

## 충격 및 폭발하중에 의한 동적파괴 해석 기법



김 경 수\*

### 1. 서 론

파괴역학이란 균열이 존재하는 구조부재가 하중을 받는 경우 그 구조물이 강도상 안전한지를 평가하고 예측하는 학문이다. 특히 용접 및 가공 기술의 발달로 인하여 선박이나 해양구조물 등 대형철구조물의 건조가 활발해지고 또한 건조과정의 자동화가 적극적으로 추진되고 있다. 그러나 이러한 대형구조물은 용접이나 가공과정 등에서 미소결함의 발생을 피하기가 어렵기 때문에 이들의 설계시 파괴역학적 설계 개념의 도입에 대한 중요성이 대두되고 있다.

파괴역학은 크게 취성, 피로, 환경(부식)파괴 등이 선형파괴역학, 탄소성파괴, 고온크리프 파괴 등의 비선형파괴 그리고 물체의 관성력이 중요시되는 동적 파괴역학으로 분류할 수 있다. 또한 동적파괴역학은 하중이 정적이거나 균열이 전진하는 경우, 하중이 폭발과 같은 동적이거나 정지한 균열인 경우 그리고 하중이 동적이며 균열이 전

진하는 세가지 경우로 구분할 수 있다.

본 논문에서는 정지한 균열에 충격 또는 폭발 하중과 같은 동적하중이 가해진 경우 이에 대한 해석기법에 대해서 설명하고자 한다.

### 2. 충격 또는 폭발하중의 파급

구조물에 충격이나 폭발하중이 가해지면 이들은 응력파가 되어 전파되어진다. 이들 응력파의 파급 및 기하학적, 물질적 불연속면에서의 상호 작용현상에 대한 연구는 지금까지 대부분 초고속 카메라의 도움으로 광탄성 실험을 통해 수행되어 왔다<sup>1)</sup>.

또한 응력파에 대한 해석적인 연구도 수행되어 왔으나 이들은 모두 매우 단순화되고 실제 현실 문제에 적용하기에는 많은 문제점을 포함하고 있으며 단지 각각의 응력파들에 대한 특성 및 정성적인 예측에 사용되었다<sup>2)</sup>.

2차원 등방성 선형탄성체에서의 응력파는 식

\* 성회원·인하대학교 선박해양공학과, 교수

(1)의 운동방정식과 식(2)의 시간에 의해 미분된 재료의 구성식에 의해 지배되며 이들은 함께 쌍곡 선형의 편미분방정식의 계를 형성한다.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = \lambda \text{div } \nabla \mathbf{I} + G(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T) \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{v}$ 는 속도벡터,  $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력텐서를 나타내며

$$\lambda^* = \lambda \frac{1-2\nu}{1-\nu} \quad (\text{평면변형}),$$

$$\lambda^* = \lambda \quad (\text{평면응력}),$$

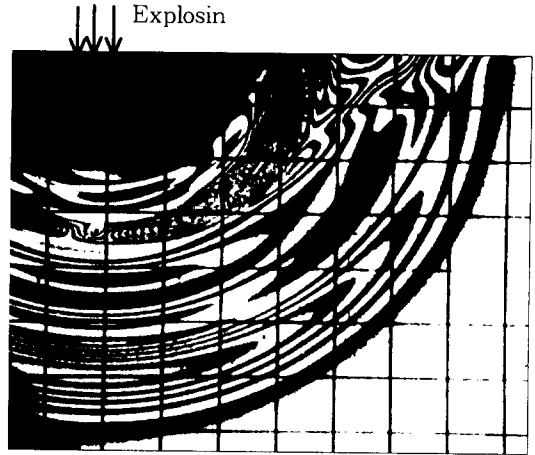


그림 1 광탄성 실험에 의한 등색선 곡선

심볼  $\mathbf{I}$ 는 단위텐서,  $\lambda$ 는 Lamé상수,  $G$ 는 전단 계수,  $\rho$ 는 밀도이며  $\nu$ 는 프와송비를 나타낸다. 이에 대한 수치해석법으로는 유한차분법, 유한요소법, 경계요소법 등이 통상적으로 사용되고 있다.

