

# 손상과 소성을 고려한 콘크리트 변형을 국소화의 유한요소해석

## Finite Element Analysis of Strain Localization in Concrete Considering Damage and Plasticity

송 하 원\*      나    웅    진\*\*  
Song, Ha-Won      Na, Ung-Jin

### 요    약

콘크리트에 발생하는 변형을 국소화는 연화거동에 수반하여 변형이 국부적으로 집중되는 현상으로 이를 유한요소해석 할 수 있는 일관된 알고리즘을 개발하는 것이 본 연구의 목적이다.

변형을 국소화현상이 발생한 콘크리트는 변형률이 집중되는 국소화영역과 그외의 영역인 비국소화영역으로 크게 구분할 수 있으며 국소화영역에서는 연화현상을 포함하는 탄소성거동을 하게 되며 비국소화영역은 손상제하거동을 수반하게 된다. 변형을 국소화현상이 진행중인 콘크리트의 국소화영역을 모델링하기 위하여 열역학적으로 정식화된 전형적인 소성모델에 콘크리트의 극한응력 이후에 비선형 연화로 표현되는 소성거동을 고려할 수 있는 일반화된 Drucker-Prager 모델을 도입하였으며 소성이론식의 적분을 위해 return-mapping 알고리즘을 사용하고 일관된 알고리즘을 전개하였다. 또한, 콘크리트의 비국소화영역의 모델링을 위하여 열역학적 자유에너지함수를 수정하여 비선형 탄성 및 손상의 일관된 알고리즘을 전개하였다.

개발된 알고리즘에 의한 유한요소 해석을 통해 압축을 받는 콘크리트 부재의 변형을 국소화 현상을 해석하였다.

### Abstract

The strain localization of concrete is a phenomenon such that the deformation of concrete is localized in finite region along with softening behavior. The objective of this paper is to develop a plasticity and damage algorithm for the finite element analysis of the strain-localization in concrete.

In this paper, concrete member under strain localization is modeled with localized zone and non-localized zone. For modeling of the localized zone in concrete under strain localization, a general Drucker-Prager failure criterion by which the nonlinear strain softening behavior of concrete after peak-stress can be considered is introduced in a thermodynamic formulation of the classical plasticity model. The return-mapping algorithm is used for the integration of the elasto-plastic rate equation and the consistent tangent modulus is also derived. For the modeling of non-localized zone in concrete under strain localization, a consistent nonlinear elastic-damage algorithm is developed by modifying the free energy in thermodynamics. Using finite element program implemented with the developed algorithm, strain localization behaviors for concrete specimens under compression are simulated.

**Keywords** : concrete, strain localization, consistent algorithms, strain-softening plasticity, non-linear-elastic damage, finite element analysis

\* 정회원·연세대학교 토목공학과, 부교수  
\*\* 정회원·연세대학교 토목공학과, 석사

• 이 논문에 대한 토론회를 1997년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

변형을 국소화현상은 최대응력 이후 발생하는 연화거동에 수반되어 변형이 국부적으로 집중되는 현상을 의미하며 콘크리트와 같은 준취성재료에서 일반적으로 발견된다. 콘크리트의 변형을 국소화현상은 재료의 강도 및 전체적인 파괴 거동을 지배하게 되므로 실험이나 해석을 통해 이를 규명하는 것은 매우 중요하다. 변형을 국소화현상에는 특히 축소된 모형에 대하여 얻어진 실험결과가 실제 콘크리트 구조물에 대한 결과로 이용되지 못하는 크기효과가 존재하므로 해석의 중요성은 더욱 증대된다. 변형을 국소화현상이 발생한 콘크리트는 변형률이 집중되는 국소화영역과 그외의 영역인 비국소화영역으로 크게 구분할 수 있으며 국소화영역에서는 연화현상을 포함하는 탄소성거동을 하게 되며 비국소화영역은 손상제거거동을 수반하게 된다. 따라서 콘크리트의 변형을 국소화현상을 해석적으로 모델링하기 위해서는 국소화영역에서의 변형을 연화거동과 비국소화영역에서의 손상제거거동을 재현할 수 있는 일관된 알고리즘이 필요하며 이를 근거로 콘크리트 변형률국소화 수치해석 프로그램을 개발할 수 있다. 본 논문에서는 콘크리트에서 발생하는 변형을 국소화현상을 유한요소해석하기 위해서 국소화영역에서 발생하는 변형을 연화현상을 재현할 수 있는 일관된 탄소성 알고리즘을 개발하였고, 비국소화영역에서 최대하중 이전에서의 비선형 탄성거동과 최대하중이후의 손상제거거동을 재현할 수 있는 일관된 비선형 탄성-손상 알고리즘을 개발하였다. 이를 위해 변형이 국부적으로 집중되는 국소화영역의 모델링에는 비선형 연화현상을 포함하는 일반적인 Drucker-Prager 항복기준에 의한 소성해석 알고리즘을 적용하였다. 소성해석에서는 return-mapping 알고리즘을 사용하여 탄소성문제의 단계별 수치적분을 수행하였으며, 일관된 접선탄성계수를 도입함으로써 수치해석상의 수렴속도 및 반복계산의 효율을 꾀하였다. 한편 최대하중 이후 변형이 감소하는 비국소화영역의 모델링에는 콘크리트의 비선형 탄성거동과 최대하중이후의 손상제거를

재현하도록 열역학 법칙에 의한 자유에너지 함수를 수정하여 손상이론을 전개하였다. 또한 개발된 알고리즘에 의해 작성한 유한요소 프로그램을 통해 압축을 받는 콘크리트 부재의 국소화영역 크기에 따른 변형을 국소화현상을 해석하여 알고리즘을 검증하였다.

