

탄성파의 변형 및 응력 계산에 관한 연구

Elastic Wave Field Calculations

이 정 기*
Lee, Jung - Ki

요 약

탄성파의 변형 및 응력계산에 관한 연구는 비파괴검사를 비롯하여 광범위한 공학분야에서 중요한 역할을 하고 있다. 특히 파형의 산란문제가 많은 연구자들에 의해 다양한 방법으로 연구되고 있다. 실린더 또는 구와 같은 간단한 형상을 지닌 산란체에 대하여, 정상상태 탄성파의 산란문제의 해석은 해석적 기법을 이용한 연구가 가능하다. 하지만 임의의 형상을 갖는 산란체 또는 다수의 함유체에 대한 해석에는 수치해석방법이 요구된다. 예를 들면, 무한요소법 또는 Global-Local 유한요소법이라고 하는 혼성 유한요소법과 같은 특수한 유한요소법들이 개발되고 있다. 최근에는 경계요소법을 사용한 산란문제의 해석에 대한 연구가 진행되고 있다. 본 논문에서는 다수의 임의의 형상을 갖는 함유체, 공동 또는 크랙을 포함하고 있는 무한고체에서의 일반적인 탄성동역학 문제를 해석하기 위해 새롭게 개발된 체적적분 방정식법을 소개한다. 또한 경계요소법을 사용하여 탄성파의 산란문제에 대한 수치해석을 수행하였으며, 이의 결과를 체적적분 방정식법의 결과와 비교 검토하였다.

Abstract

Calculation of elastic wave fields has important applications in a variety of engineering fields including NDE (Non-destructive evaluation). Scattering problems have been investigated by numerous authors with different solution schemes. For simple geometries of the scatterers (e.g., cylinders or spheres), the analysis of steady-state elastic wave scattering has been carried out using analytical techniques. For arbitrary geometries and multiple inclusions, numerical methods have been developed. Special finite element methods, e.g., the infinite element method and a hybrid method called the Global-Local finite element method have also been developed for this purpose. Recently, the boundary integral equation method has been used successfully to solve scattering problems. In this paper, a volume integral equation method (VIEM) is proposed as a new numerical solution scheme for the solution of general elastodynamic problems in unbounded solids containing multiple inclusions and voids or cracks. A boundary integral equation method (BIEM) is also presented for elastic wave scattering problems. The relative advantage of the volume and boundary integral equation methods for solving scattering problems is discussed.

Keywords : scattering problems, volume integral equation method, boundary integral equation method, inclusion, composite materials

* 정희원·홍익대학교 기계설계학과 조교수

· 이 논문에 대한 토론을 1997년도 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1997년도 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

다수의 함유체(inclusion), 공동(void) 및 크랙(crack)을 포함하는 이질성분(heterogeneous)으로 된 고체에 외부의 하중이 가해질 때 발생하는 변형 및 응력 계산에 관한 연구는 다양한 공학 문제에서 중요한 역할을 하게 된다. 기지(matrix) 내에 수많은 개수의 조밀하게 채워진 섬유(fiber)들을 포함하는 섬유 보강 복합재료는 하나의 좋은 예가 된다. 왜냐하면, 이러한 복합재료에서의 변형 및 응력은 섬유들 사이의 상호작용(interaction)에 강하게 영향을 받기 때문이다. 따라서 이러한 재료에서 정확한 변형 및 응력을 계산하기 위하여는 함유체, 공동 및 크랙의 상호작용 효과를 모델링에 포함시켜야 한다.

이러한 형태의 문제들을 해석하는데 이용할 수 있는 방법들로서 유한요소법(finite element method) 또는 경계요소법(boundary integral equation method)을 들 수 있다. 문제의 영역(domain)이 유한한 경우는 유한요소법이 가장 효과적이다. 그러나, 기존의 일반적인 유한요소법은 문제의 영역이 무한한 탄성과 전달문제(wave propagation problem)에는 직접적으로 적용할 수가 없다. 또한 최근에 개발된 혼성 유한요소법(hybrid finite element method)은 [예를 들면, 2, 6] 영역이 무한대인 문제에 적용할 수 있지만, 일반적으로 그 방법이 효과적이지 못하고 포괄함수(global function)의 선택이 용이하지 않다.

