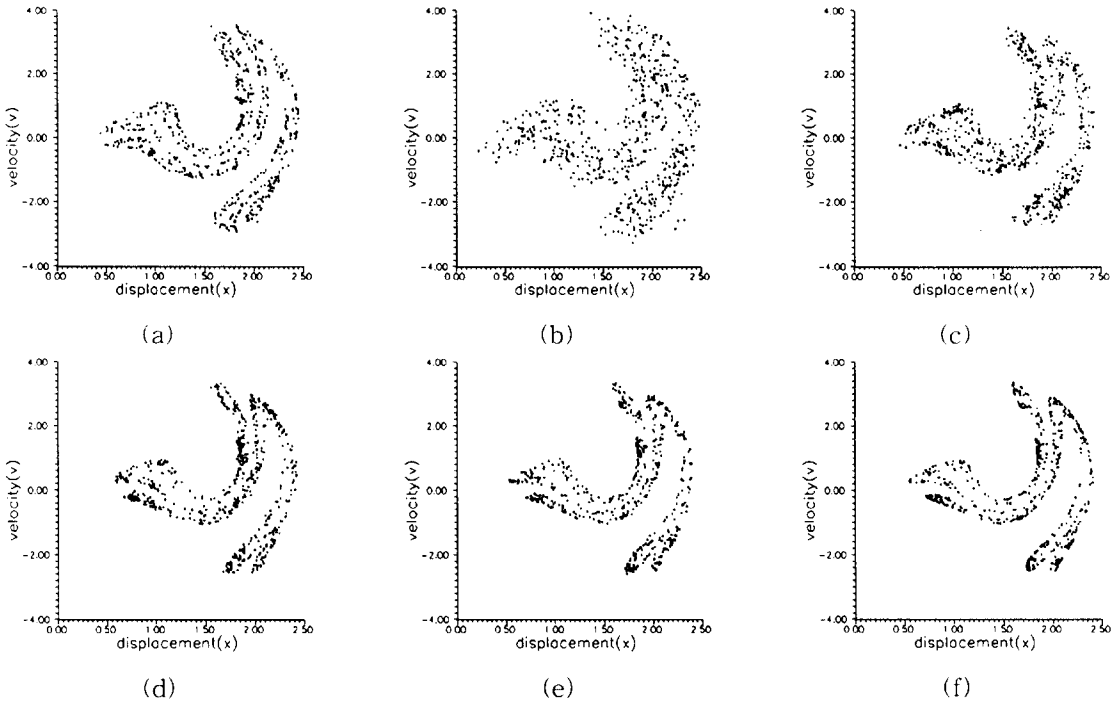


Fig. 6 Comparison between regular Poincaré maps and the mean Poincaré maps with different sample sizes ( $N = \text{No. of realizations}$ ) ( $\xi=0.03, \alpha=10, \beta=1, \text{Fo}=4.5, D=0.225, \kappa=5\%$ ) : (a) (b) regular Poincaré maps: (a) deterministic chaotic response; (b) perturbed chaotic response; (c-f) mean Poincaré maps: (c)  $N=10$ , (d)  $N=50$ , (e)  $N=100$ , (f)  $N=600$ .

d). 노이즈 강도가  $\kappa=5\%$ 인 경우, 일반 포인케어맵은 그 구조가 깨어지기 시작하여 내부 상세 구조가 많이 파괴된 반면 (Fig. 7b), 평균 포인케어맵은 여전히 결정론적 chaos 응답과 같은 형태를 유지함을 알 수 있다 (Fig. 7e). 노이즈 강도가  $\kappa=10\%$ 로 증가한 경우, 시스템의 chaos 응답은 내부의 상세한 구조가 완전히 파괴되었으며, 위상면상에서 많이 퍼져 있음을 볼 수 있다 (Fig. 7c). 평균 포인케어맵상의 chaos 응답은 전체적으로 약간 수축하였으나 여전히 chaos 응답의 특성을 잘 보여 주고 있다 (Fig. 7f). 노이즈의 강도가  $\kappa=8\%$ 인 경우 같은 결과가 계속됨을 알 수 있다 (Fig. 7g, j). 노이즈 강도가  $\kappa=10\%$ 에 이른 경우 일반 포인케어맵상의 chaos 응답은 그 특성을 완전히 상실하였으며 (Fig. 7h), 반면 평균 포인케어맵은 결정론적 chaos 응답이 보여주는 패턴보다 많이 수축하였으나 아직도 전체적인 fra-

ctal 구조나 내부의 구조를 유지하고 있음을 알 수 있다 (Fig. 7k). 궁극적으로 노이즈의 강도가  $\kappa=20\%$ 에 이르면, 시스템의 chaos 응답은 완전히 소멸하였음을 일반 포인케어맵 상에서 발견할 수 있으며 (Fig. 7i), 평균 포인케어맵도 더 이상 chaos 응답의 특성을 보이지 못하고 예상되는 결과처럼 전체 포인케어점들의 평균값으로 수렴함을 알 수 있다 (Fig. 7l).