## 2. 변형률국소화현상의 모델링

콘크리트의 압축파괴현상을 살펴보면 변형이 균일한 모드에서 불균일하게 이행하면서 파괴패턴이 형성되며, 하중이 최대가 되는 응력까지의 과정과 최대응력 이후의 연화과정으로 나누어진다. 최대응력까지는 연속체이론을 적용한 균등한 변형률의 분포에 의한 해석으로 재료거동의 예측이 가능하다. 그러나, 최대응력 이후에서는 변형을 국소화현상이 발생하여 변형이 국부적으로 국소화되며 시편의 변형을 분포는 불균등하게 된다. 즉, 국소화된 영역에서는 응력의 감소에도 불구하고 변형률이 증가하며, 그 외의 영역에서는 변형률이 감소하는 거동이 나타난다<sup>1,2)</sup>. 콘크리트의 변형을 국소화현상을 규명하기 위한 압축파괴 실험에 의하면, 최대응력 이전에 압축시편에 발생한 미소균열은 국소화되어 손상영역을 형성하게 되며 결국 fig. 1에서 처럼 콘크리트의 파괴가 국소화된 손상영역에서 발생됨을 관찰할 수 있다<sup>2)</sup>.

Fig. 2는 콘크리트 시편의 압축에 의한 국소화 파괴와 시편 길이에 따른 응력-변형률관계를 보여준다. 콘크리트 시편은 국소화된 파괴와 더불어, 최대응력이후의 연화(softening)거동이 시편의 길이에 따라 다른 크기효과가 있음을 보여준다.

Fig. 3에 일축압축상태에서 변형을 국소화현상이 발생한 콘크리트시편을 이상화하여 도시하였다. 콘크리트 시편(fig. 3(a))의 A와 B부분에서 변위를 측정하여, 각 부분의 길이로부터 변형률을 계산할 수 있다. 시편의 B부분에서는 제하(unloading)거동이 일어났으며, 국소화된 영역 A에서는 변형을 국소화에 의한 연화현상이 발생하였다. 즉, 시편 A와 B 영역에서의 응력-변형률곡선은 fig. 3(b)에서 보이는 것처럼 최대응력 이전에서는 동일한 반면에, 최대응력이후에서는

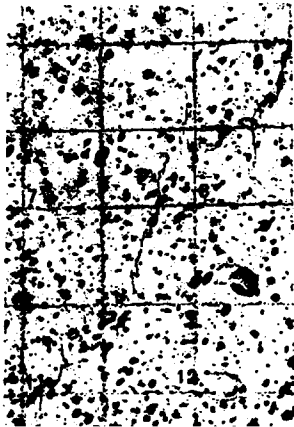


Fig. 1 Localized failure by compression

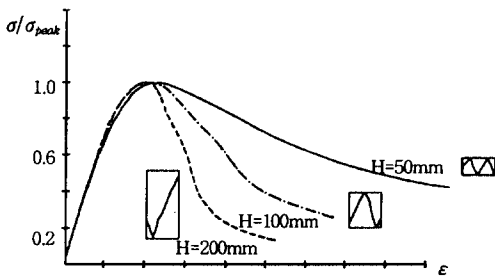
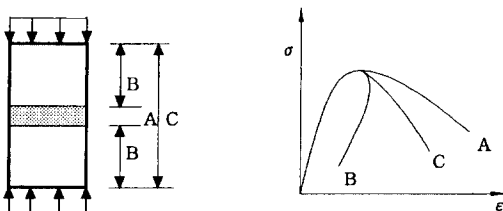


Fig. 2 Size effect of strain localization<sup>3)</sup>



(a) failure in uniaxial compression (b) stress-strain curves for different regions

Fig. 3 Strain localization behavior

뚜렷한 차이를 나타낸다. Fig. 3(b)에서 C곡선은 시편의 평균화된 응력-변형률곡선을 보여준다.

따라서, 본 연구에서는 압축을 받는 콘크리트 시편에 발생하는 변형률 국소화현상을 모델링하기 위하여, 변형률 국소화현상에 의해 콘크리트 시편의 거동영역이 fig. 3과 같이 국소화영역과 비국소화영역의 2개 영역으로 크게 나누어지는 것으로 가정하였다. 콘크리트 시편 중앙의 국소화영역은 fig. 3(b)에서 A의 응력-변형률관계, 즉 변형률의 집중에 의한 소성변형의 증가와 연화현상이 발생하고, 나머지 부분인 비국소화영역에서는 fig. 3(b)의 B와 같이 손상제하거동이 발생하는 것으로 이상화하여 본 논문에서 전개된 알고리즘에 의해 모델링을 실시하였다.

