

# 3차원 10절점-상당요소에 의한 굽힘문제의 정적·동적해석

## Static and Dynamic Analyses of Bending Problems Using 3-Dimensional 10-Node Equivalent Element

권 영 두\*  
Kwon, Young-Doo

윤 태 혁\*\*  
Yun, Tae-Hyeok

### 요 지

본 논문에서는 등방성판의 인장이나 전단변형은 물론 굽힘문제에도 적용할 수 있는 3차원 고체요소들 중에서 최소의 자유도를 갖는 수정 10절점 상당요소를 제안하였다. 제안된 수정 10절점 상당요소는 Q11요소나 20절점요소로부터 자유도가 줄어들어 기인한 과도한 굽힘강성을 나타낸다. 이러한 상대적 강성과잉 현상을 수정하기 위한 효과적인 방법으로 가우스 직분점 수정 방법을 제안하였다. 수정량은 포아송 비의 함수이다. 수정 10절점 상당요소의 효과를 여러 가지 예에 적용하여 검증하였다. 제안된 수정 10절점 상당요소에 의한 등방성판의 정적해석과 자유진동 해석의 결과들은 20절점요소를 사용한 결과들과 잘 일치하였다.

### Abstract

In this paper, a modified 10-node equivalent solid element (MQM10 element), which has smallest degrees of freedom among 3-dimensional solid elements accounting bending deformation as well as extensional and shear deformations of isotropic plates, is proposed. The proposed MQM10 element exhibits stiffer bending stiffness due to the reduction of degrees of freedom from 20-node element or Q11 element.

As an effective way to correct the relative stiffness stiffening phenomenon, the modification equation of Gauss sampling points is proposed. The quantity of modification is a function of Poisson's ratio. The effectiveness of MQM10 element is tested by applying it to several examples. It is noted that the results of static and free vibration analysis of isotropic plates using MQM10 elements show a good agreement with those using 20-node element.

*Keywords* : relative stiffness stiffening phenomenon, static condensation, modified gauss sampling points, 3-D 10-node equivalent element.

### 1. 서 론

평판의 굽힘변형 문제의 해석방법으로 잘 알려진 고전적 얇은 판이론은 전단변형은 무시하고

\* 정회원·경북대학교 기계공학부, 교수  
\*\* 구미전문대학 자동차학과, 전임강사

• 이 논문에 대한 토론을 1998년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

굽힘변형만을 고려한다<sup>1,2)</sup>. Kirchhoff의 가정은 수식화가 복잡하고, 전단변형이 있는 경우 등의 해석에서는 문제점이 있으며, 요소의 경계면에서 형상함수의 연속성을 만족시키기 어려운 단점이 있다. 다른 방법으로는 전단변형을 고려한 Mindlin-Reissner이론에 근거를 둔 해석방법이 있다<sup>3,4)</sup>. 이 이론은 수직변위와 회전변위가 서로 독립적으로 가정되므로 Kirchhoff가정보다 수식화가 간단하며, 전단변형을 고려함으로써 두께가 얇은 평판은 물론 두꺼운 평판에 대한 해석도 가능하다. 그러나 비선형 대변위 문제 해석에는 문제점이 남아있다<sup>5)</sup>. 또한 두께가 매우 얇은 평판에서 강성이 크게 되고 해가 부정확하게 되는 전단잠김(shear locking) 현상이 발생된다<sup>6)</sup>. 이러한 전단잠김 현상은 감차적분법<sup>5,7,8)</sup>이나 비적합 변위모드를 추가하는 방법<sup>9-11)</sup>, 또는 이 두 방법을 혼합하여 사용하는 방법<sup>12)</sup>으로 해결이 가능하다. 이들 방법외에도 변형률 가정법(assumed strain method)<sup>13)</sup>, 퇴화셀요소(degenetrated shell element)<sup>14)</sup> 등으로 해결이 가능하다. 그러나, 가성 재료 에너지 모드의 발생<sup>15)</sup> 또는 자유도(계산량)의 증가 등의 문제점이 있는 경우도 있다. 또한 단이진 판이나 두께방향의 변형이 있는 문제 등에서는 고체요소가 효과적으로 적용될 수 있다.

굽힘문제에 적용이 가능한 2차원 고체요소로는 9절점요소<sup>16,17)</sup>, 8절점요소<sup>16,17)</sup>, 6절점 상당요소(Q6, QM6)<sup>18)</sup>, 수정 6절점요소<sup>19)</sup>, 5절점 상당요소(MQM5)<sup>20)</sup> 등이 있으며, 3차원 고체요소는 20절점요소<sup>16,17)</sup>, 수정 16절점요소<sup>21)</sup> 등이 있다. 한편, 2차원 6절점요소와 5절점 상당요소 2차원 완전 요소인 8절점요소에 비해, 그리고 3차원 16절점요소는 3차원 완전 요소인 20절점요소에 비해 저차 요소들이므로 판의 두께가 얇아짐에 기인한 전단잠김 현상과는 다른 절점이 줄어들어 기인한 자유도의 축소에 의한 상대적 강성과잉 현상이 발생된다. 이러한 상대적강성과잉 현상을 제거할 수 있는 방법으로써 강성행렬의 수치적분시 가우스 적분점 위치를 수정하여 이를 제거한 바 있다.<sup>19,20,21)</sup>

본 연구에서는 일반적인 3차원 문제는 물론, 판요소로는 효과적인 해석이 어려운 굽힘문제에 효과적으로 적용이 가능한 3차원 연속체 요소중에서 자유도를 최소로 줄인 10절점 상당요소를

제안한다. 제안된 요소는 3차원 8절점 고체요소에 2개의 비적합 변위모드를 추가하였다. 따라서, 20절점요소 보다는 1요소당 36자유도(비적합 변위 모드 포함시 30 자유도)가 줄어들고, Q11 요소(고체 8절점요소+3개 모드)<sup>14,16)</sup>에 비해 3자유도가 줄어든 저절점 요소이므로 자유도가 줄어들어 기인한 상대적 강성과잉 현상이 발생하게 된다. 따라서, 이를 제거할 수 있는 방법으로써 강성행렬의 평가에 사용되는 가우스 적분점 수정 방법을 적용하여 20절점요소에 대한 10절점 상당요소의 가우스 적분점 위치 수정식을 유도하였다. 제안된 요소를 이용하여 등방성 판의 정적 및 동적해석을 수행하여 그 결과를 20절점요소의 결과와 비교 검토하여 그 타당성을 입증하였다. 제안된 MQM10요소의 자유도 수는 30으로 20절점요소의 60, 16절점요소의 48에 비해 상당히 감소되어, 총 소요기억 용량과 계산 시간의 절감 및 계산의 효율성 증대를 도모할 수 있다.

## 2. 평형식 및 QM10요소의 형상함수

### 2.1 대변위문제의 유한요소해석

대변위가 수반되는 판구조에 대한 유한요소해석을 위해 먼저 Total Lagrangian(T.L.) 방식에 의한 가상변위의 원리를 사용하여 평형 방정식을 유도하고 이를 이용하여 등매개변수 요소에 대한 유한요소평형식으로 정식화하였다.

고체의 대변형에 의한 비선형 문제의 해석에는 응력과 변형률의 척도로서 2nd Piola-Kirchhoff 응력텐서와 Green-Lagrange 변형률 텐서를 사용하는 Total Lagrangian(T.L.) 방식을 많이 사용하고 있다.

Total Lagrange 방식에 의해 셀요소에 대한 유한요소평형식을 얻기 위하여 가상변위의 원리를 이용한다. 시간  $t + \Delta t$ 에서 평형 상태에 있는 고체를 생각하면 식(1)을 얻을 수 있다.

$$\int_{V_t} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} d(V) = {}^{t+\Delta t}R \quad (1)$$

여기서,  ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ 는 시간 0을 기준으로 한 시간  $t + \Delta t$ 에서의 2nd Piola-Kirchhoff 응력 텐서이며,  ${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}$ 는 시간 0을 기준으로 한 시간  $t + \Delta t$ 에서의 Green-Lagrange 변형률 텐서이고,  ${}^{t+\Delta t}R$ 은

시간  $t + \Delta t$ 에서의 외부 가상일이다.

