

탄성 선형 경화 재료로 구성된 복합 구조물의 자유 경계면에서 나타나는 응력특이도

The Free Edge Stress Singularity At An Interface of Bilinear Material Structure

정 철 섭*
Chung, Chul-sup

요 지

탄성 선형 경화 재료로 구성된 복합 구조물의 자유 경계면에서 나타나는 응력 특이도를 평면 변형률 상태에서 계산하였다. 자유 표면력 경계조건과 계면 연속조건을 만족해야하는 지배 탄성 방정식은 2점 경계치문제로 정의되며, 일반 고유치 문제의 해인 고유치가 응력 특이도가 될 것이다. 자유경계면 근처에서 응력 성분을 r^{s-1} 에 비례한다고 가정하여 특정한 s (고유치)를 구하는 고유치 문제를 뉴턴 향상법과 사격법을 사용하여 수치적으로 해를 구하였다.

Abstract

The order of the stress singularity that occurs at the termination of an interface between materials exhibiting bilinear stress-strain response under plane strain conditions has been calculated. The governing equation of elasticity together with traction-free boundary condition and interface continuity condition defines a two-point boundary value problem. The stress components near the free edge are assumed to be proportional to r^{s-1} , with solutions existing only for certain values of s . Finding these values entails the solution of an eigenvalue problem. Because it has been impossible to integrate the differential equations analytically, the integration has been performed numerically with a shooting method coupled with a Newton improvement scheme.

Keywords : stress singularity, bilinear stress-strain response, shooting method, interface, free edge

1. 서 론

다양한 특성을 가진 서로 상이한 이종 재료를 집합하여 사용하는 사례가 전자 부품 패키지 분야등

각종 산업분야에서 응용되고 있다. 이들 복합 구조물에서 균열이 생성되는 위치는 주로 상이한 재료들의 접합 면인 계면과 응력이 집중되는 이들 계면과 자유 응력단과 만나는 부근이 대부분이다¹⁾.

* 성회원·건양대 기계공학과, 조교수

·이 논문에 대한 토론을 1997년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

이종재료의 접합시 재료들이 완전히 접합되더라도 계면과 자유 응력단과 만나는 부근은 재료의 성질 및 형상의 불연속으로 인하여 응력은 항상 특이(singular)하다고 알려져왔다²⁾.

Bogy³⁾는 임의의 각도에서 서로 결합된 이중 탄성 웨지(elastic wedge)에서의 특이 응력 거동에 대하여 연구를 하였다. 그의 연구 결과에 의하면, 웨지 꼭지각에서의 응력 특이도 (the order of singularity)는 웨지 각과 재료 상수에 의존한다고 발표하였다. Dempsey와Sinclair⁴⁾는 여러 가지 경계 및 계면 조건에 대하여 2차원 웨지의 꼭지각 부근에서 발생하는 응력장에 관한 해석 결과를 제시하였다. Duva⁵⁾는 비탄성 재료에 함입된 직교 강체 웨지로 구성된 섬유 단을 모델링하여 섬유단구석에서의 응력장의 특이 거동을 규명하였다. 그러나, 상기 연구 결과들은 탄성 거동을 하는 재료들에 관한 것들이어서 선형 경화 거동을 하는 재료 조합에 대한 응력 특이도를 정확히 예측할 수 없으며, 선형 경화 거동을 하는 경우에도 직교 완전 강체가 선형 경화 거동을 하는 재료에 함입된 형상이어서 적층 구조물 형상에 적용하기가 곤란하였다.

본 논문에서는 탄성-선형 경화 (bilinear) 응력-변형률 응답을 갖는 2개의 층으로 구성된 복합 구조물의 자유경계면에서 발생하는 응력장의 특이도를 구할 것이다. 자유표면력 경계조건과 각 레이어 접합계면의 연속 조건을 만족해야하는 지배 미분 방정식은 2점 경계치 문제로 정의되며, 일반 고유치 문제의 해인 고유치가 응력 특이도가 될 것이다. 또한, 지배 미분 방정식을 해석적으로 적분할 수 없기 때문에 수치적으로 해를 구할 것이며, 응력장은 r^{s-1} 형태로 표시된다. 여기서 r은 특이도가 발생하는 곳에서부터의 거리이며 s는 0에서 1사이 에 존재하는 고유치이다.

본 논문에서 제시한 해석 방법을 사용하여 응력 특이도를 감소시키는 전자부품 패키지의 재료 조합을 예측할 수 있어 자유경계면과 만나는 계면 접합점에서의 균열 형성의 가능성을 줄일 수 있으므로 전자부품 패키지의 기본 설계에 응용될 수 있다.