### 3. 국소화영역의 모델링

변형률 연화현상을 포함하는 국소화영역의 모델링을 위해 소성알고리즘을 전개하였다. 열역학 법칙에 의한 소성법칙을 정식화하기 위한 재료의 에너지 함수  $W$ , 내적경화변수  $\varphi$ 에 의한 자유에너지  $H$ , 그리고 Helmholtz의 자유에너지  $\psi$ 는 각각 다음과 같이 정의 된다.

$$W := \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon^p) : C : (\epsilon - \epsilon^p) \quad (1a)$$

$$H := \frac{1}{2} H \varphi^2 \quad (1b)$$

$$\psi := W + H \quad (1c)$$

여기서  $H$ 는 소성계수를 의미한다. 그리고,  $H < 0$ 인 경우는 변형률 연화현상이 발생함을 의미한다.

내적변수인 소성변형률  $\epsilon^p$ 와  $\varphi$ 에 의한 자유에너지 변화로 정의되는 소산함수는 다음 식과 같다.

$$D^p := -\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^p} : \dot{\epsilon}^p - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \quad (2)$$

열역학이론에 의한 열역학 제 2법칙은 (1)과 (2)의 식에 의해 다음과 같으며,

$$-\dot{\psi} + \sigma : \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (3)$$

연쇄법칙을 사용하여 (1)과 (3)식으로부터 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\left[ \sigma - \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \right] : \dot{\epsilon} + \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^p} : \dot{\epsilon}^p - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right] \quad (4)$$

여기서,  $-\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^p} = -\frac{\partial W}{\partial \epsilon^p} = \sigma$ ,  $-\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -H'(\varphi) = -H\varphi = k$  이므로, 소산함수 (2)를 이용하여 (4)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \quad (5a)$$

$$D^p = \sigma : \dot{\epsilon}^p + k \dot{\varphi} \geq 0 \quad (5b)$$

Clausius-Duhem 부등식 5(b)에 최대소성 소산원리를 이용하면 소성이론에 필요한 흐름법칙, 경화법칙, Kuhn-Tucker 조건이 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (6a)$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial k} \quad (6b)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0, f(\sigma, \varphi) \leq 0, \dot{\gamma} f(\sigma, \varphi) = 0 \quad (6c)$$

여기에서,  $f(\sigma, \varphi) \leq 0$  는 콘크리트의 열화를 고려할 수 있는 파괴기준을 의미하며, consistency 조건은 다음과 같다.

$$\dot{\gamma} \dot{f}(\sigma, \varphi) = 0 \quad (7)$$

### 3.1 일반화된 Drucker-Prager 파괴기준

본 연구에서는 Drucker-Prager 파괴기준을 수정하여 콘크리트의 비선형 경화 및 연화를 고려할 수 있는 일반화된 비선형 파괴기준식을 도입하였다. 일반적인 Drucker-Prager 파괴기준은 다음과 같이 정수압응력  $p$ , 유효소성변형률  $e^p$

의 연관된 식으로 쓸 수 있다.

$$f(s, p, e^p) = \|s\| - \sqrt{\frac{2}{3}} k(p, e^p) = 0 \quad (8)$$

여기서  $\|s\|$  는 편차응력  $s$ 의 norm( $\|\cdot\|$ )으로서  $\|s\| = [s : s]^{1/2} = \sqrt{2} J_2 := R$ 이다. 이때  $J_2$ 는 편차응력  $s$ 의 2차불변량이다. 한편 경화 혹은 연화함수  $k(p, e^p)$ 를  $p$ 와  $e^p$ 의 항으로 분리하여 표현하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} k(p, e^p) &= k(e^p) - \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot p \\ &= \sigma_0 + \bar{\sigma} e^p + (\sigma_\infty - \sigma_0) [1 - e^{-\beta e^p}] - \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot p \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,  $\sigma_0$ 는 초기항복응력,  $\bar{\sigma}$ 는 선형항복응력 계수,  $\sigma_\infty$ 는 극한응력,  $\beta$ 는 포화 (saturation) 계수이다. 위의 수식에서  $\alpha = 0$ 인 경우는 변형을 경화 및 연화를 고려할 수 있는 비선형 von Mises 파괴기준과 같게 된다. 식(9)의  $k(p, e^p)$ 를 사용하여 콘크리트의 변형률국소화 영역의 변형을 경화와 연화현상을 고려한 소성해석에 적용하였다.