2nd Piola-Kirchhoff 응력의 증분  ${}^0S_{ij}$ 와 Green-Lagrange 변형률의 증분  ${}^0\epsilon_{ij}$ 와의 관계는 다음과 같다. 여기서,  ${}^0C_{ijrs}$ 는 재료의 물성치를 나타내는 텐서이다.

$${}^0S_{ij} = {}^0C_{ijrs} {}^0\epsilon_{rs} \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하면 가상변위의 원리가 다음과 같이 정리된다.

$$\int_{\gamma_V} {}^0C_{ijrs} {}^0\epsilon_{rs} \delta {}^0\epsilon_{ij} d({}^\circ V) + \int_{\gamma_V} {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} d({}^\circ V) - {}^{t+\Delta t}R - \int_{\gamma_V} \delta {}^0e_{ij} d({}^\circ V) \quad (3)$$

이는 증분 변위에 대한 비선형 평형식이다. 윗 식으로 직접 해를 구할 수는 없으므로  ${}^0\epsilon_{ij} = {}^0e_{ij}$ ,  ${}^0\delta \epsilon_{ij} = {}^0\delta e_{ij}$ ,  ${}^0S_{ij} = {}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs}$ 로 근사시킨 선형화된 평형식은 식 (4)와 같이 된다.

$$\int_{\gamma_V} {}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta {}^0e_{ij} d({}^\circ V) + \int_{\gamma_V} {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} d({}^\circ V) = {}^{t+\Delta t}R - \int_{\gamma_V} {}^0S_{ij} \delta {}^0e_{ij} d({}^\circ V) \quad (4)$$

평형식 식 (4)에 변위-변형률 행렬을 대입하여 정리하면 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$([{}^0K_L] + [{}^0K_{NL}]) \{\Delta U\} = \{{}^{t+\Delta t}P\} - \{{}^0F\} \quad (5)$$

여기서,  $\{\Delta U\}$ 는 시간  $t$ 에서 시간  $t + \Delta t$  동안의 절점의 증분 변위들이다.

식 (5)로 부터  $\{\Delta U\}$ 를 구하면  $t + \Delta t$ 에서의 변위는 식 (6)과 같이 구할 수 있다.

$$\{{}^{t+\Delta t}U\} = \{{}^tU\} + \{\Delta U\} \quad (6)$$

그러나 식 (5)를 그대로 사용할 경우 해석시 오차를 발생하므로  $\{{}^{t+\Delta t}P\} - \{{}^0F\}$  즉 외력과 등가 절점력과 차이가 충분히 작을 때까지 평형 반복 계산이 필요하다. 따라서, 식 (5)를 Newton-Raphson 방법에 의하여 평형 반복 계산식으로

변환하면, 식 (7)로 나타낼 수 있다.

$$[{}^{t+\Delta t}K]^{(i-1)} \{\Delta U\}^{(i)} = \{{}^{t+\Delta t}P\} - \{{}^{t+\Delta t}F\}^{(i-1)} \quad (7)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [{}^{t+\Delta t}K]^{(i-1)} &= [{}^{t+\Delta t}K_L]^{(i-1)} + [{}^{t+\Delta t}K_{NL}]^{(i-1)} \\ [{}^{t+\Delta t}K_L]^{(i-1)} &= \int_{\gamma_V} (([{}^{t+\Delta t}B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t}B_{L1}])^T [D] \\ &\quad \cdot ([{}^{t+\Delta t}B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t}B_{L1}]))^{(i-1)} d({}^\circ V) \\ [{}^{t+\Delta t}K_{NL}]^{(i-1)} &= \int_{\gamma_V} ([{}^{t+\Delta t}B_{NL}]^T [{}^{t+\Delta t}S] [{}^{t+\Delta t}B_{NL}])^{(i-1)} d({}^\circ V) \\ \{{}^{t+\Delta t}F\}^{(i-1)} &= \int_{\gamma_V} (([{}^{t+\Delta t}B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t}B_{L1}])^T)^{(i-1)} \\ &\quad \cdot \{{}^{t+\Delta t}S\}^{(i-1)} d({}^\circ V) \end{aligned}$$

그리고 반복 횟수  $i$ 에서의 변위는 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{{}^{t+\Delta t}U\}^{(i)} = \{{}^{t+\Delta t}U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (8)$$

## 2.2 QM10요소의 형상함수 및 정적수축

본 연구에서는 곱힘문제를 해석할 수 있는 연속체 요소중에서 자유도가 가장 작은 10절점 상당 요소(Q10)를 제안하였다. 이 요소를 곱힘문제에 적용할때 3차원 연속체 요소인 20절점요소 또는 Q11요소에 비해 상대적으로 저자유도 요소이므로 절점이 줄어들어 기인한 자유도 축소로 상대적 강성과잉 현상이 발생되고 이를 해결하기 위한 방법으로 수치적분시 가우스 적분점 위치 수정을 통해 보정한 수정 10절점 상당요소(MQM10)를 개발하였다. 이 요소(MQM10)를 이용할때의 해의 수렴성을 보장하는 조각시험(patch test)을 성공리에 수행하였다.

먼저 3차원 8절점요소에 대해 살펴본다.

Fig.1과 같은 3차원 등매개 8절점요소의 변위장과 위치벡터는 식 (9)와 같이 표시된다.

$$\{u \ v \ w\}^T = \sum_{i=1}^8 h_i \{u_i \ v_i \ w_i\}^T$$

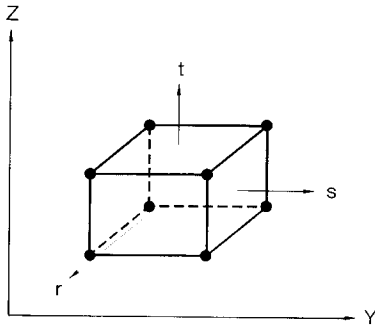


Fig. 1 Configuration of 8-node solid element

$$\{x \ y \ z\}^T = \sum_{i=1}^8 h_i \{x_i \ y_i \ z_i\}^T \quad (9)$$

여기서,  $h_i$ 는 형상함수이다.

제안되는 QM10요소는 2개의 비적합 변위모드를 추가한다.

$$h_9 = 1 - r^2, \quad h_{10} = 1 - s^2 \quad (10)$$

이는 3차원 굽힘문제에서 일반적으로 동시에 세 방향의 굽힘은 발생하지 않기 때문에 Q11요소에서 하나의 비적합 모드를 없앤 것이다. 만약 구조물의 형상이 입방체와 같은 형상인 경우에는 3차원 고체요소중 저차요소인 Q8요소, Q10요소, MQM10요소, Q11요소 등으로 해석이 가능하다. 평판인 경우에는 Q8요소, Q10요소는 해석이 불가능하거나 오차가 있으나 MQM10요소와 Q11요소는 해석이 가능하다. 그러나 보와 같은 경우에서 폭방향과(x방향)과 두께방향(z방향)으로 동시에 굽힘이 발생하는 경우에는 제안된 MQM10요소로는 해석이 곤란하며, 이러한 경우에는 보요소나 3차원 20절점요소 또는 Q11요소를 사용하는 것이 효과적이다. 따라서 MQM10요소는 언급된 경우와 같은 보문제를 제외하고는 잘 적용이 될 수 있다. 또한, 평판 구조물에서는 다른 두방향에 대해 한방향의 길이가 작은 경우가 일반적이며 이 방향을 두께  $t$ 방향으로 한

다. 어떠한 경우 길이가 짧은 두께방향이  $s$ 라고 한다면 프로그램에서 요소의 절점번호 순서를 바꾸어 읽음으로써 간단히 해결할 수 있다.

요소내의 변위장은 식(11)과 같이 표시된다.

$$\{u \ v \ w\}^T = \sum_{i=1}^8 h_i \{u_i \ v_i \ w_i\}^T + h_9 \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6\}^T + h_{10} \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6\}^T \quad (11)$$

여기서  $\{a_i\}$ 는 무절점 자유도이다.