2. 복합구조물의 공식화

본 연구에서는 그림 1과 같이 서로 상이한 선형 경화 거동을 하는 등방성 재료가 완전하게 결합된 2개의 층으로 구성된 복합 구조물의 자유경계면에서 발생하는 응력 특이도를 평면 변형률을 가정하여 계산할 것이다. 해석 편의상 특이 응력이 예상되는 부근에서 극좌표계를 설정하여 기술할 것이다. 극좌표계에 대한 응력 평형 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_{\theta\theta})}{\partial \theta} - \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(r\sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_{r\theta})}{\partial \theta} - \sigma_{r\theta} = 0 \quad (2)$$

선형 변형률-변위 방정식은 다음과 같다.

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \quad (4)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (5)$$

여기서 u, v 는 반경방향, 접선방향 변위이다. $r=0$ 근처에서 대변형률이 예상되지만, 해석을 간편하게 하기위해 선형 변형률-변위 방정식이 사

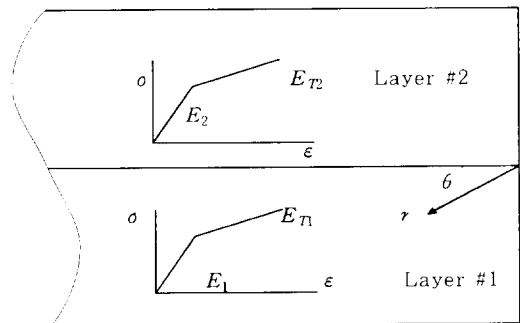


Fig. 1 Configuration of Bimaterial Interface

용된다. 해석에 사용되는 단축 응력 상태의 구성방정식(응력-변형률 관계)은 다음 비선형 탄소성 응답을 따른다.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \sigma < \sigma_0 \quad (6)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\sigma - \sigma_0}{E_T} \quad \sigma > \sigma_0 \quad (7)$$

여기서 σ_0 , ε_0 ($\varepsilon_0 = \sigma_0/E$)는 각각 항복 응력 및 변형률을 나타내며, E 는 탄성계수, E_T 는 $\frac{\sigma - \sigma_0}{\varepsilon - \varepsilon_0}$ 로 정의되는 접선 계수이다. 상기 방정식은 단조 증가 응력에 적용되며, 탄성적 하중 제거 경우는 고려하지 않는다. 식 (7)은 선형 경화 거동을 나타낸다. 식 (7)에 대한 다축 응력 상태의 일반식은 다음과 같다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{3}{2} \left(\frac{E}{E_T} - 1 \right) \frac{\sigma_e - \sigma_0}{\sigma_e} s_{ij} \right] \quad \text{for } \sigma_e > \sigma_0 \quad (8)$$

여기서 s_{ij} 는 $\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ 로 정의되는 편차 응력이며, σ_e 는 $\left(\frac{3}{2}s_{kl}s_{kl}\right)^{1/2}$ 로 정의되는 유효 응력이다. 자유 응력단 근처에서의 응력은 식 (8)이 성립할 수 있을 정도로 충분히 크다. 식 (8)에서 대괄호안의 처음 2항은 선형 탄성 거동을 나타내며, 3번째 항은 소성 (또는 비선형) 응답을 나타내는 접선 계수를 포함하고 있다. 여기서, 소성 변형률은 비압축성이다. $r=0$ 근처에서의 변위장 및 응력장은 Ponte Castaneda⁶⁾의 변수 분리 해로 다음과 같이 표시된다.

$$u_i = \bar{K} r^s f_{1i}(\theta), \quad v_i = \bar{K} r^s f_{2i}(\theta) \quad (9)$$

$$\sigma_{\theta\theta i} = E_l \bar{K} r^{s-1} f_{3i}(\theta), \quad \sigma_{r\theta i} = E_l \bar{K} r^{s-1} f_{4i}(\theta)$$

$$\sigma_{rr i} = E_l \bar{K} r^{s-1} f_{5i}(\theta), \quad \sigma_{z z i} = E_l \bar{K} r^{s-1} f_{6i}(\theta) \quad (10)$$

여기서 $f_{i\ell}(\theta)$, $i=1, 2, \dots, 6$ 는 결정해야 할 θ 만의 함수이며, 첨자 ℓ 은 1, 2로 표시되며, 해석하려는 모델의 레이어(layer)의 번호를 나타낸다. 상수 $E_l \bar{K}$ 가 함수 $f_{i\ell}$ 을 무차원으로 만들기 위해 상기 식에 포함된다. 상기 변위 및 응력에 대한 식들을 [식 (9)와 (10)] ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{r\theta}$ 에 대한 변위-변형률 관계식, 구성 방정식 및 평면변형률 조건식 $\varepsilon_{zz}=0$ 에 대입하면 각 레이어에서 2개의 1계 미분방정식과 2개의 대수 방정식을 얻을 수 있으며, 또한 2개의 평형방정식에 대입하여 2개의 1계 미분방정식을 추가로 얻는다.