### 3.2 Return-mapping 알고리즘

본 논문에서는 연관 흐름법칙이 적용되는 모델의 소성에 관한 기본이론에 return-mapping 알고리즘<sup>4)</sup>을 도입하였으며, 비선형 경화를 고려한다. 경화법칙을 표현하는 유효소성변형률은 아래 식과 같다.

$$\bar{e}^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} |d^p(\tau)| d\tau \quad (10)$$

또한 정수응력, 편차응력의 변화율로 표현되는 소성전개법칙은 각각 다음 식과 같다.

$$\dot{p} = \frac{1}{3} tr \dot{\sigma} = K tr \dot{\epsilon} \quad (11a)$$

$$s = 2G(\dot{e} - d^p) \quad (11b)$$

$$d^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial s} = \gamma \hat{n} \quad (11c)$$

위식에서  $tr(\cdot)$ 은  $(\cdot)$ 의 trace를 의미하고,  $e$ 는 편차변형률이며,  $\hat{n} = s / \|s\|$ 로서 항복면에 수직인 단위벡터이다. 또  $K$ 와  $G$ 는 각각 체적탄성계수와 전단탄성계수를 의미한다.

위와 같이 정식화된 소성문제에서의 return-mapping 알고리즘은 탄성추정(elastic prediction)과 소성교정(plastic correction)의 2 단계로 표현할 수 있다. 즉

$$s_{n+1}^T = s_n + 2G \Delta e_{n+1} \quad (12a)$$

$$s_{n+1} = s_{n+1}^T - (\Delta\gamma)2G \hat{n} \quad (12b)$$

또한  $t_{n+1}$ 에서  $\bar{e}_{n+1}^p$ 은 다음과 같다.

$$\bar{e}_{n+1}^p = \bar{e}_n^p + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sqrt{\frac{2}{3}} |d^p(\tau)| d\tau = \bar{e}_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}}(\Delta\gamma) \quad (13)$$

Return-mapping 알고리즘에 의한 계산순서를 요약하면 table 1과 같다.

Table 1의 return-mapping 알고리즘에서 ③의  $(\Delta\gamma)$ 는 Newton-Raphson method를 사용하여 consistency 조건에 의한 scalar 식 (14)로부터 구할 수 있다.

$$g(\Delta\gamma) = -\sqrt{\frac{2}{3}} k(\bar{e}_{n+1}^p) + \|s_{n+1}^T\| + ap_{n+1} - 2G(\Delta\gamma) = 0 \quad (14)$$

### 3.3 일관된 소성접선계수의 유도

일관된 접선계수(consistent tangent modulus)는 return-mapping 알고리즘의  $k+1$ 번째 반복 계산에서 산정된 응력과 변형률의 관계로부터 유도되며, 반복계산의 빠른 수렴성(quadratic convergence)을 보장한다<sup>4, 5, 6</sup>. 적용한 항복기준에

Table 1 Return-mapping algorithm

① 탄성시험응력의 계산 $s_{n+1}^T = s_n + 2G \Delta e_{n+1}$ $p_{n+1}^T = p_n + K tr \Delta \epsilon_{n+1}$
② 단위벡터 $\hat{n}$ 의 계산 $\hat{n} = s_{n+1}^T / \ s_{n+1}^T\ $
③ $(\Delta\gamma)$ 를 사용한 $\bar{e}_{n+1}^p$ 계산 $\bar{e}_{n+1}^p = \bar{e}_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}}(\Delta\gamma)$
④ 편차응력의 계산 $s_{n+1} = [-ap_{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}} k(\bar{e}_{n+1}^p)] \hat{n}$
⑤ 응력계산 $\sigma_{n+1} = s_{n+1} + K(tr \Delta \epsilon) \mathbf{1}$

의한 구성방정식으로 부터 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma(\sigma_n, \epsilon_n, \bar{e}_n^p, \epsilon - \epsilon_n) = K(tr \Delta \epsilon_{n+1}) \mathbf{1} + R_{n+1} \hat{n} \quad (15)$$

여기서  $R_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} k(\bar{e}_{n+1}^p) - ap_{n+1}$ 이다. 여기서, 응력을 변형률에 대해 미분함으로서 다음과 같은 일관된 접선계수를 유도할 수 있다. 즉,

$$C_{n+1} = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G \frac{R_{n+1}}{\|s_{n+1}^T\|} [\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] - 2G \frac{R_{n+1}}{\|s_{n+1}^T\|} \hat{n} \otimes \hat{n} + \hat{n} \otimes \frac{\partial R_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1}} \quad (16)$$

식(16)에 일반화된 Drucker-Prager의 파괴기준식 (9)를 적용하면, 식(16)의  $\hat{n} \otimes \frac{\partial R_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1}}$ 은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{n} \otimes \frac{\partial R_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1}} =$$

$$\hat{n} \otimes \left( -\frac{a \partial p_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial k}{\partial e^p} \frac{\partial \bar{e}^p}{\partial (\Delta \gamma)} \frac{\partial (\Delta \gamma)}{\partial \epsilon_{n+1}} \right) \\ \hat{n} \otimes \left( -\alpha K \mathbf{1} + \frac{2}{3} k' \frac{\partial (\Delta \gamma)}{\partial \epsilon_{n+1}} \right) \quad (17)$$