변형률은 변위의 도함수(gradinant)로 정의되며 식(12)와 같다.

$$\{\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ 2\epsilon_{xy} \ 2\epsilon_{yz} \ 2\epsilon_{xz}\}^T = \sum_{i=1}^8 [B_i] \{u_i \ v_i \ w_i\}^T + [G] \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6\}^T \quad (12)$$

여기서,

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_i}{\partial z} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} & \frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial z} & \frac{\partial h_i}{\partial y} \\ \frac{\partial h_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_9}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_9}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_9}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial z} \\ \frac{\partial h_9}{\partial y} & \frac{\partial h_9}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial y} & \frac{\partial h_{10}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_9}{\partial z} & \frac{\partial h_9}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial z} & \frac{\partial h_{10}}{\partial y} \\ \frac{\partial h_9}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_9}{\partial z} & \frac{\partial h_{10}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (14)$$

무절점 자유도  $\{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6\}^T$ 는 계의 자유도에 포함되지 않고 요소의 강성행렬 구성의 최종단계에서 정적축축(static condensation)에

의해 소거된다. 따라서, 추가적인 자유도  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}^T$ 는 관련된 절점이 없고, 절점하중도 없으므로 유한요소 평형방정식은 식 (15)와 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{ra} \\ K_{ar} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_0\} \\ \{a_0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{r\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서,  $\{u_0\}$ 는 요소의 8개절점 변위벡터이고,  $\{a_0\}$ 는 비적합 변위에 의한 무절점 자유도이며,  $\{r\}$ 은 절점에 작용하는 외력벡터이다. 식 (15)를 나누면 식 (16)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} ([K_{rr}] - [K_{ra}][K_{aa}]^{-1}[K_{ar}])\{u_0\} &= \{r\} \\ \{a_0\} &= -[K_{aa}]^{-1}[K_{ar}]\{u_0\} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, 조각시험(patch test)을 통과하기 위해서는 균일 응력에 대해  $\{a_0\}$ 는  $\{0\}$ 이 되어야 한다. 따라서,  $[k_{aa}]$ 는 양의 값을 가지므로  $[k_{aa}]\{u_0\}$ 가  $\{0\}$ 이 되어야 한다<sup>9,14)</sup>.

$$\begin{aligned} [k_{ar}]\{u_0\} &= \int_{V_0} [G]^T [D]\{u_0\} dV_0 \\ \{0\} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G]^T \{\sigma_0\} tJ dr ds \end{aligned} \quad (17)$$

일반적인 형태의 고체요소에 대해 식 (18)이 항상 만족되기 위해서는  $[G]$ 의 계산시 자코비안  $J=J_0$  ( $r=s=t=0$ )의 값을 사용하고  $dV_0=tJ dr ds dt$ 를 사용해야 한다.  $t$ 는 요소의 두께를 나타낸다.

### 3. 가우스 적분점 수정식

#### 3.1 3차원 20절점요소의 굽힘현상

순수굽힘 변형 중인 20절점요소의 폭 방향을 평면응력 상태로 가정하면 굽힘이 일어나는  $x-z$  면에는 8개의 절점이 존재하여 2차원적 8절점요소의 상태로 나타낼 수 있다. 순수굽힘 변형이 일어나는  $x-z$ 면의 상태를 Fig.2에 나타내었다.

여기서  $\rho$ 는 중립면의 곡률 반경,  $\theta$ 는 굽힘이 일어날 때 요소 양면의 회전각도를 나타낸다.

Fig.2에서의 좌표  $x, z$ 의 각 절점의 변위를  $U_i, W_i$ 라 하면 식(18)과 같이 표시된다.

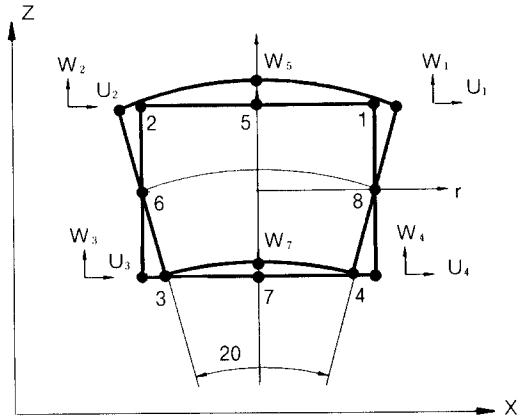


Fig. 2 8-node plane stress element under pure bending

$$\begin{aligned} \rho\theta &= 1 \\ U_1 &= \sin\theta \approx \theta, & W_1 &= \cos\theta - 1 \approx -\theta^2/2 \\ U_2 &= -\sin\theta \approx -\theta, & W_2 &= \cos\theta - 1 \approx -\theta^2/2 \\ U_3 &= \sin\theta \approx \theta, & W_3 &= -1\cos\theta \approx \theta^2/2 \\ U_4 &= -\sin\theta \approx -\theta, & W_4 &= -1\cos\theta \approx \theta^2/2 \\ U_5 &= 0, & W_5 &= \rho(1 - \cos\theta) \approx \theta^2/2 \\ U_6 &= 0, & W_6 &= 0 \\ U_7 &= 0, & W_7 &= \rho(1 - \cos\theta) \approx \theta^2/2 \\ U_8 &= 0, & W_8 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

위 관계를 벡터형으로 나타내면 식 (19)와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{U\}_{20} &= \left\{ \theta \frac{-\theta^2}{2} -\theta \frac{-\theta^2}{2} \theta \frac{\theta^2}{2} -\theta \frac{\theta^2}{2} 0 \right. \\ &\quad \left. \frac{\theta}{2} 0 0 0 \frac{\theta}{2} 0 0 \right\}^T \end{aligned} \quad (19)$$

한편, 20절점요소의 변위-변형률 행렬을  $[B]_{20}$ 라 하면 20절점요소의 변형률  $\{\epsilon\}_{20}$ 은 식 (20)과 같이 계산된다.

$$\{\epsilon\}_{20} = [B]_{20} \{U\}_{20} \approx [t\theta \ 0 \ 0]^T \quad (20)$$

8절점요소의 평면응력  $\sigma_{20} = [D]\{\epsilon\}_{20}$ 이며,  $[D]$ 는 구성물질의 특성행렬이다<sup>2)</sup>. 한편, 8절점요소

의 등가절점력  $\{F\}_{20}$ 를 구하면 식(21)과 같다.

$$\begin{aligned} \{F\}_{20} &= \int_{V'} [B]_{20}^T [D] [B]_{20} \{U\}_{20} d(\cdot V) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{JE\theta W_i b}{4(1-\nu^2)} [2t_i^2 \ 4\nu t_i^2 \ -2t_i^2 \ 4\nu t_i^2 \ 2t_i^2 \ 4\nu t_i^2 \\ &\quad -2t_i^2 \ 4\nu t_i^2 \ 0 \ 0 \ 0 \ -8\nu t_i^2 \ 0 \ 0 \ 0 \ -8\nu t_i^2]^T \end{aligned} \quad (21)$$

식(21)에 나타난 힘의 각 성분을 보면, 변위를 구속한 절점 6, 8에 z방향(t방향)의 하중들이 존재하며, 이 하중에 의해 각 모서리 절점에 부적합한 z방향의 하중들이 나타남을 알 수 있다. 이러한 힘과 변위의 관계를 Fig.3에 나타내었다.

Fig.3-(a)는 각 절점의 등가절점력, Fig.3-(b)는 그 때의 변위를 나타낸다. 따라서 적합한 등가절점력을 가지기 위해 절점 6, 8은 구속되지