응력파의 문제를 다루는데는 기체동역학분야에서 많이 사용되었던 유한차분법인 Godunov방법<sup>3,4)</sup>, Bicharacterisitc 방법<sup>5,6)</sup>, Zwas방법<sup>7,8)</sup> 등이 일찍이 개발되어 사용되고 있으며 이론 및 실험결과와 좋은 일치치를 보여주고 있다.

유체 및 구조의 거의 모든 분야에서 지금까지 광범위하게 사용되고 있는 유한요소법과 경계요소법은 응력파의 문제에서 나타나는 국부적으로 매우 짧은 시간에 변화되어지는 가파른 응력 구배를 충분히 정확하게 표현하는데 어려움이 많았으나 근래에 활발한 연구결과<sup>9,10,11,12)</sup>를 보여주고 있으며 특히 Soil-structure의 상호작용해석과 같은 비선형 동적거동의 해석등<sup>13,14)</sup>에 성공적으로 사용되고 있다.

그림 1은 평판의 중앙부에 폭발하중이 가해져 약 120  $\mu$ sec가 지난후의 광탄성 실험 사진을 보여주며<sup>1)</sup>이에 대한 참고문헌<sup>6)</sup>의 수치해석 비교계산 결과를 그림 2에 나타내었다. 그림 1과 그림 2(a)에서는 등색선 곡선 즉 최대전단응력이 같은 값을 지니는 점들을 연결한 선을 보여주고 있으며 그림 2(b)에서는 최대전단응력을 3차원 그

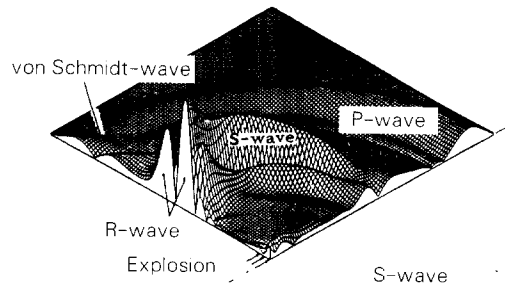
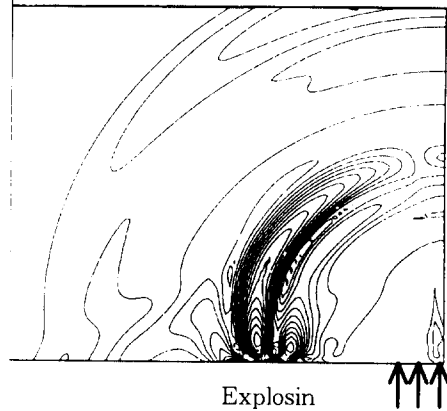


그림 2 Bicharacteristic 방법에 의해 시뮬레이션된 등색선 곡선 (a)와 최대 전단응력에 대한 3차원 그래프 (b)

래프로 나타내었다. 그림에서와 같이 물체내부에는 두종류의 응력과 즉 종파(압축파)와 횡파(전단파)가 서로 다른 속도를 가지며 퍼져나간다. 두 파의 속도는 물질 특성치에 의해 결정되며

$$\text{종파인 경우 } c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$\text{횡파인 경우 } c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \text{ 이다.}$$

여기서  $\lambda$ 와  $\mu$ 는 Lam'e상수이며  $\rho$  밀도이다.

입자의 운동방향이 파의 진행방향과 일치하는 종파는 가장 빠른 속도로 퍼져나가며 또한 횡파인 전단파는 종파의 약 60%정도의 속도를 가지고 진행된다. 이 전단파는 판의 자유표면에서 전단응력이 사라지는 경계조건을 만족하여야 하기 때문에 복잡한 형상으로 변화되어져 표면파로 변화되어진다. 그림 3은 그림 1의 전단파와 표면파 영역을 확대한 그림이며 이 표면파는 1895년 L. Rayleigh에 의해 알려졌기 때문에 Rayleigh 파라고 한다. 이 Rayleigh파는 표면의 얇은 층에 높은 에너지를 보유하고 압축파나 전단파에 비해



그림 3 전단파와 표면파(광탄성 실험)

분산됨이 거의 없이 퍼져나가며 지진파의 주된 에너지 함유파로 알려져 있다. 이와 같은 응력파들은 물질표면, 모서리, 균열과 물질경계면 등에서 반사 굴절 및 회절을 일으키면서 시간에 따라 변화되는 복잡한 응력장을 형성하게 되며 때로는 국부적으로 응력 집중이나 응력축점현상을 일으켜 예상치 못한 파괴의 원인이 되곤 한다.