Chain rule을 적용하여 (16)식을 전개하면, 일관된 접선계수  $C_{n+1}$ 은 다음과 같다.

$$C_{n+1} = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\beta \left( \mathbf{1} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + \alpha K (\bar{\gamma} - 1) \\ \hat{n} \otimes \mathbf{1} + 2G(\bar{\gamma} - \beta) \hat{n} \otimes \hat{n} \quad (18)$$

여기서  $\alpha, \beta, \bar{\gamma}$ 는 다음식과 같다.

$$\alpha = \frac{6\sqrt{2} \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (19a)$$

$$\beta = \frac{-ap + \sqrt{\frac{2}{3}} k}{\|s^T\|} \quad (19b)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{2}{3} \frac{k'}{2G + \frac{2}{3} k'} \quad (19c)$$

#### 4. 비국소화영역의 모델링

압축하중하의 콘크리트는 하중의 초기 단계에서는 탄성거동을 하나, 응력과 변형률의 관계는 완전한 선형이 아닌 비선형 거동을 보인다. 또한, Fig. 3에서 볼 수 있듯이 변형률 국소화현상이 발생하는 경우 국소화영역에서는 변형률 연화 거동이 발생하는 데 반해, 비국소화영역에서는 손상제하(unloading)가 발생하게 된다. 즉 비국소화영역에서는 하중의 제하와 재재하과정에서 재료의 손상에 의한 강성저하현상을 고려하여야 한다. 본 연구에서는 이와 같은 하중의 초기 단계에서의 콘크리트의 비선형 탄성거동과 최대하중이후의 손상제하거동을 재현하기 위해 열역학의 자유에너지로부터 비선형 탄성-손상법칙을 정식화하였다.

##### 4.1 비선형 손상모델

경화이전의 자유에너지  $\psi$ 가 내적 손상변수  $q$

에 관한 함수일 때 열역학 제2법칙 식(3)은 다음과 같다.

$$\left[ \sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right] : \dot{\epsilon} - \frac{\partial \psi}{\partial q} \dot{q} \geq 0 \quad (20)$$

즉,  $\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}, \frac{\partial \psi}{\partial q} \dot{q} \leq 0$  을 얻을 수 있다. 콘크리트에 경화가 발생하기 이전까지의 비선형 탄성재하/loading)와 손상제하(unloading) 및 재재하(reloading)를 정식화하기 위해 자유에너지 함수  $\psi(\epsilon, q)$  를 아래 식과 같이 정의한다.

$$\psi(\epsilon, q) = \frac{1}{2} K (tr \epsilon)^2 + G \bar{g}(q) \|e\|^2 \quad (21)$$

이때  $\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}$  으로부터 다음의 구성방정식을 얻을 수 있다.

$$\sigma = K (tr \epsilon) \mathbf{1} + 2G \bar{g}(q) e \quad (22)$$

위의 식에서  $q$  는 편차변형률  $e$ 의 norm ( $\|\cdot\|$ )으로서  $q = \|e\| = [e : e]^{1/2}$ 이며,  $\bar{g}(q)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{g}(q) = \beta + (1-\beta) \frac{1 - e^{-q/a}}{q/a} : a \in [0, \infty], \beta \in [0, 1] \quad (23)$$

식 (23)에서 손상계수  $\alpha, \beta$ 를 정함으로서 손상의 정도를 조절할 수 있으며,  $\beta = 1$ 이면  $\bar{g} = 1$ 이 되어 손상이 발생하지 않은 경우의 선형 탄성계수가 된다.

##### 4.2 일관된 손상 접선계수의 유도

응력식(22)을 변형률에 관하여 미분함으로서 얻어지는 접선계수는 다음과 같다.

$$C = K \frac{\partial (tr \epsilon)}{\partial \epsilon} \otimes \mathbf{1} + 2G \left[ \frac{\partial \bar{g}(q)}{\partial \epsilon} \otimes e + \bar{g}(q) \frac{\partial e}{\partial \epsilon} \right] \quad (24)$$

여기서,  $\frac{\partial \bar{g}(q)}{\partial \epsilon}$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{g}(q)}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial \bar{g}(q)}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial \varepsilon} \\ &= \bar{g}'(q) \cdot \frac{e}{\|e\|} \cdot \mathbf{I}_{dev} \\ &= \bar{g}'(q) \cdot n \end{aligned} \quad (25)$$

여기서  $\bar{g}'(q)$  는 식 (23)을  $q$ 에 대해 미분하여 구하며  $n := \frac{e}{\|e\|}$ ,  $\mathbf{I}_{dev} := \frac{\partial e}{\partial \varepsilon}$  이다.