원칙적으로, 경계요소법(boundary integral equation method)은 탄성과 전달문제뿐만 아니라 영역이 무한대인 문제들에 적용할 수 있기 때문에 이러한 종류의 문제들에 적용될 수 있다^{1), 14)}. 그러나, 함유체의 개수가 많아지거나, 함유체 자체가 균질하지 않은(inhomogeneous) 경우에는 수치해석처리가 극도로 불편하게 된다.

함유체의 기하학적 구조가 간단하고(예를 들면, 실린더 또는 구) 또한 잘 분리될 수 있을 때, 함유체 문제의 해법으로 여러가지 해석적 방법이 가능하다^{3), 4), 15)}. 그러나, 함유체 또는 공동이 임의의 모양을 갖거나 밀도가 높아질때는 어떠한

해석적 방법도 일반적인 문제에 적용할 수 없다.

따라서 본 논문에서는 일반적인 탄성동력학 문제를 해석하기 위해서 새롭게 개발된 체적적분 방정식법(volume integral equation method; VIEM)을 통하여, 다수의 함유체, 공동 및 크랙을 포함하고 있는 무한고체에서의 탄성과 산란문제를 해석한다. 그리고 체적적분 방정식법의 정확성 및 효율성을 해석적 방법과 경계요소법에 의한 결과와 비교 검토한다.

2. 2차원 산란문제 해석

그림 1에 보이는 일반적인 비균질 탄성동력학 문제를 고찰해 본다. 무한대에서 파의 형태는 x 축에 평행으로 전파하는 평면 시간-조화 탄성파로 가정한다. 이때 입사파(incident wave)는 입자 운동이 x 축(x_1 축)에 따라 일어나는 P파, y 축(x_2 축)에 따라 일어나는 SV파 또는 z 축(x_3 축)에 따라 일어나는 SH파 중 하나일 수 있다.

2.1 체적적분 방정식법(Volume Integral Equation Method, VIEM)

ρ 와 C_{ijkl} 는 각각 고체에서의 밀도와 탄성 상수(elastic tensor)를 나타낸다. 기지는 균질하고, 섬유는 일반적으로 균질하지 않다고 가정한다. 함유체들과 기지 사이의 경계면(interface)은 변

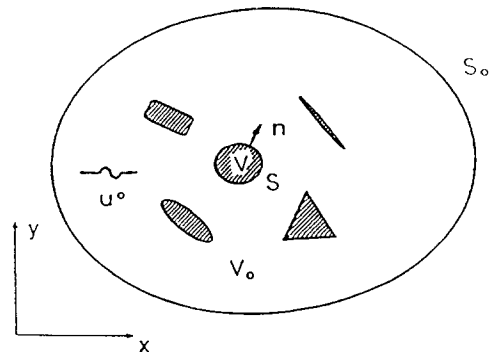


Fig. 1 Geometry of the elastodynamic problem.

위와 표면력 벡터(traction vector)의 연속성을 보장하는 완전 결합이라고 가정한다.

$e^{-i\omega t} u_m^0(\mathbf{x}, \omega)$ 를 함유체가 없을 때 \mathbf{x} 에서의 입사파에 의한 변위 벡터(displacement vector)의 m 성분이라고 하고, $e^{-i\omega t} u_m(\mathbf{x}, \omega)$ 를 함유체가 포함되어 있을 때 변위 벡터의 m 성분이라고 한다. 여기서 ω 는 파의 원 진동수(circular frequency)이며, 공통의 시간 인자인 $e^{-i\omega t}$ 와 ω 에 대한 명백한 종속표시는 지금부터는 생략하기로 한다. Mal과 Knopoff⁽¹⁾는 $u_m(\mathbf{x})$ 가 다음의 방정식

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) + \int_V [\delta\rho\omega^2 G_{ij}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_i(\boldsymbol{\xi}) - \delta C_{ijkl} G_{ij}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})] d\boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