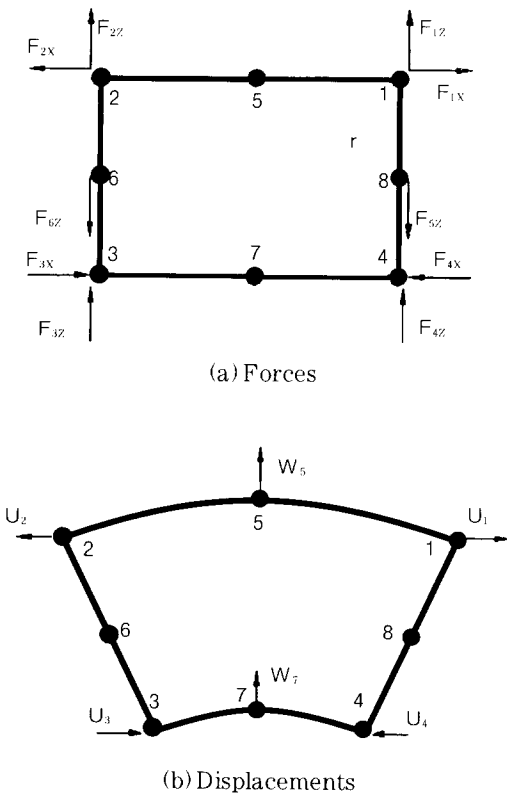


Fig. 3 Forces and displacements of nodes

않아야 한다. 부적합한 z방향의 하중들을 제거하기 위해 구속조건이 풀린 절점6과 절점8의 변위를  $U_6, W_6, U_8, W_8$ 이라 한다면 변위벡터  $\{U\}'_{20}$ 는 식(22)와 같이 나타나며, 그때의 변형률을  $\{\epsilon\}'_{20}$ 이라 두면 식(23)과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \{U\}'_{20} &= \left\{ \theta \frac{-\theta^2}{2} \ -\theta \frac{-\theta^2}{2} \ \theta \frac{\theta^2}{2} \ -\theta \frac{\theta^2}{2} \ 0 \ \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. U_6 \ W_6 \ 0 \ \frac{\theta}{2} \ U_8 \ W_8 \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\{\epsilon\}'_{20} = [B]_{20} \{U\}'_{20} = [t\theta \ 0 \ 2rW]^T \quad (23)$$

식(23)의 계산에서 대칭적 위치에 있는 변위는 같으므로  $U_6=U_8=U$ 와  $W_6=W_8=W$ 로 두고 중립축 변위중 x축의 변위는 미소하므로  $U=0$ 으로 가정하였다.

구속조건이 풀린 변위에 의한 20절점요소의 등가절점력  $\{F\}'_{20}$ 는 식(24)와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \frac{JW_i E b}{2(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} t_i^2(\theta-2\nu W) \\ 2(\nu\theta-2W) \\ -t_i^2(\theta-2\nu W) \\ 2t_i^2(\nu\theta-2W) \\ t_i^2(\theta-2\nu W) \\ 2t_i^2(\nu\theta-2W) \\ -t_i^2(\theta-2\nu W) \\ 2t_i^2(\nu\theta-2W) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4t_i^2(\nu\theta-2W) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4t_i^2(\nu\theta-2W) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

식(24)에서 보면 부적합한 y방향의 절점력을 제거하기 위해 가정한 절점6과 절점8의 변위로 인하여 각 절점에서 z방향의 등가절점력들이 각각  $(\nu\theta-2W)$ 의 향으로 나타남을 알 수가 있다. 따라서 순수굽힘에서 Z방향의 등가 절점력이 0이 되기 위해서, 변위 W는  $\nu\theta-2W=0$ 의 조건을 만족시켜야 하며 이로 부터  $W=\nu\theta/2W$ 가 된다. 이를 식(24)에 대입하여 정리하면, 20절점요

소의 순수 굽힘변형에 대응하는 등가 절점력  $\{F\}'_{20}$ 는 식 (25)와 같이 된다.

$$\{F\}'_{20} = \sum_{j=1}^N \frac{JE\theta W_j b}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} t_j^2(1-\nu^2) & 0 & -t_j^2(1-\nu^2) & 0 \\ t_j^2(1-\nu^2) & 0 & -t_j^2(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (25)$$

식 (25)의 등가절점력에 의한 요소의 변형 에너지는 식 (26)과 같다.

$$E_{20} = \frac{1}{2} \{U\}'_{20} [K]_{20} \{U\}'_{20} = \frac{1}{2} \{U\}'_{20} [F]_{20} \quad (26)$$

### 3.2 등방성 3차원 QM10요소의 순수굽힘

Fig.4와 같이 순수굽힘 변형 중인 평면응력 상태의 QM10요소의 굽힘이 일어나는  $x-z$ 면에는 4개의 절점이 존재하고 2차원적 4절점요소의 굽힘문제에 나타낼 수 있다.

Fig.4에서의 좌표  $x, z$ 의 각 절점의 변위를  $U_i, W_i$ 라 하면 식 (27)과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \rho\theta &= 1 \\ U_1 &= \sin\theta \approx \theta, & W_1 &= 0 \\ U_2 &= -\sin\theta \approx -\theta, & W_2 &= 0 \\ U_3 &= \sin\theta \approx \theta, & W_3 &= 0 \\ U_4 &= -\sin\theta \approx -\theta, & W_4 &= 0 \end{aligned}$$

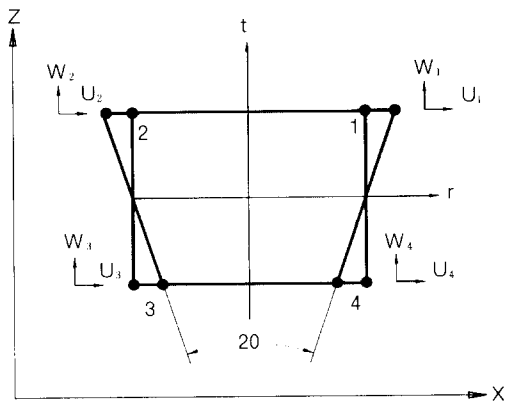


Fig. 4 Deformation of QM10 element under pure bending

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0 \quad (28)$$

위 관계를 벡터형으로 나타내면 식 (28)과 같이 표시할 수 있다.

$$\{U\}'_{10} = \{\theta \ 0 \ -\theta \ 0 \ \theta \ 0 \ -\theta \ 0 \ 0\}^T \quad (28)$$

한편, QM10요소의 변위-변형률 행렬을  $[B]_{10}$ 라 하면 QM10요소의 변형률  $\{\epsilon\}'_{10}$ 은 식 (29), 응력  $\{\sigma\}'_{10}$ 은 식 (30)과 같이 계산된다.

$$\{\epsilon\}'_{10} = [B]_{10} \{U\}'_{10} = [t \ \theta \ 0 \ 0] \quad (29)$$

$$\{\sigma\}'_{10} = [D]_{10} \{\epsilon\}'_{10} = \frac{E\theta}{(1-\nu^2)} [t \ t\nu \ 0]^T \quad (30)$$

한편, QM10요소의 등가절점력  $\{F\}'_{10}$ 을 20절점 요소와 같은 방법으로 구하면 식 (31)과 같다.

$$\{F\}'_{10} = \sum_{j=1}^N \frac{JE\theta W_j b}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} t_j^2 & 0 & -t_j^2 & 0 & t_j^2 & 0 & -t_j^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

식 (31)의 등가절점력에 의한 요소의 변형 에너지는 식 (32)와 같다.

$$E_{10} = \frac{1}{2} \{U\}'_{10} [K]_{10} \{U\}'_{10} = \frac{1}{2} \{U\}'_{10} [F]_{10} \quad (32)$$

### 3.3 등방성 3차원 QM10요소의 가우스 적분점 수정식

동일한 형상과 재료상수 및 하중 조건에서 20절점요소의 변위와 QM10요소의 변위가 같게 되기 위해서는 식 (26)으로 나타난 20절점요소의 굽힘변형 에너지와 식 (32)로 나타난 QM10요소의 굽힘변형 에너지가 같아야 한다. 따라서, 식 (33)의 합의 평형관계가 성립된다.

$$\{F\}'_{10} = \{F\}'_{20} \quad (33)$$

여기서  $\{F\}'_{10}$ 은  $\{F\}'_{20}$ 의 차원으로 확장된  $\{F\}'_{10}$ 를 의미한다.