### 3. 동적 탄성파괴 역학

#### 3.1 동적응력확대계수

균열이 존재하는 판에 충격하중이 가해진 경우도 정적인 경우와 마찬가지로 그림 4와 같이 하중의 종류에 따라 세가지 기본 모오드(Mode)로 분류하여 동적응력확대계수를 계산하며 선형인 경우 중첩의 원리를 통하여 문제를 해결한다. 동적탄성응력장은 정적인 경우와 같이 그림 4의  $r$  및  $\phi$ 의 함수이지만 특이성의 강도를 나타내는 동적응력확대계수  $K_s(t)$ 는 정적인 경우의  $K_s$ 와 달리 시간의 함수가 된다.

$$\sigma_{ij} = \frac{K_s(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\phi) \tag{3}$$

여기서

$i, j = 1, 2, 3$ (3차원 문제인 경우)

$S = I, II, III$ 기본적인 세가지 하중 모드

$f_{ij}$  :  $\phi$ 에 대한 무차원수

$r, \phi$  : 그림 4참조

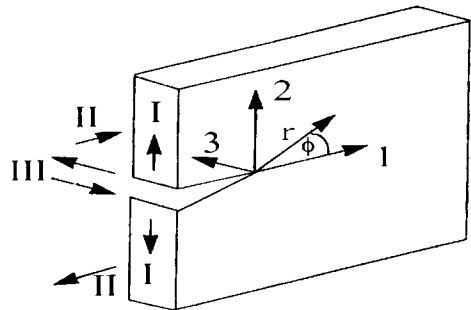


그림 4 균열선단의 하중조건 및 극좌표계

식(3)에서와 같이 동적응력확대계수  $K_s(t)$ 가 주어지면 균열선단 근처의 동적탄성응력장은 일의적으로 정해진다. 충격하중에 대한 균열 진전 개시 조건은

$$K_s(t) = K_{sd} \quad (4)$$

가 되며  $K_{sd}$ 를 동적파괴인성(dynamic fracture toughness)라 부르며 이 값은 재료의 특성치이다. 즉 충격적인 하중이 부재에 가해지면 응력파가 발생되고 이 응력파가 균열에 입사하여  $K_s(t)$ 가 차차 증대하여, 재료시험에 의해 얻어지는  $K_{sd}$ 에 도달하면 파괴가 일어나 균열이 진전하게 된다. 균열이 고속으로 진전하는 경우 균열선단 주위의 응력장은 균열진전 속도  $v$ 의 영향을 받게 된다.

$$\sigma_{ij} = \frac{K_s(t, v)}{\sqrt{2\pi r}} F_{ij}^s(v, \phi) \quad (5)$$

균열 고속 진전하는 경우 균열 조건식은

$$K_s(t, v) = K_{sd}(v) \quad (6)$$

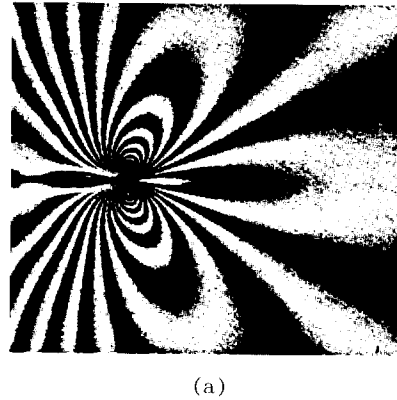
로 주어진다. 즉 균열은  $K_s(t, v)$ 가  $K_{sd}(v)$ 와 같게 되는 속도  $v$ 로 진전을 계속하다  $K_s(t, v)$ 가  $K_{sd}(v)$ 보다 작은 값을 갖는 경우에 정지한다고 보는 것이다.