을 만족시킨다는 것을 보였다. 식(1)에서 적분은 전체 공간에 대해서 이루어지며, $\delta\rho\omega^2$ 와 δC_{ijkl} 는 각각 함유체와 기지사이의 밀도와 탄성 상수의 차이를 나타낸다. $G_{ij}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) e^{-i\omega t}$ 은 무한한 균질의 기지에서의 Green 함수이다. 즉, $G_{ij}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) e^{-i\omega t}$ 은 \mathbf{x} 에서 m 방향으로 작용하는 집중하중(concentrated force), $e_m e^{-i\omega t}$, 때문에 $\boldsymbol{\xi}$ 에서 발생하는 변위의 i 방향의 성분을 나타낸다. 식(1)에서 합의 관례(summation convention)와 콤마 표기법(comma notation)이 사용되었으며, 미분은 적분 변수 $\boldsymbol{\xi}$ 에 관해서 행해진다. 여기서 $\boldsymbol{\xi}$ 적분함수(integrand)가 함유체 내부에서만 0이 아니라는 사실을 주목해야한다.

만약 \mathbf{x} 가 함유체 내부에 속하면, 식(1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 에 관한 적분-미분 방정식(integro-differential equation)이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체라 할지라도, 식(1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 불가능하지는 않더라도 매우 어려운 문제가 된다. 따라서, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 분할하여 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 결정하는 체적적분 방정식법을 개발하였다. 일단 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 가 결정되면, 내부에서의 변형을 및 응력을 별다른 어려움없이 구할 수 있고, 함유체 외부에서의 산란파의 변형

및 변형을, 응력은 식(1)의 적분값을 구함으로써 얻을 수 있다.

이제, SH파(anti-plane) 및 P-SV파(in-plane)의 입사파에 대한 실린더형의 함유체에 의한 2차원 산란문제를 고찰해본다. 함유체와 기지의 물성치는 각각 첨자 1과 2로 구분한다.

2. 1. 1 SH파의 산란(anti-plane 문제)

SH파에 대해서, 체적적분 방정식 (1)은 다음과 같이 된다.

$$u_3(\mathbf{x}) = u_3^0(\mathbf{x}) + \int_R \{ \delta\rho\omega^2 G_3^3(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_3(\boldsymbol{\xi}) - \delta\mu [G_{3,1}^3 u_{3,1} + G_{3,2}^3 u_{3,2}] \} d\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2 \quad (2)$$

식(2)에서, $u_3(\mathbf{x})$ 은 anti-plane 변위 성분이고, $\delta\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ 를 나타내며, μ_i 는 전단 계수(shear modulus)이다. SH파에 문제에 대한 기지에서의 Green 함수는 다음과 같이 주어진다⁷⁾.

$$G_3^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{iH_0(k_2 r)}{4\mu_2} \quad (3)$$

식(3)에서 $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ 이고, $k_2 = \omega/\beta_2$ 는 S파의 파수(wavenumber)이고, β_2 는 기지에서의 전단파의 속도(shear wave speed)이다. 또한, H_0 는 0차 1종의 Hankel 함수이다. 여기서 미정의 값(unknowns)은 함유체 내부에서의 변위 및 변형률이므로, 표준의 유한요소들로 함유체를 분할하는 것이 매우 용이하게 된다. 그 결과로 함유체 내부의 절점(node)에서의 미정변위에 대한 연립선형 대수방정식이 얻어진다. 따라서, 적분-미분 방정식 (2)를 수치해석적으로 풀 수 있게 된다.