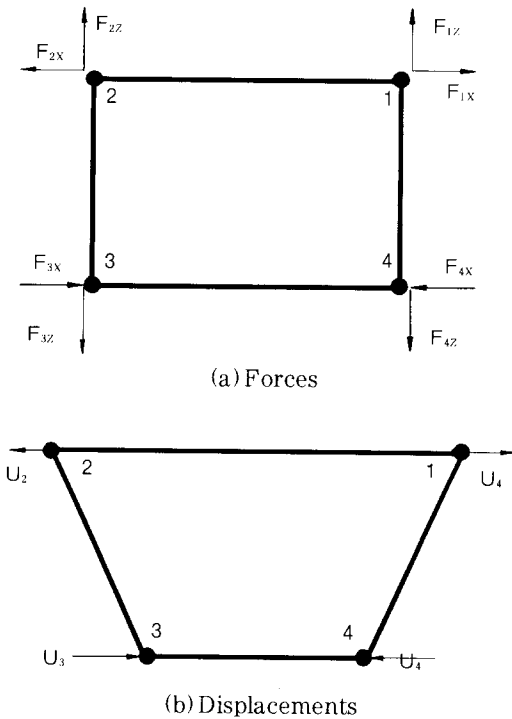


Fig. 5 Forces and displacements of nodes

식(33)과 같은 힘의 평형 관계로부터, QM10 요소에서 두께 방향으로의 가우스 적분점 위치  $t_{10j}$ 가 20절점요소에서의 가우스 적분점 위치  $t_{20j}$ 와 다음 식(34)를 만족하면, 유한요소 절점력의 등가 관계가 성립된다.

$$t_{10j} = t_{20j}(1-\nu^2) \quad (34)$$

식(34)는 20절점요소에 대한 QM10요소의 상대적 강성파잉 현상을 제거하기 위한 두께 방향의 가우스 적분점 위치 수정식이다.

한편, 식(34)가 판의 굽힘강성 수정에 대해서는 매우 효과적이거나, 비틀림 강성에 대해서는  $(1-\nu^2)^{1/2}$ 만큼의 원치않는 저평가를 하게 되므로, 면내(in-plane) 전단탄성 계수를 식(35)와 같이 수정함으로써 원래의 비틀림 강성을 회복하게 하여 이 문제를 해결하였다.

$$G_{(10)12} = G_{(20)12}/(1-\nu^2) \quad (35)$$

여기서,

$G_{(20)12}$ 는 8절점요소에서의 1-2평면상의 전단탄성계수,  $G_{(10)12}$ 는 QM10요소에서의 1-2평면상의 전단탄성계수이다.

한편, 식(34)가 판의 굽힘강성 수정에서의와 같이 응력의 계산에서도 응력-변위 변환행렬을 수정할 필요가 있으며, 식(36)과 같이 응력 계산때의 적분점들을 수정하여 줌으로써 원래의 응력으로 회복할 수 있다.

$$\hat{t}_{10j} = \hat{t}_{20j}(1-\nu^2) \quad (36)$$

## 4. 수치해석 및 고찰

### 4.1 조각시험(Patch test)

유한요소 해석에 사용되는 형상함수는 구조물의 변형상태를 표현할 수 있는 최소한의 항들을 포함하여 기본적인 거동형태를 적절히 나타낼 수 있어야 한다. 일반적으로 유한요소들의 적합성과 해의 수렴성 검토는 조각시험을 실시하여 조각시험 통과 여부로 판정하게 된다. 따라서, 제안된 MQM10요소의 적합성을 검토하기 위해 조각시험을 실시하였다. 조각시험을 통해 해의 수렴을 보장하는 필요충분 조건이 만족된 이들 요소를 이용하여 보의 정적해석 및 자유진동 해석을 수행하였다. 이들 요소는 수치해석시 가우스 적분점의 수정과 함께 자유도 수를 줄이기 위해 정적수축 되었으며(QM10), 자코비안(Jacobian determinant)은 자연 좌표계  $r=s=t=0$ 인 경우의 값(MQM10)과 원래의 값(MQ10)을 병행하여 사용하였다.

Fig.6은 3차원 고체요소인 제안된 MQM10 요소의 조각시험 모델을 나타내었다. 이 모델은 3차원 고체요소에 사용하는 조각시험의 방법으로 쉘요소의 굽힘 조각시험에 고려할 수 없는 두께 방향의 인장 등도 고려할 수 있다. 만약에 고체요소를 쉘의 굽힘 조각시험만을 실시하여 통과하였다 해도 굽힘외의 거동에 대해 고체요소로서의 조각시험을 통과했다고 할 수 없으며 결국 해는 부정확하게 될것이다. 조각시험의 모델은 8개 요소가 입체적으로 구성되었으며, 8개 요소가 겹치는 중앙의 절점이 y축으로 +1, z축으로 +2만큼 이동되었다. 하중의 크기는 균일 응력에 대응되는 적합하중(consistent load)을 절점에 부



과하였다. 조각시험의 통과는 하중방향의 응력과 변위는 이론치를 보이고 다른 방향의 응력은 0이면 통과된 것으로 하였다.

조각시험 결과를 Table 1에 나타내었다.

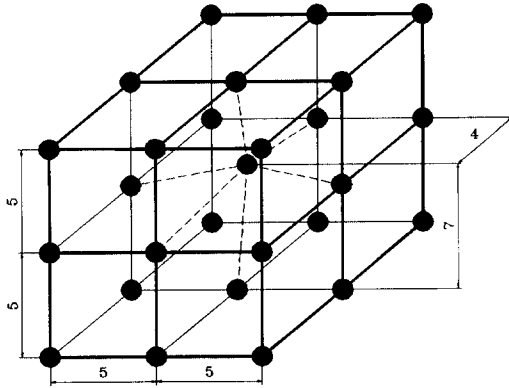


Fig. 6 Patch test model of MQM10 element

Table 1-A Patch test result for load in y-y direction

No. of element	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_{xy}$	$\sigma_{yz}$	$\sigma_{zx}$
1	-7067E-17	1600E00	-7350E-17	9754E-18	-5618E-17	3369E-17
2	-1028E-16	1600E00	-5227E-17	3335E-18	-8494E-17	2068E-17
3	-9541E-17	1600E00	-1019E-16	-7307E-17	1695E-17	-3029E-18
4	-1128E-16	1600E00	-1192E-16	-3327E-17	-1775E-17	-1310E-17
5	8785E-17	1600E00	1494E-16	1095E-16	3270E-16	-2978E-17
6	-7306E-17	1600E00	1210E-16	1026E-16	1043E-17	-6488E-17
7	-9129E-17	1600E00	2112E-16	4075E-17	2354E-17	4540E-17
8	-1628E-18	1600E00	4066E-17	-7713E-18	3790E-17	5208E-17

Table 1-B Patch test result for load in z-z direction

No. of element	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_{xy}$	$\sigma_{yz}$	$\sigma_{zx}$
1	-2393E-19	-4003E-17	1600E00	1068E-17	3269E-17	-1584E-16
2	-4576E-18	2936E-17	1600E00	1940E-17	-4537E-17	-1685E-17
3	-1624E-16	1146E-16	1600E00	-1386E-17	6652E-17	6822E-16
4	-2235E-16	-1021E-16	1600E00	4536E-18	-9031E-18	-2865E-16
5	-2888E-17	-5233E-17	1600E00	-4131E-17	4617E-17	2424E-16
6	-1047E-16	-5677E-17	1600E00	3078E-17	3245E-17	2086E-17
7	-8517E-17	1230E-16	1600E00	6302E-17	-5117E-16	-1889E-16
8	-2832E-17	4906E-17	1600E00	1881E-17	-2886E-16	-5922E-17

Table 1에서 보는 바와 같이 제안된 MQM10 요소는 하중이 작용하는 각 방향에서 동일한 응력값을 나타내므로 조각시험을 통과함을 알 수 있다. 따라서 제안된 요소들은 해의 수렴이 보장되는 완전조건을 만족하는 요소임을 알 수 있다.

#### 4.2 요소의 비사각 분할 영향평가

조각시험을 통과한 제안된 MQM10요소의 굽힘변형에 대한 적용시 해의 정확성을 검증하기 위해 Fig.7과 같은 일단이 고정되고 끝단에 집중 하중이 작용하는 외팔보를 해석하였다. 본 모델을 요소의 경계에 위치한 상하 절점을 좌우 반대 방향으로 일정량씩 이동시키면서 유한요소 해석을 수행하였다. 하중의 크기는 끝단에 2.4N의 집중하중을 가하였다.