### 3.2 동적응력확대계수의 결정법

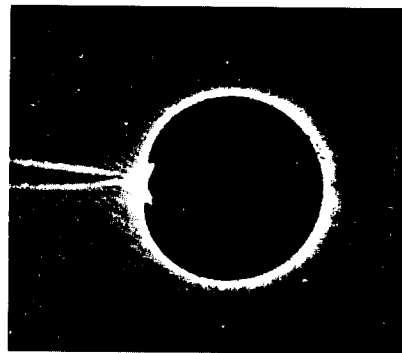
동적응력확대계수를 이론적으로 결정하는 것은 구조물의 매우 제한된 기하학적 형상에만 가능하기 때문에 일반적으로 실험이나 수치적인 방법을 사용하여 구하고 있다. 1929년 독일의 Cranz와 Schardin에 의해 최초로 스파이크(Spark)에 의한 광원을 이용하는 고속촬영이 가능해짐에 따라 구조물의 동적파괴역학분야의 실험 방법들이 많은 진전을 보게되었다. 이 분야의 대표적인 실험법으로는 Wells와 Post<sup>15)</sup>에 의해 처음으로 사용되고 Dally<sup>16)</sup>와 Kobayashi<sup>17)</sup>에 의하여 발전, 개선되어진 동적 광탄성 실험법과 1964년

Manogg<sup>18)</sup>에 의해 도입되고 Theocaris<sup>19)</sup>와 Kalthoff<sup>20)</sup>에 의해 발전되어진 코오스틱법을 들 수 있다.

그림 5에서는 모드 I 하중에 대한 광탄성 실험에 의한 균열선단의 동적 등색선 그림 및 코오스틱 실험에 의한 코오스틱을 나타내었다. 광탄성 실험에서 얻어진 등색선 곡선은 균열선단에 가까울수록 정확한 그림을 얻을 수 없기 때문에 균열선단의 응력정보를 얻기 위하여 외삽법(extrapolation)을 사용하여야 하는 반면, 코오스틱법은 매우 단순한 곡선을 제공하기 때문에 즉시 동적응력확대계수를 구할 수 있는 장점이 있다. 이는 코오스틱 곡선이 응력구배의 영향을 받기 때문에 응력집중문제에 대한 측정에 매우 적합한



(a)



(b)

그림 5 균열선단의 등색선 곡선(a)과 코오스틱 곡선(b)

방법이지만 균열선단에서 멀어지면 응력의 변화가 작아져서 코오스틱곡선은 볼 수가 없게되는 반면 광탄성 실험에서는 선명한 등색선곡선을 제공한다. 따라서 일반적으로 코오스틱법이 균열선단의 응력정보를 얻는데는 더 정확하다 할 수 있으며 계산 영역의 전체적인 응력장에 대한 정보는 광탄성 실험에서만 얻을 수 있을 것이다<sup>21)</sup>.

여기서는 코오스틱 실험법에서의 동적응력확대계수를 구하는 방법을 설명하고 수치적인 방법에 의한 얻어진 균열주위의 응력장으로부터 코오스틱 곡선의 수치적 시물레이션 과정을 소개하고자 한다.

그림 6에서와 같이 균열이 있는 투명한 판에 인장하중이 걸린 경우 프와송비에 따라 균열주위의 판 두께를 감소시키며 또한 광학적으로 물질의 밀도를 낮게 하여 물체의 굴절률을 감소시킨다. 따라서 이 투명한 판에 평행한 빛을 투과시키면 균열선단 주위는 옴흑렌즈와 같은 작용을 하여 빛이 집중되는 주위 영역과 어두움의 영역 사이에 선을 형성하며 이 선을 코오스틱 곡선이라고 한다. 또한 빛이 투과되지 않은 물체에 대하여도 이와 유사하게 빛의 반사를 통하여 코오스틱 곡선이 형성되어 진다.