2. 1. 2 P, SV파의 산란 (in-plane 문제)

P와 SV파에 대하여, 체적 적분 방정식 (1)은

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^0(\mathbf{x}) + \int_R \{ \delta\rho\omega^2 [G_i^1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_1(\boldsymbol{\xi}) + G_i^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_2(\boldsymbol{\xi})] - [\delta(\lambda + 2\mu) G_{i,1}^1 u_{1,1} + \delta\lambda G_{i,1}^1 u_{2,2}] \}$$

$$\begin{aligned}
 & + \delta\mu G_{1,2}^1 (u_{1,2} + u_{2,1}) \\
 & - [\delta(\lambda + 2\mu) G_{2,2}^1 u_{2,2} + \delta\lambda G_{2,2}^1 u_{1,1} \\
 & + \delta\mu G_{2,1}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] d\xi_1 \xi_2 \quad (4)
 \end{aligned}$$

과

$$\begin{aligned}
 u_2(\mathbf{x}) = u_2^0(\mathbf{x}) + \int_R \{ \delta\rho\omega^2 [G_1^2(\xi, \mathbf{x}) u_1(\xi) \\
 + G_2^2(\xi, \mathbf{x}) u_2(\xi)] \\
 - [\delta(\lambda + 2\mu) G_{1,1}^2 u_{1,1} + \delta\lambda G_{1,1}^2 u_{2,2} \\
 + \delta\mu G_{1,2}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] \\
 - [\delta(\lambda + 2\mu) G_{2,2}^2 u_{2,2} + \delta\lambda G_{2,2}^2 u_{1,1} \\
 + \delta\mu G_{2,1}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] \} d\xi_1 \xi_2 \quad (5)
 \end{aligned}$$

로 표시되며, $u_1(\mathbf{x})$ 와 $u_2(\mathbf{x})$ 는 in-plane 변위 성분이며, $\delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ 이고, 여기서 λ_1 과 λ_2 는 각각 함유체와 기지의 Lamé의 상수를 나타낸다.

2차원 시간-조화 탄성동력학상태에 대한 Green 함수⁷⁾는

$$\begin{aligned}
 G_2^1 = \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r^2} [k_1^2 H_0(k_1 r) \right. \\
 - k_2^2 H_0(k_2 r)] \\
 - \left. \left\{ \frac{2(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r^3} [k_1 H_1(k_1 r) \right. \right. \\
 \left. \left. - k_2 H_1(k_2 r)] \right\} \right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$G_1^2 = G_2^1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 G_1^1 = \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{r^2} [k_1^2 H_0(k_1 r) \right. \\
 - k_2^2 H_0(k_2 r)] \\
 + \frac{1}{r} \left[1 - 2 \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{r^2} \right] \\
 [k_1 H_1(k_1 r) - k_2 H_1(k_2 r)] \\
 \left. + k_2^2 H_0(k_2 r) \right\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_2^2 = \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{r^2} [k_1^2 H_0(k_1 r) \right. \\
 - k_2^2 H_0(k_2 r)] \\
 + \frac{1}{r} \left[1 - 2 \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{r^2} \right] \\
 [k_1 H_1(k_1 r) - k_2 H_1(k_2 r)] \\
 \left. + k_2^2 H_0(k_2 r) \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

로 표시되며, H_0 와 H_1 각각 0차 및 1차 1종의 Hankel 함수를 나타내며, k_1 과 k_2 는 기지에서의 P파 및 S파의 파수(wavenumber)이다. SH파의 경우와 마찬가지로, 식 (4)와 (5)에서 함유체 내부를 표준의 유효요소를 사용하여 분할하면, 함유체 내부 절점(node)에서의 미정변위에 대한 두 개의 결합된(coupled) 연립 선형 대수방정식을 얻을 수 있다.

2.2 경계요소법

함유체의 바깥면 (S_+)에서의 적분 방정식은

$$\begin{aligned}
 u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) + C_{ijkl} \int_{S_+} [G_{k,l}^m(\xi, \mathbf{x}) u_k(\xi) \\
 - G_l^m(\xi, \mathbf{x}) u_{k,l}(\xi)] n_j dS \quad (10)
 \end{aligned}$$

로 표시되고⁷⁾, 반면에 안쪽면(S_-)에서는

$$\begin{aligned}
 u_m(\mathbf{x}) = -C_{ijkl} \int_{S_-} [G_{k,l}^m(\xi, \mathbf{x}) u_k(\xi) \\
 - G_l^m(\xi, \mathbf{x}) u_{k,l}(\xi)] n_j dS \quad (11)
 \end{aligned}$$

로 표시된다. 식 (10), (11)에서 n 은 S_+ 에 바깥쪽 법선 방향의 단위 벡터이다. 식 (10), (11)은 경계면 S에서의 연속성 조건과 함께 $u(\mathbf{x})$ 에 대한 경계적분 방정식을 구성한다. 여기에서 주의해야 할 점은 기지와 함유체에서의 물질 특성치가 다르기 때문에 식 (10), (11)에서의 탄성 상수 (C_{ijkl})와 Green 함수 (G^m)는 서로 다르다는 점이다. 함유체가 공동이 되면, 적분 방정식은 다음의 표준 경계적분 방정식으로 축소된다.