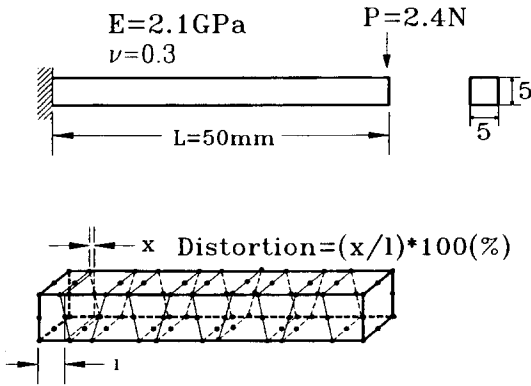
Fig.7의 모델에 대한 20절점요소, MQM10요소에 대해 요소분할의 변형정도를 변화시켜 가면서 끝단의 변위를 정해 및 사각형 20절점요소와 비

Table 1-C Patch test result for load in x-y direction

No. of element	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_{xy}$	$\sigma_{yz}$	$\sigma_{zx}$
1	-5073E-16	4190E-16	-6044E-17	1600E00	-3322E-19	-2154E-16
2	-8519E-16	-1062E-15	1267E-17	1600E00	8834E-17	-6674E-17
3	-4008E-16	2654E-16	3359E-17	1600E00	-1957E-16	-8439E-17
4	-2349E-16	-5111E-16	2575E-17	1600E00	9682E-17	-3615E-16
5	3080E-16	9963E-17	1425E-16	1600E00	4708E-17	6366E-16
6	6116E-17	-2160E-16	7975E-17	1600E00	-7929E-17	3358E-16
7	8645E-17	8899E-17	3368E-17	1600E00	-1468E-16	2737E-17
8	-2228E-16	-4887E-16	9472E-18	1600E00	2390E-16	-2234E-17

Table 1-D Patch test result for load in y-z direction

No. of element	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_{xy}$	$\sigma_{yz}$	$\sigma_{zx}$
1	1540E-16	2628E-16	4988E-16	4566E-16	-1600E00	5010E-17
2	1501E-16	-4117E-17	4220E-16	-1087E-16	-1600E00	1171E-17
3	-1624E-16	2329E-16	4366E-16	-3631E-16	-1600E00	1425E-16
4	3024E-17	-5259E-16	2788E-16	2190E-16	-1600E00	-8096E-18
5	-1052E-16	-3022E-16	-1049E-15	-2444E-16	-1600E00	-1540E-16
6	-1481E-16	3917E-16	-8527E-16	-4396E-17	-1600E00	-8770E-17
7	8755E-17	1284E-15	-1984E-16	2847E-16	-1600E00	-1065E-16
8	-9516E-17	1371E-15	-3566E-16	3078E-16	-1600E00	-5763E-17



(a) Material properties and geometry of FE model

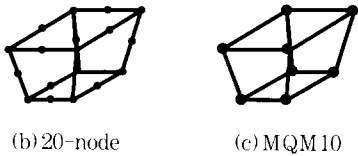


Fig. 7 Trapezoidal mesh of 3-D element

교한 결과를 Table 2에 나타내었다. Table 2에서 보는 바와 같이 MQM10요소는 요소의 경계면에 위치한 상하 절점의 변형량이 좌우로 10%까지도 20절점요소에 대해 별다른 오차(.84%)가 발생치 않으며, 3차원 완전요소인 20절점요소에 버금가는 거동을 보여주어 변형된 요소에서도 적합함을 알 수 있다. 또한 정해에 대해서도 0.84%의 오차를 나타내어 정확한 거동을 함을 알 수 있다.

Fig.8은 MQM10요소와 20절점요소의 비사각 분할에 따른 변위의 오차를 그래프로 나타내었다.

Table 3은 요소 분할의 변형 상태에 따른 응력을 나타내었다. 표에서 보는 바와 같이 아무런 수정을 하지 않으면 변위의 오차는 크나 응력은 오차가 크지 않음을 알 수 있고, 강성수정과 응력수정을 동시에 수행하면 변위와 응력 모두 오차가 적음을 알 수 있다. Fig.9는 MQM10요소와 20절점요소의 비사각 분할에 따른 응력의 오차를 그래프로 나타내었다. 그림에서 보면 요소의 비사각 정도에 따라 오차의 정도가 증가하나 20절점요소의 경우 1.0%, MQM10요소의 경우 0.42%

Table 2 Displacement error of 3-D trapezoidal mesh of MQM10 and 20-node element caused by mesh distortion

Element	Distortion	Displacement (% error)					
		0.0%	2.0%	4.0%	6.0%	8.0%	10.0%
exact solution		.914286					
20-node element	unmod.	.917733 (.38)* (-)	.917725 (.38)* (.0087)*	.917710 (.37)* (.0125)**	.917688 (.37)* (.0049)**	.917658 (.37)* (.0082)**	.917618 (.36)* (.013)**
	mod (eq. (34))	.881103 (3.6)* (4.0)**	.880849 (3.7)* (4.0)**	.880024 (3.7)* (4.1)**	.878632 (3.9)* (4.3)**	.876681 (4.1)* (4.5)**	.874181 (4.4)* (4.7)**
MQM10 element	unmod.	.917545 (.36)* (.018)**	.917288 (.33)* (.049)**	.916344 (.23)* (.15)**	.914887 (.066)* (.31)**	.912776 (.17)* (.54)**	.910027 (.46)* (.84)**
	mod (eq. (34), (35))	.54715 (.18)	.54708 (.18)	.54687 (.14)	.54653 (.9)	.54604 (.29)	.54543 (.41)
MQM10 element	mod (eq. (34), (35))	.54715 (.091)	.54707 (.11)	.54686 (.14)	.54650 (.21)	.54600 (.30)	.54536 (.42)

(\*) : error with respect to exact solution  
 (\*\*) : error with respect to rectangular 20-node result

Table 3 Stress error of 3-D trapezoidal mesh of MQM10 and 20-node element caused by mesh distortion

Element	Distortion	Stress (% error)					
		0.0%	2.0%	4.0%	6.0%	8.0%	10.0%
20-node element		5.4785 (-)	5.4655 (.20)	5.4545 (.40)	5.4435 (.60)	5.4325 (.80)	5.4214 (1.0)
MQM10 element	unmod.	5.4715 (-)	5.4708 (.10)	5.4687 (.14)	5.4653 (.20)	5.4604 (.29)	5.4543 (.41)
	mod (eq. (34))	5.4665 (.18)	5.6835 (4.0)	5.6913 (3.9)	5.6876 (3.9)	5.6824 (3.8)	5.6757 (3.6)
MQM10 element	mod (eq. (34), (35))	5.4715 (.091)	5.4707 (.11)	5.4686 (.14)	5.4650 (.21)	5.4600 (.30)	5.4536 (.42)

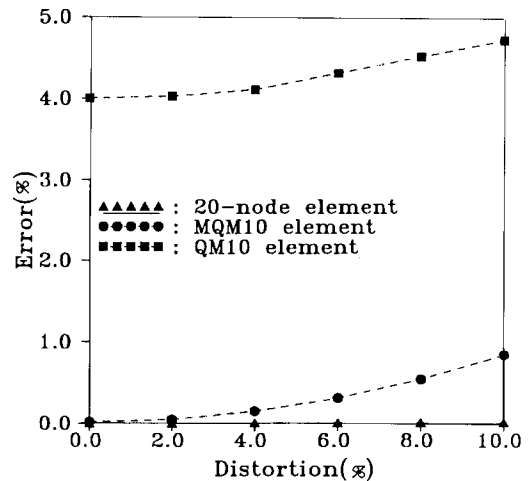


Fig. 8 Displacement error of MQM10 element and 20-node element caused by mesh distortion

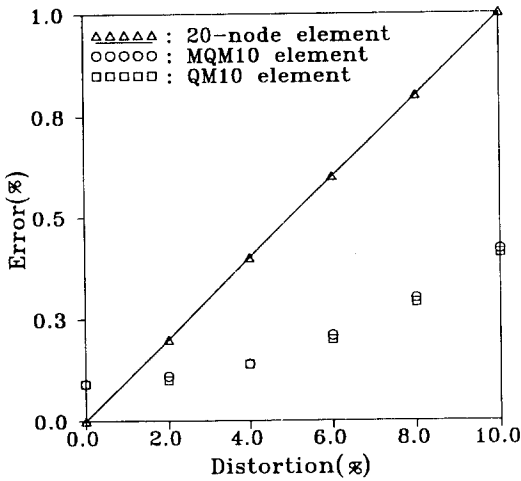


Fig. 9 Stress error of MQM10 element with and 20-node element caused by mesh distortion

로 미소하여 그 결과가 양호함을 알 수 있다.