그림 7에서 1개의 광선이 원점으로부터 r만큼 떨어진 외력을 받고 있는 점 P를 통과한다고 할 때 이 광선은 굴절을 일으켜 벡터 w만큼 이동되는 스크린 위의 점 P'에 도달하게 된다. 이로 인한 사상방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{r}' = \mathbf{y}' + \mathbf{w} \quad (7)$$

여기서 변위 벡터 w의 방향과 크기는 광선이 시편에 영향을 받는 정도를 나타내는 광학경로길

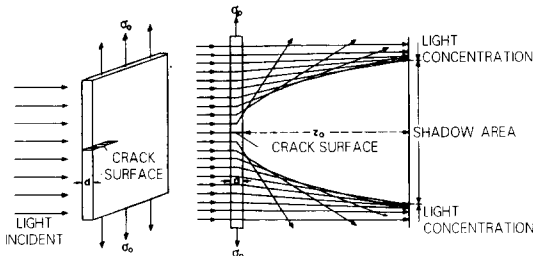


그림 6 코오스틱 실험법의 원리

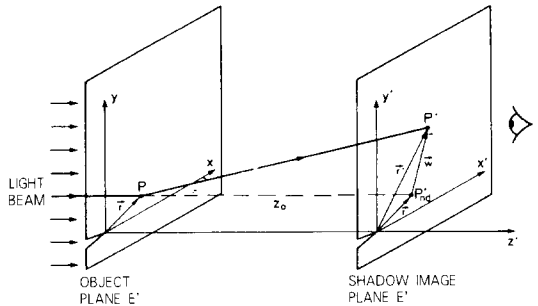


그림 7 시험편과 스크린에서의 빛의 굴절

이(optical path length)의 변화  $\Delta s$ 에 의존한다. Eikonal<sup>22)</sup> 이론에 의하면

$$\mathbf{w} = -z_0 \text{grad } \Delta s(r, \phi) \quad (8)$$

로 주어지며 두께가 일정한 평판의 경우

$$\Delta s = (n-1)\Delta d_{eff} + d_{eff}\Delta n \quad (9)$$

로 주어진다.

여기서  $d_{eff}$ 는 판의 유효두께이며 투명한 시편의 경우  $n$ 은 굴절률,  $d_{eff}$ 는 판의 두께  $d$ 와 같으며 불투명한 반사체의 경우  $n$ 은  $-1$ 이며  $d_{eff}$ 는  $d/2$ 가 된다.

나아가서 굴절률의 변화  $\Delta n$ 은 Maxwell-Neumann의 법칙에 의해 주응력으로 표기 할 수 있으며 투명한 재료의 경우

$$\Delta n_1 = A\sigma_1 + B(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\Delta n_2 = A\sigma_2 + B(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (10)$$

이며  $A$ 와  $B$ 는 물질상수로서 광학적 등방성인 재료에는  $A=B$ 이며  $\Delta n_2 = \Delta n_1 = \Delta n$ 이 된다.

또한 유효두께의 변화  $d_{eff}$ 는 Hooke의 법칙에 의해

$$\Delta d_{eff} = \left[ \frac{1}{E}\sigma_3 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] d_{eff} \quad (11)$$

로 나타낼 수 있다. 식(10)과 식(11)을 식(9)에 대입 정리하면

$$\Delta s_{1/2} = cd_{eff}[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \lambda(\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (12)$$

이 되며 여기서 평면응력의 경우

$$c = \frac{A+B}{2} - \frac{(n-1)\nu}{E}, \quad \lambda = \frac{A-B}{A+B-(n-1)\nu/E}$$

$$c = \frac{A+B}{2} + \nu B, \quad \lambda = \frac{A-B}{A+B+2\nu B}$$

가 된다.