레이어 #1

식 (3)과 (8)을 사용하여 ε_r 에 대한 식을 구하면, 다음 대수 방정식을 얻는다.

$$s f_{11} = f_{51} - \nu(f_{31} + f_{61}) + \frac{A_1}{3}(2f_{51} - f_{31} - f_{61}) \quad (11)$$

평면변형률 조건식($\varepsilon_{zz}=0$)을 적용하면 2 번째 대수 방정식을 얻는다.

$$f_{61} - \nu(f_{51} + f_{31}) + \frac{A_1}{3}(2f_{61} - f_{51} - f_{31}) = 0 \quad (12)$$

상기 응력에 관한 공식 (10)을 응력 평형 방정식에 대입하면 2개의 미분 방정식을 얻는다.

$$s f_{51} + f'_{41} - f_{31} = 0 \quad (13)$$

$$(s+1)f_{41} + f'_{31} = 0 \quad (14)$$

식 (4),(5)와 (8)을 사용하여 $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{r\theta}$ 에 대한 구상방정식으로부터 다음 미분 방정식을 얻는다.

$$f'_{21} + f_{11} = f_{31} - \nu(f_{51} + f_{61}) + \frac{A_1}{3}(2f_{31} - f_{51} - f_{61}) \quad (15)$$

$$\frac{1}{2}[f'_{11} + (s-1)f_{21}] = f_{41}(1 + \nu + A_1) \quad (16)$$

레이어 #2

레이어 #1과 유사한 미분, 대수 방정식을 레이어 #2에 대해 얻을 수 있다.

$$sf_{12} = f_{52} - \nu_2(f_{32} + f_{62}) + \frac{A_2}{3}(2f_{52} - f_{32} - f_{62}) \quad (17)$$

$$f_{62} - \nu_2(f_{52} + f_{32}) + \frac{A_2}{3}(2f_{62} - f_{52} - f_{32}) = 0 \quad (18)$$

$$sf_{52} + f'_{42} - f_{32} = 0 \quad (19)$$

$$(s+1)f_{42} + f'_{32} = 0 \quad (20)$$

$$f'_{22} + f_{12} = f_{32} - \nu_2(f_{52} + f_{62}) + \frac{A_2}{3}(2f_{32} - f_{52} - f_{62}) \quad (21)$$

$$\frac{1}{2}[f'_{12} + (s-1)f_{22}] = f_{42}(1 + \nu_2 + A_2) \quad (22)$$

상기 식에서 나타나는 상수 A_1, A_2 는 다음 식으로 표시된다.

$$A_1 = \frac{3}{2}(\alpha_l^{-1} - 1) \left(\frac{\sigma_{el} - \sigma_{0l}}{\sigma_{el}} \right), \quad \alpha_l = \frac{E_{rl}}{E_l} \quad (23)$$

특이 응력이 발생하는 지점에서의 응력이 매우 크다고 가정하면 $\left(\frac{\sigma_{el} - \sigma_{0l}}{\sigma_{el}} \right)$ 은 1로 접근하므로, 상수 A_1 의 계산에서 위의 항이 생략된다. α_l 은 레이어 재료의 접선계수의 탄성계수에 대한 비로 표시되는 경화(hardening) 파라미터이다. 함수 $f_{5i}(\theta)$ 와 $f_{6i}(\theta)$ 는 대수 방정식 (11), (12) 또는 (17), (18)로부터 다음과 같이 함수 $f_{1i}(\theta)$ 와 $f_{3i}(\theta)$ 로 표시할 수 있다.

$$f_{5i} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\nu_i + \frac{A_i}{3} \right) (1 + \nu_i + A_i) f_{3i} + \left(1 + \frac{2}{3} A_i \right) s f_{1i} \right] \quad (24)$$

$$f_{6i} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\nu_i + \frac{A_i}{3} \right) (1 + \nu_i + A_i) f_{3i} + \left(\nu_i + \frac{1}{3} A_i \right) s f_{1i} \right] \quad (25)$$

여기서, $\Delta = \left(1 + \frac{2}{3} A_i \right)^2 - \left(\nu_i + \frac{1}{3} A_i \right)^2$ 이다.