또한 이 모델에 대해 Table 4에서 보는 바와 같이 20절점요소의 총방정식수와 소요기억 용량은 370과 14851이며, MQM10요소는 125와 2151로 각각 66%와 85%가 줄어들음을 알 수 있다.

### 4.3 길이/두께 비에 따른 결과 비교

길이/두께의 비가 변화하는데 대한 결과를 Table 5에 나타내었다. 모델은 Fig.7과 동일하고 하중은 끝단에 0.024N을 작용시켰다.

Table 5에서 보는바와 같이 길이/두께 비가 100

Table 4 Comparison of 20-node element and MQM10 element

Classification	Number of node	Degree of freedom	Number of equation	Require Memory
20-node element	20	60	370	14851
	(---)	(---)	(---)	(---)
MQM10 element (% reduction)	50 (50%)	30 (50%)	125 (66%)	2151 (85%)

Table 5 Comparison of the result of variable ratio(L/t)

L/t	20	40	60	80	100
Element					
20-node	.0724812	.581719	1.95969	4.63947	8.915308
MQM10	.725766 (.55)	.576624 (.88)	1.93534 (1.2)	4.56509 (1.6)	8.87837 (1.9)

인 경우까지 제안된 요소의 오차는 2.0%미만으로 20절점요소의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

### 4.4 정적문제의 해석

#### 4.4.1 3차원 MQM10요소에 의한 free-free-fixed-fixed 판의 해석

제안된 MQM10요소를 굽힘문제에 적용할때 요소의 비수직 변형에 대한 검증을 위해 Fig.10과 같은 2단 자유-2단 고정 판을 해석하였다. 모델의 제원은 10×10×1mm이고, 요소의 분할은 가로와 세로로 각각 10개씩 분할하였으며, 수치적분 차수는 2×2×2차의 적분을 수행하였다. 하중은 자유단 모서리에 100N을 가하였다. 이때 자유단의 처짐량 결과를 Table 6에 나타내었다.

Table 6에서 보는 바와 같이 굽힘의 상태가 국소좌표계와 가장 어긋나는 경우에도 제안된 MQM10요소는 20절점요소의 결과와 0.39%의 변위 오차를 나타내어 그 결과가 잘 일치함을 알 수 있다. 이 예에서 제안된 요소의 총 방정식의 수는 4195, 총 소요기억 용량은 108267로써 20절점요소의 총방식 수 10201, 총 소요기억 용량 456846에 비해 각각 59%와 76%가 줄어들면서도 해의 정확도는 20절점요소에 버금감을 알 수 있었다.

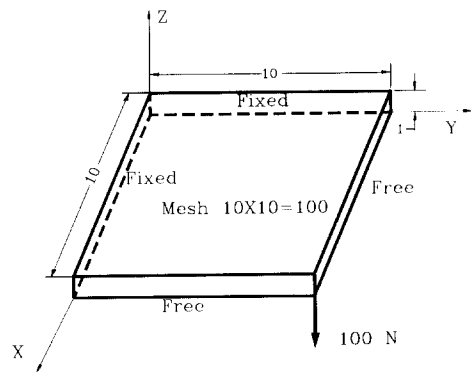


Fig. 10 Geometry and finite element of free-free-fixed-fixed plate

Table 6 Displacement error of free-free-fixed-fixed plate

Element	20-node	QM10	MQM10
Displacement (mm)	1.60233	1.47225	1.60864
(% error)	(---)	(8.1)	(.39)

#### 4. 4. 2 찌그러진 원통셸의 해석

제안된 MQM10요소를 쉘문제에 적용하기 위해 참고문헌 [22]에서 해석한 Fig.11과 같은 길이 20 mm, 내경 19.9mm, 외경 20.1mm 양단이 완전히 고정된 원통셸을 해석하였다. 해석의 결과는 이론해의 결과와 비교하였다. 요소의 분할은 길이 방향으로 32개, 반경 방향으로 32개로 총 1024개의 요소로 분할하였다. MQM10요소에 의한 해석은 모델의 대칭성을 이용하여 1/8면만 해석하였으며, 하중은 중앙에 80N의 압축력을 상하에서 작용시켰으며 수치적분 차수는  $2 \times 2 \times 2$  적분차수를 사용하였다. 하중 작용점에서 고정단까지의 변위를 이론해의 결과와 비교한 것을 Fig.12에 나타내었다.

Fig.12에서 보는 바와 같이 양단이 완전고정된 찌그러진 원통셸 (pinched cylindrical shell)의 해석 결과는 이론해의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

#### 4. 4. 3 비선형 대변위문제 해석

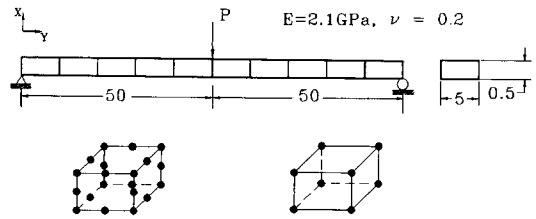
제안된 요소가 비선형 대변위문제에도 효과적인

을 검증하기 위해 Fig.13과 같은 단순 지지된 판을 해석하였다. 요소는 10개로 분할하였고 하중은 중앙에 0.0024N에서 0.024N까지 10단계로 증분시켰다. 비선형해석을 수행하여 20절점요소의 변위와 MQM10요소의 변위를 Fig.14에 비교하였다.

Fig.14에서 보는 바와 같이 QM10요소는 선형 해석에서와는 달리 오차가 비교적 작으며, MQM10요소는 선형해석에서는 물론 비선형 대변위 문제의 해석 결과도 20절점요소의 해석 결과와 큰 오차없이 잘 일치함을 알 수 있다.

#### 4. 4 자유진동의 해석

등방성 3차원 MQM10요소의 가우스 적분점



(a) 20-node element (b) MQM10 element

Fig. 13 Finite element model of simply supported plate

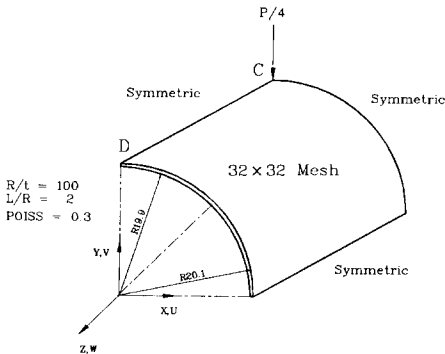


Fig. 11 Typical finite element mesh (32x32) used in the analysis of a pinched cylindrical shell

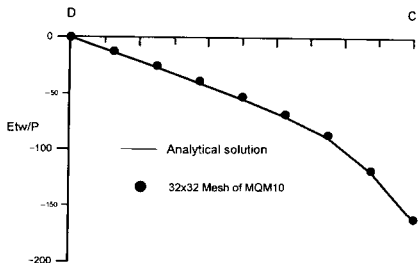


Fig. 12 Predicted displacement distributions along DC of shell in Fig. 11

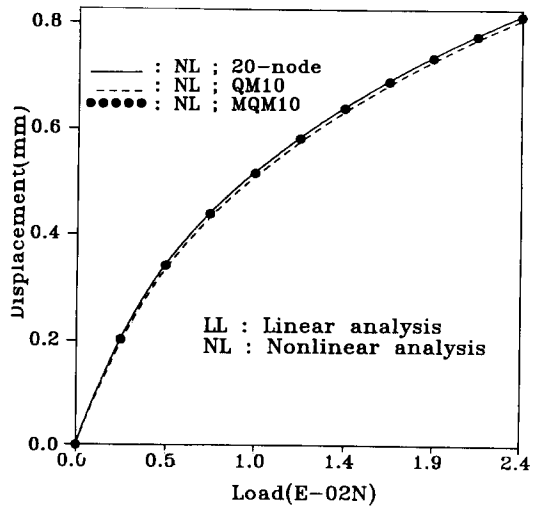


Fig. 14 Comparison of static nonlinear analysis of MQM10 element with 20-node element

수정식이 고유진동수 해석에서의 거동을 보이기 위해 폭×길이×두께가 50.5×300.0×30.0mm인 등방성 판을 해석하였다. 20절점요소의 해석을 위해 10개의 크기가 같은 요소로 분할하였고, MQM10요소는 길이 방향으로 20절점요소의 절점이 위치하는 곳에 MQM10요소의 절점이 위치하도록 20개의 요소로 분할하였다. 강성행렬 등의 수치적분은 3×3×3차의 가우스 적분을 사용하였다. 해석의 결과를 Table 6에 나타내었다. 표에서 보는 바와 같이 MQM10요소는 기존의 20절점요소의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. Table 7은 비사각 분할에 의한 고유진동수 해석으로 20절점요소와 비교하면 큰 오차가 없이 잘 일치함을 알 수 있다. Table 8은 동일한 모델에 대해 길이/두께 (L/t) = 100인 등방성박판의 경우로 해석한 결과인데 전단감점 현상이 나타나지 않음을 알 수 있다. 그리고, MQM10요소에서 가우스 적분점만 수정한 경우 3번째 모드인 비틀림 모드에서 오차가 크게 나타나나 전단탄성계수 수정식을 적용하면 크게 개선됨을 알 수 있다.