그림 4에서 개구형 하중이 걸린 경우 응력의 분포는 다음과 같다.

$$\sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( 5\cos\frac{\phi}{2} - \cos\frac{3\phi}{2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( 3\cos\frac{\phi}{2} + \cos\frac{3\phi}{2} \right) \quad (13)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( \sin\frac{\phi}{2} + \sin\frac{3\phi}{2} \right)$$

식(13)의 응력 분포 하에서 (7)과 (8)의 사상 방정식은

$$x' = r \cos\phi + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} z_0 c d_{eff} r^{-3/2} \cos\frac{3\phi}{2} - \pi \langle \phi \rangle \pi$$

$$y' = r \sin\phi + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} z_0 c d_{eff} r^{-3/2} \sin\frac{3\phi}{2} \quad (14)$$

이 되면 코오스틱 곡선이 존재하기 위한 필요충분 조건으로 식(7)과 (8)의 자코비안(Jacobian)이 영이 되는 조건을 만족하여야 한다.

$$\frac{\partial x'}{\partial r} \frac{\partial y'}{\partial \phi} - \frac{\partial x'}{\partial \phi} \frac{\partial y'}{\partial r} = 0 \quad (15)$$

(14)식을 (15)식에 대입하여 계산하면 초기곡선  $r_0$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

$$r = \left[ \frac{3}{2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} |z_0| |c| d_{eff} \right]^{2/5} = r_0 \quad -\pi \langle \phi \rangle \pi \quad (16)$$

식(14)와 식(16)으로부터 시험편의 초기곡선  $r_0$ 와 스크린 면의 코오스틱 곡선 사이의 관계식이 얻어진다.

$$x' = r_0 \left( \cos\phi + \operatorname{sgn}(z_0 c) \frac{2}{3} \cos\frac{3\phi}{2} \right) \quad -\pi \langle \phi \rangle \pi$$

$$y' = r_0 \left( \sin\phi + \operatorname{sgn}(z_0 c) \frac{2}{3} \sin\frac{3\phi}{2} \right) \quad (17)$$

식(17)에서 시험편의 임의의 초기곡선  $r_0$ 에 대해  $x'$ ,  $y'$ 의 궤적인 코오스틱 곡선을 그리면 그림 8의 왼쪽 그림이 얻어지며 이  $r_0$ 와 코오스틱 곡선의 최대지름  $D$ 와의 비례식을 얻을 수 있다.

$$D = 3.17 r_0 \quad (18)$$

이 (18)식을 (16)식에 대입하면 개구형 하중 (Mode I 하중)에 대해 동적응력확대계수와 코오스틱의 지름과 상관관계식이 얻어지며 전단형 하중 (Mode II 하중)에 대해서도 같은 방법으로 구할 수 있다.

$$K_I = \frac{2\sqrt{2} \pi}{3(3.17)^{5/2} z_0 c d_{eff}} D^{5/2}$$

$$K_{II} = \frac{2\sqrt{2} \pi}{3(3.02)^{5/2} z_0 c d_{eff}} D^{5/2} \quad (19)$$

따라서 코오스틱 실험을 통해 그림 5의 (b)와 같은 그림이 시간에 따라 (수  $\mu\text{sec}$  단위로) 얻어지면 각 코오스틱 곡선의 지름  $D$ 를 측정하여 식 (19)에 대입하면 각각의 지름에 대응하는  $K$ 값을 구할 수 있으며 이  $K$ 값을 시간의 축에 나타내면  $K(t)$ 의 변화를 볼 수 있다.

수치적으로 이 코오스틱 곡선을 시뮬레이션하기 위해서는

1) FEM, BEM, 또는 FDM 등의 프로그램을 통해 균열 선단 주변의 시간에 따른 응력장을 계산하여야 한다.

2) 시편에서의 각 좌표점에 대한 응력장으로부터 주응력을 계산한 후 식(12)에 대입하여  $\Delta s$ 를 구하고 그 점의 좌표와 함께 식(8)과 식(7)에 차례로 대입하여 상면의 좌표  $x'$ ,  $y'$ 를 계산한다.