따라서, 각 레이어의 미분 방정식에 나타나는 함수 $f_{5i}(\theta)$ 와 $f_{6i}(\theta)$ 을 소거할 수 있으므로 다음과 같은 8개의 1계 미분방정식을 얻는다.

식 (16)으로부터,

$$f'_{11} = 2f_{41}(1 + \nu_1 + A_1) - (s-1)f_{21} \quad (26)$$

식 (15)로부터,

$$f'_{21} = f_{31} - \nu_1(f_{51} + f_{61}) + \frac{A_1}{3}(2f_{31} - f_{51} - f_{61}) - f_{11} \quad (27)$$

식 (14)로부터,

$$f'_{31} = -(s+1)f_{41} \quad (28)$$

식 (13)으로부터,

$$f'_{41} = f_{31} - s f_{51} \quad (29)$$

식 (22)로부터,

$$f'_{12} = 2f_{42}(1 + \nu_2 + A_2) - (s-1)f_{22} \quad (30)$$

식 (21)로부터,

$$f'_{22} = f_{32} - \nu_2(f_{52} + f_{62}) + \frac{A_2}{3}(2f_{32} - f_{52} - f_{62}) - f_{12} \quad (31)$$

식 (20)으로부터,

$$f'_{32} = -(s+1)f_{42} \quad (32)$$

식 (19)로부터,

$$f'_{42} = f_{32} - s f_{52} \quad (33)$$

이제, 각 레이어에서 자유 표면력 조건식과 레이어 계면에서의 연속 조건식을 구한다. 먼저 각 레이어에서 자유 표면력 조건식은 다음과 같다.

레이어 #1

$$\sigma_{\theta\theta 1} \left(r, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = 0 \rightarrow f_{31} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (34)$$

$$\sigma_{r\theta 1}(r, \theta = \frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow f_{41}(\frac{\pi}{2}) = 0$$

레이어 #2

$$\sigma_{\theta\theta 2}(r, \theta = -\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow f_{32}(-\frac{\pi}{2}) = 0 \quad (35)$$

$$\sigma_{r\theta 2}(r, \theta = -\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow f_{42}(-\frac{\pi}{2}) = 0$$

계면에서의 변위 및 표면력의 연속 조건식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta 1}(r, \theta = 0) &= \sigma_{\theta\theta 2}(r, \theta = 0) \\ &\rightarrow E_1 f_{31}(0) = E_2 f_{32}(0) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta 1}(r, \theta = 0) &= \sigma_{r\theta 2}(r, \theta = 0) \\ &\rightarrow E_1 f_{41}(0) = E_2 f_{42}(0) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta = 0) &= u_2(r, \theta = 0) \\ &\rightarrow f_{11}(0) = f_{12}(0) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} v_1(r, \theta = 0) &= v_2(r, \theta = 0) \\ &\rightarrow f_{21}(0) = f_{22}(0) \end{aligned} \quad (39)$$

상기 8개의 1계 미분 방정식[식(26) - 식(33)]은 4개의 경계 조건식[식(34)와 식(35)]과 4개의 연속 조건식[식(36) - 식(39)]과 함께 경계치 문제를 구성하며 특성치 s 에 대하여 해가 존재한다. s 를 결정하여 지배 미분 방정식을 해석적으로 적분하는 것은 불가능하므로 초기치 문제로 취급하여 수치적으로 근사해를 구한다. 사격법 (shooting method)을 사용하여 레이어 #1에서의 미분 방정식을 자유경계면($\theta = \frac{\pi}{2}$)에서 계면($\theta = 0$)까지 적분한다. 마찬가지로, 레이어 #2에서의 미분 방정식을 자유경계면($\theta = -\frac{\pi}{2}$)에서 계면($\theta = 0$)까지 적분한다. 이러한 과정을 계면에서의 연속 조건이 허용값이내에서 만족할 때까지 반복한다. 4차 Runge-Kutta법을 사용하여 미분 방정식을 수치적으로 적분하며, 뉴턴 반복법을 사용하여 미지수에 대한 초기 가정값(guess)을 향상시킨다. 수치적으로 구할