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) + C_{ijkl} \int_S [G_{k,i}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_k(\boldsymbol{\xi}) n_j] dS \quad (12)$$

2. 2. 1 SH파의 산란(anti-plane 문제)

SH파에 대하여, 함유체의 바깥면에서의 적분 방정식은

$$u_3(\mathbf{x}) = u_3^0(\mathbf{x}) - \int_{S_+} \mu_2 \left[G_3^3 \frac{\partial u_3}{\partial n} - u_3 \frac{\partial G_3^3}{\partial n} \right] dS \quad (13)$$

으로 표시되고,

$$G_3^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{iH_0(k_2 r)}{4\mu_2} \quad (14)$$

이고, 안쪽의 경계면에서 방정식은

$$u_3(\mathbf{x}) = \int_{S_-} \mu_1 \left[G_3^3 \frac{\partial u_3}{\partial n} - u_3 \frac{\partial G_3^3}{\partial n} \right] dS \quad (15)$$

으로 표시되고,

$$G_3^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{iH_0(k_1 r)}{4\mu_1} \quad (16)$$

이다.

2. 2. 2 P, SV파의 산란(in-plane 문제)

P와 SV파에 대하여, 함유체의 바깥면에서의 적분방정식은

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) = & u_i^0(\mathbf{x}) - \int_{S_+} [G_i^1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) t_1(\boldsymbol{\xi}) \\ & + G_i^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) t_2(\boldsymbol{\xi}) \\ & - T_1^1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_1(\boldsymbol{\xi}) \\ & - T_2^1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_2(\boldsymbol{\xi})] dS(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) = & u_i^0(\mathbf{x}) - \int_{S_+} [G_i^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) t_1(\boldsymbol{\xi}) \\ & + G_i^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) t_2(\boldsymbol{\xi}) \\ & - T_1^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_1(\boldsymbol{\xi}) \\ & - T_2^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_2(\boldsymbol{\xi})] dS(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (18)$$

로 표시되고, 안쪽면에서의 적분 방정식은

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) = & \int_{S_-} [G_i^1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) t_1(\boldsymbol{\xi}) + G_i^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) t_2(\boldsymbol{\xi}) \\ & - T_1^1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_1(\boldsymbol{\xi}) - T_2^1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_2(\boldsymbol{\xi})] dS(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (19)$$

과

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) = & \int_{S_-} [G_i^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) t_1(\boldsymbol{\xi}) + G_i^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) t_2(\boldsymbol{\xi}) \\ & - T_1^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_1(\boldsymbol{\xi}) - T_2^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_2(\boldsymbol{\xi})] dS(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (20)$$

로 표시되며,

$$\begin{aligned} T_1^1 = & (\lambda + 2\mu) G_{1,1}^1 n_1 + \lambda G_{2,2}^1 n_2 \\ & + \mu(G_{1,2}^1 + G_{2,1}^1) n_2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} T_1^2 = & (\lambda + 2\mu) G_{1,1}^2 n_1 + \lambda G_{2,2}^2 n_2 \\ & + \mu(G_{1,2}^2 + G_{2,1}^2) n_2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} T_2^1 = & (\lambda + 2\mu) G_{2,2}^1 n_2 + \lambda G_{1,1}^1 n_1 \\ & + \mu(G_{1,2}^1 + G_{2,1}^1) n_1 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T_2^2 = & (\lambda + 2\mu) G_{2,2}^2 n_2 + \lambda G_{1,1}^2 n_1 \\ & + \mu(G_{1,2}^2 + G_{2,1}^2) n_1 \end{aligned} \quad (24)$$

과

그리고

$$t_1 = (\lambda + 2\mu) u_{1,1} n_1 + \lambda u_{2,2} n_1 + \mu (u_{1,2} + u_{2,1}) n_2 \quad (25)$$

$$t_2 = (\lambda + 2\mu) u_{2,2} n_2 + \lambda u_{1,1} n_2 + \mu (u_{1,2} + u_{2,1}) n_1 \quad (26)$$

이다.