5. 결 론

3차원 등방성 판의 굽힘문제에 적용할 수 있는 MQM10요소를 새로이 개발하였다.

Table 6 Comparison of natural frequencies of isotropic plate with rectangular mesh

Classification		1st mode Hz (% error)	2st mode Hz (% error)	3st mode Hz (% error)	4st mode Hz (% error)	5st mode Hz (% error)
20-node element		281.0	465.5	1692.8	2374.4	2630.5
MQM10 element	unmod.	293.5 (4.8)	465.4 (0.22)	1772.1 (4.7)	2377.6 (1.3)	2637.5 (2.7)
	mod(eq.(34), (35))	280.2 (1.28)	463.7 (1.39)	1698.0 (1.31)	2326.9 (2.0)	2636.5 (1.2)

Table 7 Comparison of natural frequencies of isotropic plate with trapezoidal mesh

Classification		1st mode Hz (% error)	2st mode Hz (% error)	3st mode Hz (% error)	4st mode Hz (% error)	5st mode Hz (% error)
20-node element		281.1 (0.36)	465.5 (0.0)	1693.6 (0.47)	2374.3 (0.17)	2630.6 (0.38)
MQM10 element	unmod.	293.9 (4.6)	464.2 (1.29)	1774.2 (4.8)	2379.8 (2.3)	2638.4 (1.3)
	mod(eq.(34), (35))	280.5 (1.2)	464.0 (1.32)	1699.9 (1.37)	2329.0 (1.9)	2637.3 (1.25)

Table 8 Comparison of natural frequencies of isotropic thin plate (L/t=100)

Classification		1st mode Hz (% error)	2st mode Hz (% error)	3st mode Hz (% error)	4st mode Hz (% error)	5st mode Hz (% error)
20-node element		28.7	181.1	333.9	464.4	518.7
MQM10 element	unmod.	30.5 (6.3)	191.8 (5.8)	367.7 (10.)	461.4 (65)	549.7 (6.0)
	mod <sup>(1)</sup> eq.(34)	29.1 (1.4)	183.2 (1.0)	353.3 (45.8)	461.4 (65)	525.2 (1.3)
	mod <sup>(2)</sup> eq.(34), (35)	29.1 (1.4)	183.0 (0.94)	337.4 (1.1)	460.7 (8.03)	524.3 (1.1)

mod<sup>(1)</sup>: modified Gauss sampling points

mod<sup>(2)</sup>: modified Gauss sampling points and Shear modulus

제안된 MQM10요소는 3차원 20절점요소 또는 Q11요소에 비해 상대적으로 저자유도 요소이므로 자유도 수를 줄임에 기인한 상대적 강성과잉 현상을 제거할 수 있는 등방성 판의 가우스 적분점 수정식을 유도하였다. 제안된 요소의 타당성을 확인하기 위해 선형 및 비선형 정적해석, 자유진동 해석을 수행하였다. 그 결과 제안된 요소들은 자유도 수가 작음에도 불구하고 완전 요소인 3차원 20절점요소와 유사한 역할을 할 수 있음을 알 수 있었다.

이상의 내용과 수치적 계산결과를 요약하면 아래와 같다.

- 1) 일반적인 3차원 문제는 물론, 광범위한 판 문제에 적용 가능한 MQM10요소를 새로이 제안하였다.
- 2) 조각시험을 통과하여 해의 수렴성이 보장됨을 확인하였다.
- 3) 변형에너지 등가로 부터 3차원 요소인 20절점요소 또는 Q11요소에 비해 자유도가 줄어들어 기인한 상대적 강성과잉 현상을 가우스 적분점 수정 방법으로 제거하였다.
- 4) 강성과잉을 없애며 발생하는 비틀림 강성의 변화와 응력의 변화를 전단탄성 계수와 응력의 적분점 수정을 통해 원래 값으로 회복하였다.
- 5) 제안된 요소는 판의 정적 선형 및 비선형해석과 자유진동 해석에서 작은 자유도 (30)에도 불구하고 20절점요소 (자유도 60)와 유사한 거동을 함을 알 수 있었다.

## 참고 문헌

1. R.W. Clough and J.L. Tocher, "Finite element stiffness matrices for the analysis of plate bending", Proceedings, Conference on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson A.F.B., Ohio, 1965.
2. J.H. Argyris, "Continua and Discontinua", Proceedings, Conference on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson A.F.B., Ohio, 1965.
3. R.D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
4. H. Reismann, "Elastic Plates", John Wiley & Sons, Inc. Ch.3, 1988.
5. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method", 4th ed., Vol. 1, McGraw-Hill Book Co., Ch. 6-8., 1991.
6. O.C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 3, pp. 275-290, 1971.
7. E.D.L. Pugh, E. Hinton and O.C. Zienkiewicz, "A study of quadrilateral plates bending elements with reduced integration", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2, pp. 1059-1079, 1978.
8. G. Prathap and G.R. Bhashyam, "Reduced integration and their shear-flexible beam element", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 18, pp. 195-210, 1982.
9. R.L. Taylor, P.J. Beresford and E. L. Wilson, "A non-conforming element for stress analysis", I. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp. 1211-1219, 1976.
10. C.K. Choi and W.C. Schnobrich, "Nonconforming finite element analysis of shells", J.Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 101, pp. 447-464, 1975.
11. C.H. Choi and K.Y. Chung, "Two-dimensional non-conforming finite element", APCOM '96, pp. 39-52, 1996.
12. C.K. Choi and S. H. Kim, "Reduced integration, nonconforming modes, and their coupling in thin plate element", Computers and Structures, Vol. 29, pp. 57-62, 1988.
13. Hou Cheng Huang, "Implementation of assumed strain degenerated shell elements", Computers & Structures, Vol. 25, No. 1, pp. 147-155, 1987.
14. C.H. Choi and S.W. Yoo, "Geometrically nonlinear behavior of an improved degenerated shell element", Comp. Struct., Vol. 40, pp. 785-794, 1991.
15. T. Belytschko, W.K. Liu, S.J. Ong and D. Lam, "Implementation and application of a 9-node Lagrange shell element with spurious mode control", Comput. struct., Vol. 20(1-3) 1985.
16. K.J. Bathe, "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall Inc., Ch. 6-9., 1982.
17. J.N. Reedy, "An introduction to the finite element method", 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., 1993.
18. R.D. Cook, D.S. Malkus, M. E. Plesha, "Concepts and applications of finite element analysis", 3rd ed., John Wiley & Sons, Ch. 5-6., 1989
19. 김정운, 정래훈, 권영두, "6절점 2차원 isoparametric요소의 가우스 적분점 수정에 관하여", 대한기계학회논문집, 제17권 제12호, pp. 3007-3019, 1993.
20. Y.D. Kwon and T.H. Yun, "Static and dynamic analyses of bending problems using modified 5-node equivalent element", The 3rd Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, pp. 103-108, 1996.
21. J.O. Kim and Y.D. Kwon, "On the modification of Gauss sampling points of 6-node and 16-node isoparametric finite elements", Computers & Structures, Vol. 63, No. 3, pp. 607-623, 1997.
22. W. Wunderlich, E. Stein and K.J. Bathe, "Nonlinear finite element analysis in structural mechanics", Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, Ch. 3, pp. 139-147. 1981.

(접수일자 : 1996. 12. 4)