미지수는 $s, f_{11}(\frac{\pi}{2}), f_{12}(-\frac{\pi}{2}), f_{22}(-\frac{\pi}{2})$ 이다. k 번째 반복과정에서 얻은 미지수가 벡터 \mathbf{x}^k 에 다음과 같이 저장된다.

$$\mathbf{x}^k = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ f_{11}(\pi/2) \\ f_{12}(-\pi/2) \\ f_{22}(-\pi/2) \end{bmatrix}$$

연속 조건식의 오차는 벡터 \mathbf{b}^k 에 다음과 같이 저장된다

$$\mathbf{b}^k = \begin{bmatrix} b_1^k \\ b_2^k \\ b_3^k \\ b_4^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1^k, x_2^k) - f_{12}(x_1^k, x_3^k, x_4^k) \\ f_{21}(x_1^k, x_2^k) - f_{22}(x_1^k, x_3^k, x_4^k) \\ E_1 f_{31}(x_1^k, x_2^k) - E_2 f_{32}(x_1^k, x_3^k, x_4^k) \\ E_1 f_{41}(x_1^k, x_2^k) - E_2 f_{42}(x_1^k, x_3^k, x_4^k) \end{bmatrix}$$

$f_{11}(x_1^k, x_2^k)$ 는 레이어 #1의 계면에서의 함수 f_{11} 이 미지수 x_1^k, x_2^k 의 함수임을 나타낸다.

($k+1$)번째 반복 미지수 값을 구하는 공식은 k 번째, ($k-1$)번째 반복 미지수 값을 사용하여 아래와 같이 표시된다.

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1^k \\ b_2^k \\ b_3^k \\ b_4^k \end{bmatrix}$$

여기서 k_{ij} 는 자코비안(Jacobian) 행렬의 원소로서 다음과 같다.

$$k_{11} = \frac{[f_{11}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) - f_{12}(x_1^{k-1}, x_3^{k-1}, x_4^{k-1})]}{x_1^{k-1} - x_1^k}$$

$$- \frac{[f_{11}(x_1^k, x_2^{k-1}) - f_{12}(x_1^k, x_3^{k-1}, x_4^{k-1})]}{x_1^{k-1} - x_1^k}$$

$$k_{12} = \frac{[f_{11}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) - f_{12}(x_1^{k-1}, x_3^{k-1}, x_4^{k-1})]}{x_2^{k-1} - x_2^k}$$

$$- \frac{[f_{11}(x_1^{k-1}, x_2^k) - f_{12}(x_1^{k-1}, x_3^{k-1}, x_4^{k-1})]}{x_2^{k-1} - x_2^k}$$

$$k_{i3} = \frac{[f_{i1}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) - f_{i2}(x_1^{k-1}, x_3^{k-1}, x_4^{k-1})]}{x_3^{k-1} - x_3^k}$$

$$- \frac{[f_{i1}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) - f_{i2}(x_1^{k-1}, x_3^k, x_4^{k-1})]}{x_3^{k-1} - x_3^k}$$

$$k_{i4} = \frac{[f_{i1}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) - f_{i2}(x_1^{k-1}, x_3^{k-1}, x_4^{k-1})]}{x_4^{k-1} - x_4^k}$$

$$- \frac{[f_{i1}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) - f_{i2}(x_1^{k-1}, x_3^{k-1}, x_4^k)]}{x_4^{k-1} - x_4^k}$$

3. 수치해석 결과

본 논문에서는 전자부품 패키지에 자주 사용되는 재료 즉 silicon-nitride/aluminum 과 silicon/aluminum 복합 구조물에 대해 본 해석 방법을 적용하였다. 이들 재료상수에 대한 자료는 다음과 같다.

(1) Silicon-nitride/aluminum(Si₃N₄/Al)

E₁ = 70.6GPa, ν₁ = 0.345, E_{T1} = 변수

E₂ = 220.0GPa, ν₂ = 0.345, E_{T2} = 변수

(2) Silicon/aluminum(Si/Al)