위의 결과를 종합해 보면, 일반 포인케어맵보다 평균 포인케어맵이 노이즈의 강도가 높은 경우 시스템이 잠정적으로 갖고 있는 chaos 응답 거동의 존재를 잘 보여주고 있음은 물론 그 특성을 높은 노이즈 강도 하에서도 유지함을 알 수 있다. 그러므로 평균 포인케어맵을 이용하면 노이즈의 영향이 큰 경우에서 일반 포인케어맵만으로는 판단하기 어려운 노이즈에 의해 가려진 시스템이 소유하고 있는 잠재적인 chaos 응답의 유무를 과

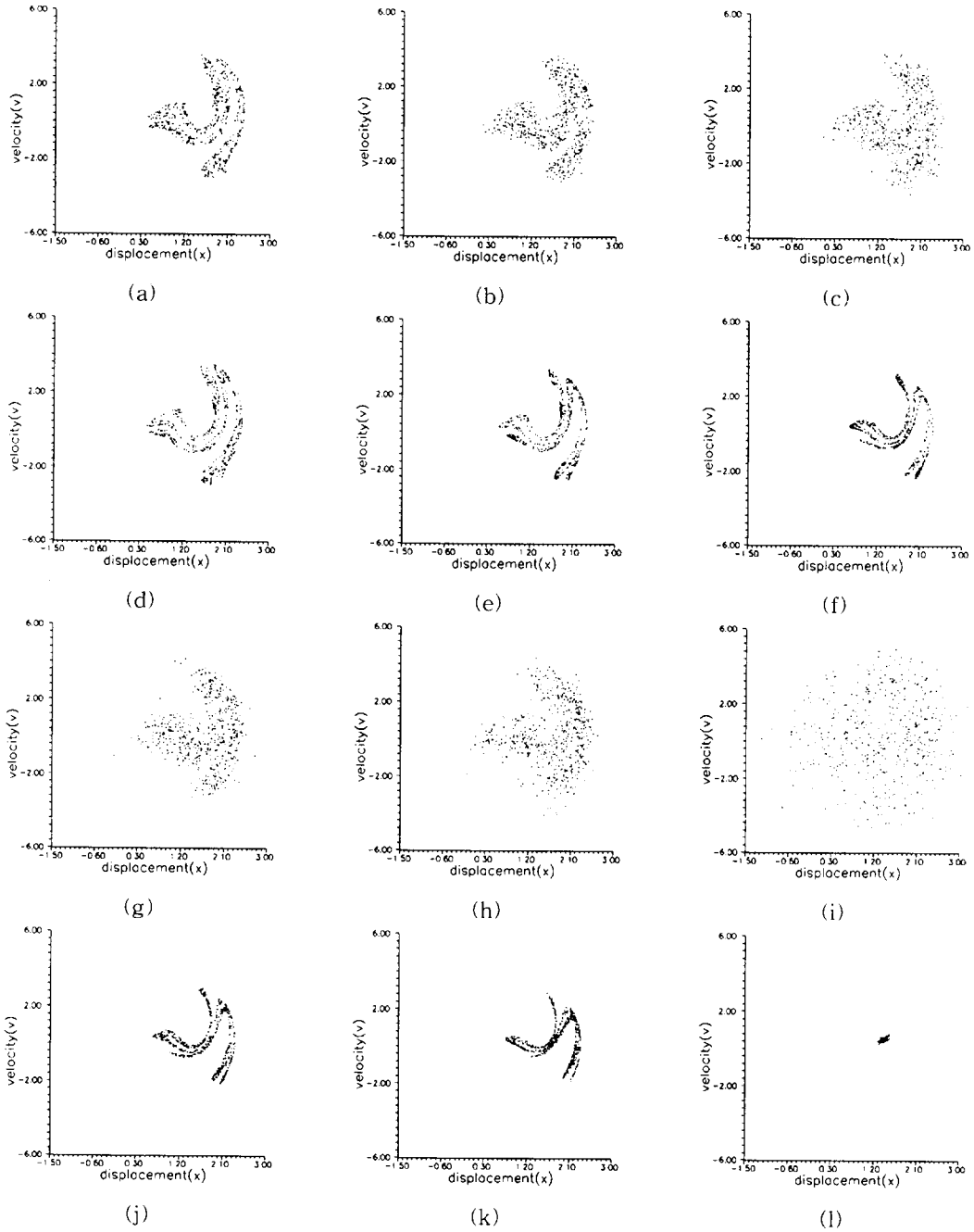


Fig. 7 Comparison between regular Poincaré maps and mean Poincaré maps with various noise intensities ( $\xi=0.03$ ,  $\alpha=10$ ,  $\beta=1$ ,  $Fo=4.5$ ) : (a, b, c, g, h, i)=regular Poincaré maps ; (d, e, f, j, k, l)=mean Poincaré maps ; (a, d)  $\kappa=1\%$  ; (b, e)  $\kappa=5\%$  ; (c, f)  $\kappa=7\%$  ; (g, j)  $\kappa=8\%$  ; (h, k)  $\kappa=10\%$  ; (i, l)  $\kappa=20\%$ .

악할 수 있다. 또한 일반 포인케어맵만으로는 결정할 수 없는 상태, 즉, 시스템의 응답에서 완전히 chaos의 특성이 소멸되는 노이즈강도를 파악할 수 있음을 알 수 있다.

### 5. 결 론

본 연구에서 개발한 방법에 의하여 얻은 평균 포인케어맵은 노이즈 하에서의 chaos응답의 파악에 유용하게 쓰일 수 있음을 알아내었다. 일반 포인케어맵 상에서 노이즈에 가리워 볼 수 없었던 시스템이 갖는 chaos응답의 상세구조는 평균 포인케어맵을 통하여 다시 복원될 수 있다. 본 연구의 결과로부터 노이즈강도가 높은 경우 일반 포인케어맵만으로는 그 유무의 판단이 어려우나 노이즈의 강도가 한계값에 이를 때까지는 시스템의 응답에는 chaos운동이 내재하고 있음도 알아내었다. 이러한 경우 평균 포인케어맵은 노이즈에 의해 가려져 있는 잠재적인 chaos운동을 검출할 뿐 만 아니라, 또한 시스템이 chaos의 특성을 완전히 상실한 경우 평균값으로 수렴함으로써 chaos응답을 완전히 소멸시키는 노이즈의 강도를 결정하는데 쓰일 수 있다.

### 참 고 문 헌

1. Crutchfield, J. P. and Huberman, B. A. (1980). "Fluctuations and the Onset of Chaos." *Physics Letters*, 77A (6), 407-410.
2. Crutchfield, J., Nauenberg, M. and Rudnick, J. (1981). "Scaling for External Noise at the Onset of Chaos." *Physical Review Letters*, 46(14), 933-935.
3. Dao, B. V. and Penzien, J. (1982). "Comparison of Treatment of Non-linear Drag Forces Acting on Fixed Offshore Platforms." *Applied Ocean Research*, 4(2), 66-72.