따라서 식(24)을 다시 쓰면,

$$C = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G[\bar{g}'(q) \cdot n \otimes e + \bar{g}(q) \cdot \mathbf{I}_{dev}] \quad (26)$$

한편, 하중함수를  $h = \|e\| - q$  이라 할 때, 손상전개법칙은 다음과 같다.

$$\dot{q} \begin{cases} 0 & \text{if } h(e,q) < 0 \text{ or } h(e,q) = 0, \frac{\partial h}{\partial e} : \dot{e} \leq 0 \\ < n : \dot{e} > & \text{if } h(e, q) = 0, \frac{\partial h}{\partial e} : \dot{e} > 0 \end{cases} \quad (27)$$

손상모델에서의 하중 재하시 접선탄성계수는 (25)식과 같고, 하중을 제하하는 경우와 최초 재하점까지 재재하하는 경우에는  $\dot{q} = 0$  이므로,

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \varepsilon} \otimes e = 0 \quad (28)$$

즉, 하중 제하 및 재재하시의 접선탄성계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C &= K \frac{\partial(tr\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \otimes \mathbf{1} + 2G\bar{g}(q) \frac{\partial e}{\partial \varepsilon} \\ &= K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\bar{g}(q) \mathbf{I}_{dev} \end{aligned} \quad (29)$$

Fig. 4에서는 하중 재하시의 비선형 탄성거동과 재하시 손상에 의한 재료의 거동을 도식화 하였다.

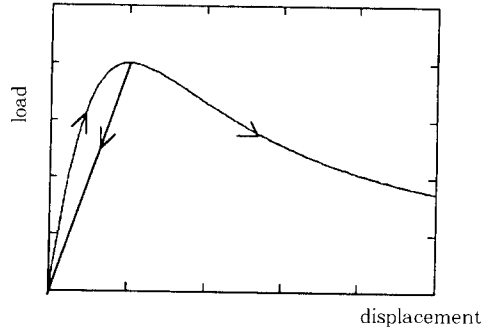


Fig. 4 Nonlinear elastic-damage behavior

### 5. 유한요소해석에 의한 알고리즘의 검증

국소화영역 모델링에 사용된 알고리즘을 검증하기 위해 1개의 4절점 isoparametric 유한요소<sup>7)</sup>를 사용하여 유한요소해석을 수행하였다. 응력이 후의 변형을 연화현상을 나타내기 위해 변위를 제어하여 해석을 수행하였다. Fig. 5는 Drucker-Prager 항복기준에서  $\alpha$ 의 변화(즉, 내부마찰각  $\phi$ 의 변화)에 따른 변위-응력의 관계를 보여준다. 여기서,  $\alpha = 0$ (즉,  $\phi = 0$ )인 경우는 von Mises 항복기준에 해당되며  $\alpha$  값에 따라 콘크리트의 소성거동을 다르게 재현할 수 있음을 알 수 있다.

Table 2에는 본 연구에서 적용한 일관된 접선계수의 수렴속도 향상 및 효율성을 입증하기 위해 연속체 접선계수(continuum tangent modulus)를 사용한 계산결과와 비교하였다. 모형의 임의의 하중단계에 대해 2가지 접선탄성계수에 의한 수치해석을 수행하여 각 반복계산 단계에서의 residual norm을 비교한 결과, table 2에서 처럼 일관된 접선계수를 사용한 경우 훨씬 빠른 수렴성을 확인하였다.

또한, 비국소화영역의 유한요소 모델링에 사용된 비선형 탄성-손상 알고리즘을 검증하기 위해 국소화영역 모델링 검증에 사용된 것과 같이 1개의 4절점 isoparametric 유한요소를 사용하여 유한요소해석을 수행하였다. Fig. 6은 유한요소해석 결과를 나타낸 것으로 하중재하시 비선형탄성

거동을 따르고, 하중제하시에는 손상이론에 의한 손상제거거동을 재현함을 알 수 있다.

검증된 국소화영역의 요소와 비국소화영역의

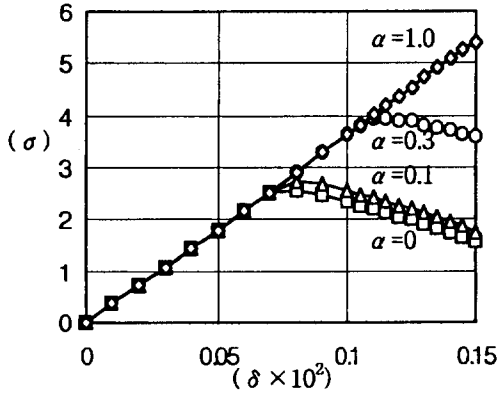


Fig. 5 Stress-displacement relations of localized-zone

Table 2 Comparison of the convergence by the iteration number

iteration number	norm of consistent tangent modulus	norm of continuum tangent modulus
1	0.549E-2	0.549E-2
2	0.364E-2	0.364E-2
3	0.575E-3	0.204E-2
4	0.250E-4	0.135E-2
5	0.644E-7	0.997E-3
6		0.777E-3
7		0.623E-3
8		0.506E-3
9		0.415E-3
10		0.343E-3
11		0.284E-3
12		0.235E-3
13		0.196E-3
14		0.163E-3
15		0.136E-3
16		0.114E-4
17		0.950E-4
18		0.796E-4
19		0.666E-4
20		0.558E-4

요소를 사용하여 국소화영역의 크기는 일정하나 길이가 다른 콘크리트 부재(L = 1 : 2 : 4)에 대해 유한요소해석을 수행하였다. 즉, 변형률 국소화현상에 수반되는 크기효과를 규명하기 위해 fig. 7과 같이 수치모형화하였다. 이를 위해 변형률 국소화현상이 발생한 부재를 국소화영역과 비국소화영역으로 구분하여 시편의 1/2에 대하여 모델링하였다.