E₁ = 70.6GPa, ν₁ = 0.345, E_{T1} = 변수

E₂ = 170.0GPa, ν₂ = 0.28, E_{T2} = 변수

수치 해석 결과의 수렴성을 보장하기 위해 |f₁₁(0)-f₁₂(0)| < 10⁻⁴, |f₂₁(0)-f₂₂(0)| < 10⁻⁴, |E₁f₃₁(0)-E₂f₃₂(0)| < 10⁻⁴과 |E₁f₄₁(0)-E₂f₄₂(0)| < 10⁻⁴을 만족하도록 하였으며, 대부분 10회 이내의 반복에서 수렴하였다. 해석 결과에서 제시된 α=0 즉, 완전 소성의 경우 수치계산에서는 α=1×10⁻⁵의 값을 사용하였다. 해석 방법의 타당성을 입증하기 위해 재료가 선형 탄성 거동을 하는 특정한 경우 (α₁=α₂=1.0)에 대해 응력 특이도를 구하여 Bogy³⁾의 연구 결과와 비교한 바 표1에 도시된 바와 같이 서로 잘 일치하고 있었다. 또한, 선형 경화 거동을 하는 재료 조합의 경우 기존에 보고된 Duva⁵⁾의 결과와 비교하기 위해, 한 쪽 재료

Table 1 Comparison list for elastic material

해석방법 재료조합	This Result	Bogy Result
Si ₃ N ₄ /Al	r ^{-0.10244}	r ^{-0.10}
Si/Al	r ^{-0.07057}	r ^{-0.070}

Table 2 Comparison list for bilinear material

α ₁	E ₂ /E ₁ = 100 ν ₁ = 0.345 ν ₂ = 0.27	
	α ₂ = 1.0	Duva Result
1.0	r ^{-0.30602}	r ^{-0.4}
0.75	r ^{-0.33183}	r ^{-0.415}
0.5	r ^{-0.35693}	r ^{-0.43}
0.25	r ^{-0.38143}	r ^{-0.44}
0.0	r ^{-0.40539}	r ^{-0.46}

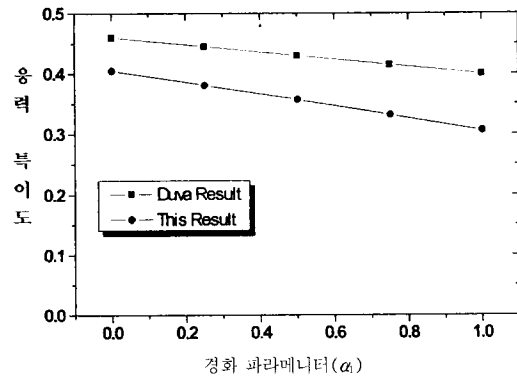


Fig. 2 Comparison for bilinear material

가 완전 강체이고 다른쪽 재료가 임의의 경화 파라미터를 갖는 경우에 대하여 응력 특이도를 구하였다. 표 2 및 그림 2에서 이들 결과를 비교 도시하였는데, 2가지 해석 결과 모두 경화 파라미터가 증가할수록 응력 특이도가 감소하는 경향을 보여주고 있다. 그러나, 그림 2에서 나타난 응력 특이도 값의 불일치는 해석 모델의 형상이 서로 상이하기 때문이라고 사료된다. 상부 재료 (레이어 #2)의 경화 파라미터를 일정하게 하고 하부 재료 (레이어 #1)의 경화 파라미터를 변화시키면서 응력 특이

Table 3 Stress singularity for various stress-strain response combination

α_1	$E_2/E_1=3.116$	
	$\nu_1=0.345$	$\nu_2=0.27$
	$\alpha_2=1.0$	$\alpha_2=0.5$
1.0	$\Gamma^{-0.10244}$	$\Gamma^{-0.01597}$
0.75	$\Gamma^{-0.15218}$	$\Gamma^{-0.05605}$
0.5	$\Gamma^{-0.21559}$	$\Gamma^{-0.12357}$
0.25	$\Gamma^{-0.29744}$	$\Gamma^{-0.23366}$
0.0	$\Gamma^{-0.40539}$	$\Gamma^{-0.40539}$

Table 4 Stress singularity for various modulus ratio(E_2/E_1)

E_2/E_1	$\nu_1=0.345$	$\nu_2=0.27$
	$\alpha_1=\alpha_2=1.0$	$\alpha_1=\alpha_2=0.5$
	2.0	$\Gamma^{-0.04977}$
5.0	$\Gamma^{-0.15901}$	$\Gamma^{-0.19061}$
10.0	$\Gamma^{-0.22327}$	$\Gamma^{-0.26356}$
20.0	$\Gamma^{-0.26541}$	$\Gamma^{-0.36911}$