4. Dean, R. G. and Dalrymple, R. A. (1984). *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. World Scientific, Singapore.

5. Huang, Y. M., Krousgrill, C. M. and Bajaj, A. K. (1989). "Dynamic Behavior of Offshore Structures with Bilinear Stiffness." *Journal of Fluids and Structures*, 3, 405-422.
6. Kapitaniak, Tomasz. (1988). *Chaos in Systems with Noise*. World Scientific, Singapore.
7. Mha, H. S. and Yim, S. C-S. (1997). "Stochastic Dynamics of a Piecewise-Linear Ocean System" *Proc. the 7th International Conference of Computing in Civil and Building Engineering (ICCCBE-VII)*, Vol. 3, 1643-1648.
8. Moon, F. C. (1987). *Chaotic Vibrations : An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons, New York.
9. Sarpkaya, T. and Isaacson, M. (1981). *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*. Van Nostrand Reinhold.
10. Shinozuka, M. (1977) "Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes." *Journal of the Acoustical Society of America*, 49, 357-367.
11. Thompson, J. M. T., Bokaian, A. R. and Ghaffari, R. (1983). "Subharmonic Resonances and Chaotic Motions of Bilinear Oscillator." *Journal of Applied Mathematics*, 31, 207-234.
12. Thompson, J. M. T., Bokaian, A. R. and Ghaffari, R. (1984). "Subharmonic and Chaotic Motions of Compliant Offshore Structures and Articulated Mooring Towers." *Journal of Energy Resources Technology*, 106, 106-198.
13. Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B. (1986). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley & Sons, Chichesster.
14. 마호성, (1997). "구분적선형 해양구조물의 비선형거동에 미치는 노이즈의 영향", *대한토목 학회 논문집*. 제17호, 제1-6호, 823~835  
(접수일자 : 1997. 7. 28)