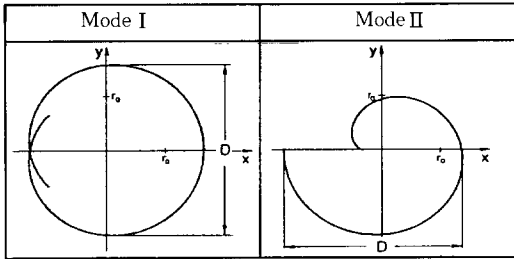


그림 8 개구형 하중과 전단형 하중에 대한 균열 선단의 코오스틱 곡선

3) 식(15)의 자코비안(Jacobian)이 0이 되는 조건을 만족하는 점들이 이론적으로는 코오스틱 곡선을 형성하지만 수치적 계산에서는  $|J| < 0.1$  을 만족하는 점들을 상면에 나타내면 그림 9와 같은 코오스틱 곡선을 얻을 수 있다.

4) 이 곡선의 지름  $D$ 를 측정하여 실험에서와 같이 식(19)에 대입하면 각각의 시간에 따른 동적응력확대계수를 얻을 수 있다.

위의 절차로 부터 얻은 그림 9는 수치적으로 시뮬레이션된 코오스틱 곡선을 보여주고 있다.

이들 방법외에도 동적응력확대계수를 계산하는 방법으로는 외곽에서 균열선단으로 동적응력 확대계수를 외삽(extrapolation)시켜 구하는 법<sup>25)</sup>과 균열 주변의 응력구배를 고려하여 계산하는 법<sup>26)</sup> 등이 사용되고 있다. 전자는 균열선단으로의 외삽방향과 범위등에 따라 영향을 받으며 균열선단의 경계조건의 부정확성 때문에 균열선단의 몇 점을 제외시켜야 하는 등의 어려움이 있으며 후자는 계산은 간편하지만 응력구배를 구하는 점들의 선택에 영향을 받기 때문에 계산점들의 선택에 어려움이 있다.

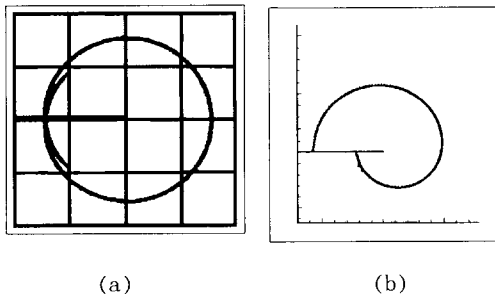


그림 9 수치적으로 시뮬레이션 된 코오스틱 곡선<sup>23, 24)</sup>

#### 4. 결 언

본 논문에서는 균열이 존재하는 구조부재에 충격이나 폭발하중이 가해진 경우 동적응력확대계수를 구하는 방법들은 논의하고 특히 코오스틱 실험법 및 수치적으로 코오스틱 곡선을 구하여 동적응력확대계수를 구하는 과정을 자세히 설명하였다.

폭발 및 충격에 의한 구조물의 파괴해석은 이와 같은 하중을 받는 압력용기, 빌딩, 초고속선, 해군 함정 등의 파괴강도설계 및 안전성 평가에 핵심기술로 대두되고 있으며 또한 우주항공산업, 고속전철, 압반역학 등의 여러 분야에서 중요한 의미를 갖는다.

따라서 앞으로도 균열진전 및 정지조건, 탄소성 동적파괴해석 및 재료의 충격거동 등에 대한 연구들이 계속되어야 할 것으로 사료된다.

#### 참 고 문 헌

- Rossmannith, H.P. Ausbreitung elastischer Wellen in Festkörpern. 1893 Begleitveröffentlichung zum wissenschaftlichen Film C 1893 des OWF, Wiss. Film (Wien) Nr. 33, Juni 1985, 37-46.
- G.Ravichandran and R.J.Clifton, "Dynamic Fracture under Plane Waves Loading", Int. J. of Fracture, Vol. 40, pp 157-201, 1989.
- Godunov, S.K. : A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations fluid dynamics. Mat. Sbornik 47(1959) 271-306
- Lin, X and Ballmann, J. , A Riemann solver and a second-order Godunov method for elastic-plastic wave propagation in solids.
- Clifton, R.J. A difference Method for Plane Problems in Dynamic Elasticity. Quart. Appl. Math. 25, 1967, 97-116
- Kim, K.S. , Spannungswellen an Greuzflächen in linearelastischem Scheiben. , VDT Verlag, Reihe 18, Nr 91, 1991.
- Eilon, B. ; Gottlieb, D. and Zwas, G., Nu-