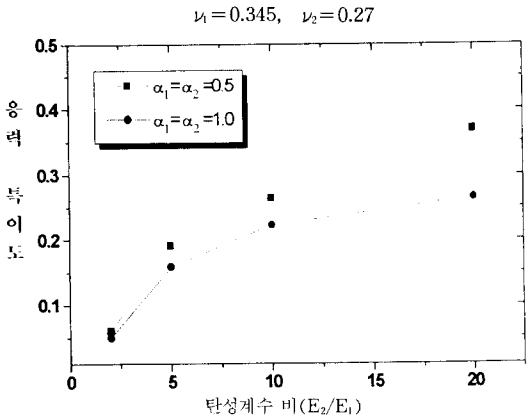
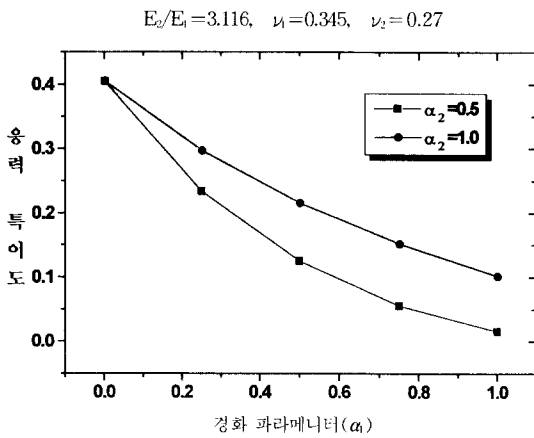


Fig. 3 Stress singularity for various stress-strain response combination

Fig. 4 Stress singularity for various modulus ratio(E_2/E_1)

도를 구한 결과를 표 3 및 그림 3에 도시하였다. 여기서 탄성계수 및 푸와송 비는 일정하게 하였다. 그림 3에서 보듯이 경화 파라미터가 증가할수록 응력 특이도가 감소하였다. 특히, 완전 소성 거동을 하는 재료를 사용할 경우 응력 특이도는 0.405로 가장 높았으며 균열 발생이 용이하다는 결과를 얻을 수 있다. 표 4 및 그림 4는 응력 특이도의 각 레이어의 탄성계수 비 (E_2/E_1)에 대한 변화를 나타내었다. 여기서, 푸와송 비는 일정하다. 두 재료의 거동이 동일하여도 재료들의 탄성계수비가 증가함에 따라 응력 특이도도 증가함을 알 수 있었다. 표 5 및 그림 5에서는 선형 재료 및 탄성-선형 경화 재료에 대하여 응력 특이도가 푸와송 비 (ν_1, ν_2)의 변화에 대하여 거의 영향을 받지 않음을 나타내고

Table 5 Stress singularity for various poisson's (ratio)(ν_1, ν_2)

(ν_1, ν_2)	$E_2/E_1=3.116$	
	$\alpha_1=\alpha_2=1.0$	$\alpha_1=\alpha_2=0.5$
(0.345, 0.27)	$\Gamma^{-0.10244}$	$\Gamma^{-0.12536}$
(0.345, 0.3)	$\Gamma^{-0.10097}$	$\Gamma^{-0.12519}$
(0.345, 0.33)	$\Gamma^{-0.09940}$	$\Gamma^{-0.12500}$
(0.345, 0.36)	$\Gamma^{-0.09774}$	$\Gamma^{-0.12481}$
(0.33, 0.27)	$\Gamma^{-0.09721}$	$\Gamma^{-0.12277}$
(0.30, 0.27)	$\Gamma^{-0.086314}$	$\Gamma^{-0.11746}$
(0.27, 0.27)	$\Gamma^{-0.07485}$	$\Gamma^{-0.11193}$

있다. 여기서, 재료들의 탄성계수 비 (E_2/E_1)는 일정하다. 표에서 보듯이 응력 특이도는 0.27 - 0.36 범위의 푸와송 비에 대해 비교적 작은 값을 나타낸

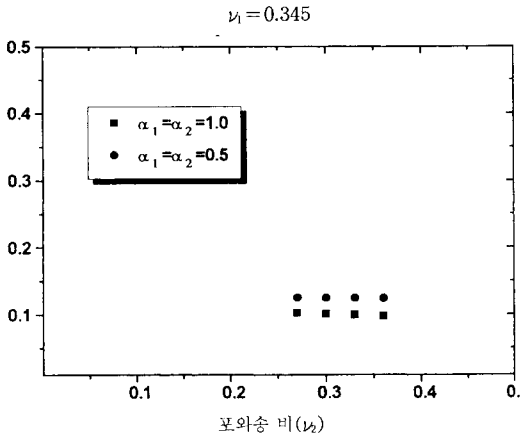


Fig. 5 Stress singularity for various position's ratio(ν_1, ν_2)