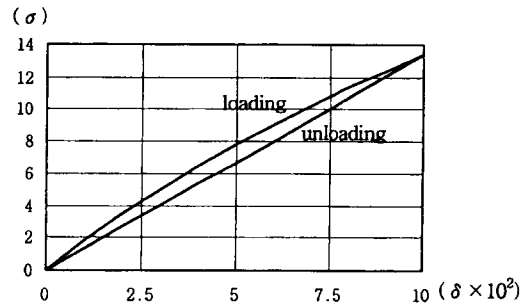


Fig. 6 Stress-displacement relations of non-localized zone

또한, 부재의 크기변화에 따른 변형률 국소화현상의 거동분석과 더불어 fig. 8과 같이 국소화영역의 크기변화에 따른 영향을 분석하기 위한 수치해석을 수행하였다. 본 연구에서는 국소화영역의 크기  $\Omega L$ 를 0.1 L : 0.2 L : 0.4 L로 변화시키면서 유한요소해석을 수행하여 국소화영역의 크기효과 또한 재현하였다.

국소화영역의 크기는 일정하다고 가정하고, 부재의 크기 L을 1 : 2 : 4로 변화시키면서 계산한 응력과 변형률관계는 fig. 9의 각각 그래프 A, B, C이며, 응력과 총변위량과의 관계 그래프를 Fig. 10에 도시하였다. Fig. 9와 fig. 10에서 볼 수 있듯이, 해석 프로그램은 변형률 국소화현상이 발생하는 부재의 거동에 부재의 치수에 따른 크기효과를 재현하고 있음을 알 수 있다. 즉, fig. 9의 응력-변형률관계 그래프를 통해 극한응력이전의 거동은 부재의 치수에 관계없이 일정하나, 극한응력이후의 영역에서는 부재의 치수가 커질수록 실험에서 관찰한 것과 같이 응력-변형률



관계의 그래프가 더 큰 경사를 이룸을 알 수 있다. 즉 부재의 크기가 커질수록 더 큰 연화현상이 발생함을 알 수 있다. 또한 fig. 10을 보면 각각 부재의 치수에 따라 응력과 총변위량의 관계 그래프는 상이하나 최종적으로는 일정한 값을 향해 수렴함을 알 수 있다. 즉 부재의 최종적인 변위는 국소화영역의 크기에 의해 지배됨을 알 수 있다.

Fig. 11은 부재의 크기  $L$ 은 일정하고 국소화영

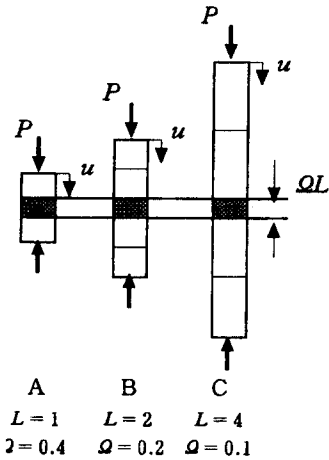


Fig. 7 Finite element modeling considering size of the specimen

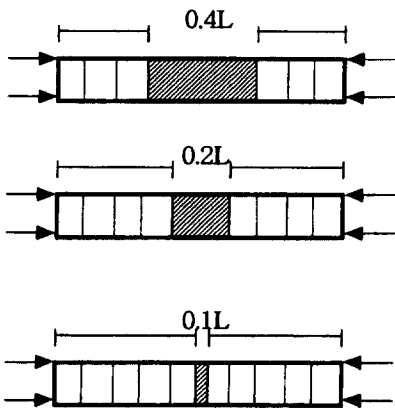


Fig. 8 Finite element modeling considering size of the localized-zone

역의 범위가 바뀌는 경우의 변형을 국소화거동에 대한 수치해석 결과를 도시한 것으로 총변위량과 응력의 관계를 기준으로 하였으며, 국소화영역의 크기가 변함에 따라 극한응력 이후의 재료의 응력-총변위량의 관계가 상이함을 알 수 있다.

개발된 알고리즘에 의한 유한요소해석의 각 하중단계에 대해 국소화영역과 비국소화영역에서의 요소 응력과 변형률을 fig. 12에 각각 도시하였다. Fig. 12에서 극한응력 이후 연화현상이 발생하는 국소화영역의 모델링이 정확하게 되었음을 알 수 있다.