- merical stsbilzers and computing time for second-order sccurate schemes., J. Computational Phys. 9, 1972, 387-397.
8. Lin, X and Ballmann, I., Numerical method for elastic-plastic waves in cracked solids, Archive of Applied Mechanics 63, 1993, 261-282.
  9. Johnson, C., Navert, U., and Pit Raranta, J. "Finite Element Methods for the linear hyperbolic Problem", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 45, pp. 285-312, 1984
  10. Bathe, K.J. and Sonnad, V. "On Effective Implicit Time Integration of Fluid-Structure Problems" Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp 943-948, 1980
  11. Brebbia, C.A. and Chung, P., Application of the boundary element method for solving elastodynamic problems, in Soil dynamics and earthquake engineering, A.S. Cakmak, A.M. Abdel-Ghaffar and C.A. Brebbia, Eds, AA Balkema, Rotterdam, 1982, pp 381-408
  12. Brebbia, C.A., The solution of wave propagation Problems using boundary elements, in Advanced topics in boundary element analysis, AMD-Vol. 72, T.A. Cruse, A.B. Pifko and H.Armen, Eds, ASEM, New York, 1985, pp 91-111
  13. Karabalis, D.L. and Beskos, D.E., Dynamic response of #-D flexible foundations by time domain BEM and FEM, Soil Dyn, Earthquake Eng.4, 1985, pp 91-101
  14. Spyrakos, C.C. and Beskos, D.E., Dynamic response of flexible strip foundations by boundary and finite elements, Soil Dyn. Earthquake Eng. 5, 1986, pp 84-96
  15. Wells, A.A. and Post, D., "The Dynamic Stress Distribution Surrounding Running Crack-A Photoelastic Analysis", Proc. of the SESA, Vol. 16, No. 1, 1958, P69
  16. Dally, J.W., "Development in Photoelastic Analysis of Dynamic Fracture", Proc. I.U. T.A.M. Symposium on Optical Mehtods in Mechanics of Solids, Poitiers, France, 1979
  17. Kobayashi, A.S., Mall, S., and Bradley, W. B., "A Dynamic Photo-elastic Analysis of Crack Branching", Proc. of the 12th Annual Metting of the Society of Engineering Science, the University of Texas at Austin, 1975, pp. 1005-1015
  18. Manogg, P., Anwendung der Schattenoptik zur Untersuchung des Zerreibsvorgangs von Platten., Diss. Albert-Ludwigs-Uni. Freiburg 1964
  19. Theocaris, P.S. and Joakimides, N., Some properties of Generalized Epicycloids Applied to Fracture Mechanics., J. Appl. Mech., 22, 1971, 876-890
  20. Kalthoff, J.F., The Shadow Optical Method of Causitics, Chap. 9, Handbook on Experimental Mechanics, Ed. A.S. Kobayashy, Prentice Hall. NJ, 1988
  21. Knauss, W.G. and Ravi-Chowdar, K., Fundamental Cousiderations in Dynamic Fracture Eng. Fracture Mech., Vol. 23. 1986. pp 9-20
  22. Born, M. and Wolf, E., Principles of Optics, Dergamon Press, New York, 1970
  23. 정기태, 김경수, 김영복, 충격하중을 받는 선체구조의 충격 및 파손해석, 대한조선학회 논문집, 32권 제1호, 1995, P118-131
  24. 정태준, 김경수, 박준범, 응력파와 균열과의 상호작용에 대한 수치해석, 인하대학교 산업과학기술연구소 논문집, 제25권, 1997, P 377-385
  25. Chen, Y.M., Numerical Computation of Dynamic Stress Intensity Factors by a Lagrovyian Finite-Difference Method, Eeg. Fracture Mech., Vol. 7, 1975, pp 635-660
  26. Lin, X. and Ballmann, J., Re-Consideration of Chen's Problem by Finite Difference Method, Eng. Fracture. Mech., Vol. 44, No. 5, 1993, pp 735-739 