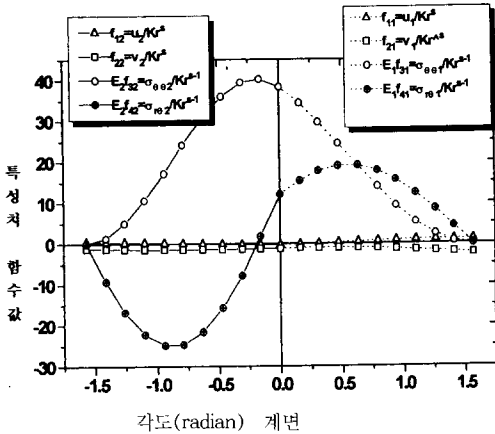


Fig. 6 Angular dependence of the eigenfunction

다. 그림 6에서 재료 조합이 $\alpha_1=0.5, \alpha_2=1.0$ 인 $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{Al}$ 복합 구조물의 특성치 함수 값을 자유 경계면에서 계면까지의 임의 각도에서 구하였다. 그림 6의 결과에서 보듯이 계면에서의 변위 및 표면력의 연속 조건과 자유경계면에서의 자유 표면력 조건이 만족하고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 서로 상이한 탄성-선형 경화 거동을 등방성 재료가 완전하게 결합된 복합 구조물의

자유 경계면에서 나타나는 응력 특이도를 정량적으로 구하는 방법을 연구하였다. 해석 방법으로는 응력 및 변위 성분을 가정하여 응력 평형 방정식, 구성 방정식 및 변위-변형을 관계식에 대입하여 미분 지배 방정식을 얻은 후 경계 조건식 및 연속 조건식을 적용하여 사격법 및 뉴턴 항상법을 사용하여 고유치 즉 응력 특이도를 구하였다. 기존 연구와는 달리 복잡하며 많은 계산이 요구되는 Mellin 변환법을 사용하지 않고도 간단하게 특성 방정식을 도출할 수 있었으며, 경화 파라미터를 적절하게 사용하여 탄성-선형 경화 거동 재료뿐만 아니라 탄성 거동 재료에도 적용할 수 있었다.

수치해석 결과에서 보듯이 구조물을 구성하는 재료가 탄성 거동을 보이는 경우 보다 탄성-선형 경화 거동을 보일 때가 응력 특이도가 높다는 것을 알 수 있었으며, 특히, 완전 소성 거동을 하는 재료를 사용할 경우 응력 특이도는 0.405로 가장 높았으며 균열 발생이 용이하다는 결과를 얻을 수 있었다. 또한 탄성계수 비와 푸와송 비와 같은 재료상수가 응력 특이도에 미치는 영향을 조사하였는데 복합 구조물을 이루는 재료의 탄성계수비가 클수록 응력 특이도는 증가한 반면 재료의 푸와송 비는 응력 특이도에 영향을 거의 미치지 않음을 알 수 있었다.

끝으로, 본 논문에서 제시한 해석 방법을 사용하여 응력 특이도를 감소시키는 전자부품 패키지의 재료 조합을 예측할 수 있어 자유경계면과 만나는 계면 집합점에서의 균열 형성의 가능성을 줄일 수 있으므로 전자부품 패키지의 기본 설계에 응용될 수 있다.

참 고 문 헌

1. 최성렬, 권용수, 박상선, 박재완, 1996, "전자부품 패키지에 내재된 두재료 혹은 세재료 집합점에 대한 응력특이차수", 대한기계학회논문집(A), 제20권, 제1호, pp. 135-145.
2. 정남용, 오봉택, 1996, "응력특이성계수에 의한 이종 집합재료의 강도평가", 대한기계학회논문집(A), 제20권, 제7호, pp. 2087-2096.

3. Bogy, D. B., 1971, "Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles Under Surface Traction", ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 38, pp. 377~386.
4. Dempsey, J. P. and Sinclair, G. B., 1981, "On The Singular Stress Behavior At The Vertices of Bimaterial Wedge", J. of Elasticity, Vol. 11, pp. 317~327.
5. Duva, J. M., 1988, "The Singularity At The Apex Of A Rigid Wedge Embedded In A Nonlinear Material", J. Appl. Mech., Vol. 55, pp 361~364.
6. Ponte Castaneda, P., 1987, "Asymptotic Fields In Steady Crack Growth With Linear Strain Hardening", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 35, pp 227~268.

(접수일자 : 1997. 3. 27)