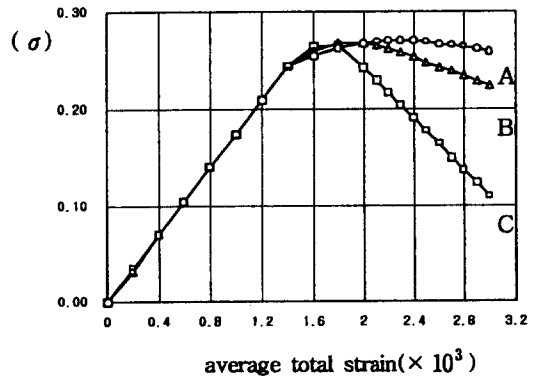


Fig. 9 Stress-strain curves for different size of specimen

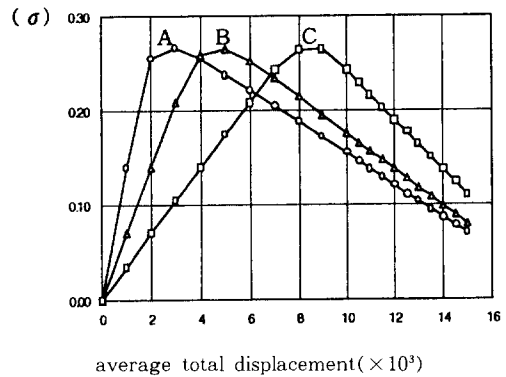


Fig. 10 Stress-displacement curves for different size of specimen

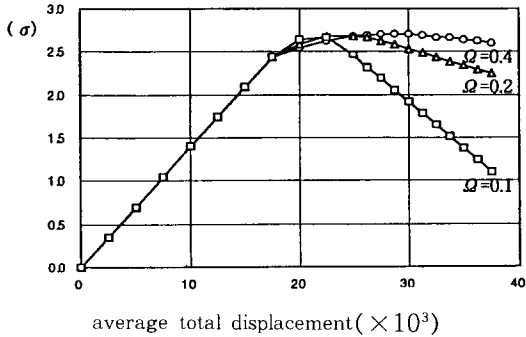


Fig. 11 Stress-displacement curves for different size of localized zone

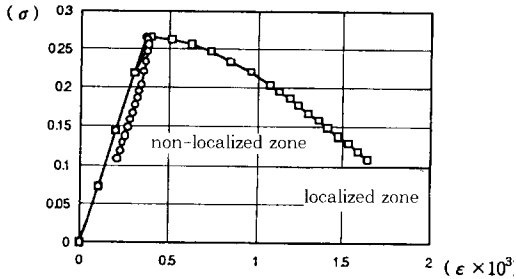


Fig. 12 Stress-strain curves of localized and non-localized zone

## 6. 결 론

손상 및 소성을 고려한 콘크리트 변형률 국소화현상의 유한요소 모델링에 관한 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1) 변형률 국소화현상이 발생하는 콘크리트 일축 압축부재를 국소화영역과 비국소화영역으로 구분하여 모델링하였고 비국소화영역의 거동을 재현할수 있는 비선형 탄성-손상 알고리즘을 전개하였으며, 국소화영역의 연화거동을 나타낼수 있는 일반적인 Drucker-Prager 모델을 도입하여 소성이론을 전개하였고 return-mapping 알고리즘에 의한 소성식의 적분을 수행하였다.

또한 수렴성이 우수한 일관된 접선탄성계수를 유도하여 향상된 수렴성을 갖는 유한요소 프로그램을 개발하였다.

2) 개발된 알고리즘에 의한 유한요소프로그램으로부터 국소화영역과 비국소화영역의 알고리즘을 검증하였으며 변형률 국소화현상이 발생하는 콘크리트 압축부재에 대해 유한요소해석을 수행하였다. 해석결과로부터 본 논문의 알고리즘과 모델링 기법이 부재의 크기효과를 포함하는 콘크리트의 변형률 국소화현상을 재현할 수 있음을 보였다.

## 참 고 문 헌

1. 송하원, 서철, "콘크리트의 변형률 국소화에 관한 해석적 연구", 콘크리트학회 논문집, Vol. 8, No. 2, 1996, pp. 129~138.
2. Jansen, D. C and Shah, S. P., "Effect of Length on Compressive Strain Softening of Concrete", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 123, No. 1, 1997, pp. 25~34.
3. van Mier, J. G. M., *Fracture of Concrete under Complex Stress*, Heron, Heron Publication, Vol. 31, No. 3, 1986.
4. Simo, J. C. and Taylor, R. L., "Consistent Tangent Operators for Rate Independent Elastoplasticity", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 48, 1985, pp. 101-108.
5. de Borst, R. and Groen, A. E., "A Note on the Calculation of Consistent Tangent Operators for von Mises and Drucker-Prager Plasticity", Comm. Num. Meth. Eng., Vol. 10, 1994, pp. 1021-1025.
6. Mitchell, G. P. and Owen, D. R. J., "Numerical Solution for Elasto-Plastic Problems", Engineering Computations, 1988, pp. 274~284
7. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The Finite Element Method: 4th edition*, McGrawHill, England, 1989.

(접수일자 : 1997. 6. 20)