관측점(observation point)이 경계면에 도달하면, 식 (17)~(20)의 $u_1(\mathbf{x})$ 과 $u_2(\mathbf{x})$ 는 매끄러운 경계면에서 $\frac{1}{2} u_1(\mathbf{x})$ 과 $\frac{1}{2} u_2(\mathbf{x})$ 로 바뀌게 되고, T_n^+ 의 도함수(derivatives)는 Cauchy Principal Value(주치)의 의미로 해석해야 된다. 경계면에서 연속성 조건을 적용하고, 분할하게 되면, 경계면에서의 변위와 표면력 벡터에 대한 네개의 결합된(coupled) 연립 대수방정식을 얻게된다. 일단 경계면에서의 변위와 표면력 벡터(traction vector)를 알게되면, 경계면외의 모든곳에서의 변위, 변형률및 응력은 식 (17)~(20)의 적분값을 구함으로써 계산할 수 있다.

2. 3. 수치해석적 공식화

2. 3. 1 특이 적분 (singular integrals)

두가지의 적분 방정식을 공식화함에 있어서, 적분식의 피 적분함수(integrand)는 $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}$ 에서 Green 함수의 특이 특성 때문에 다른차수의 특이(singularities)를 갖게된다. 일반적으로, $\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}$ 에서 Green 함수의 특이 거동은

$$G = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln(r) + O(1) \quad (27)$$

이고,

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_1}, \frac{\partial G}{\partial \xi_2} = -\frac{2}{\pi k r} + O(1) \quad (28)$$

이 된다.

경계요소법(BIEM)에서 특이는 Cauchy 형태가 되는 반면, 체적적분 방정식법(VIEM)에서는

약한형태의 특이가 되고 적분할 수 있게 된다.

따라서, 식 (2), (4)-(5), (13), (15)와 (17)-(20)의 적분에 나타나는 특이들을 처리함에 있어서 특별한 주의가 요구된다^{9, 10)}. 이 논문에서 특이를 처리하기 위하여 직접 적분기법(direct integration scheme)⁹⁾을 사용하였다.

2. 3. 2 단일 함유체 문제

수치해석법의 정확도를 조사하기 위하여, 그림 2에 있는 단일의 실린더형의 함유체에 대하여 먼저 고찰해본다. 해석하는 문헌에서 구할 수 있다(예를 들면, Bose와 Mal^{3 4)}). 그림 2-(a)는 체적적분 방정식법(VIEM)에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. 표준의 8-node 사각형과 6-node 삼각형의 유한요소가 체적적분 방정식법에 사용되었으며, 경계요소법에는 2차 경계요소(quadratic element)가 사용되었다. 체적적분 방정식법에 사용된 요소의 수는 256개이며, 경계요소법에 사용된 요소의 수는 100개이다.

2. 3. 2. 1 SH파의 산란(anti-plane 문제)

SH파의 경우, 입사파는 다음과 같이 가정한다.

$$u_3^i = e^{ik_2 x} \quad (29)$$

여기서, k_2 는 기지에서의 S파의 파수(wave-number)이다. 분할된 형태의 식 (2)로부터 함유체 내부에서의 미정값 u_3 와 그의 도함수를 구할 수 있다. 체적적분 방정식법과 경계요소법에 의한 수치해석 결과가 해석해와 잘 일치함을 알 수 있었으며, 본 논문에 나타내지는 않았다.

2. 3. 2. 2 P, SV파의 산란(in-plane 문제)

입사파는 P파 또는 S파가 될 수 있으며, 여기서는 P파에 대해서 고찰해본다. 이때, 입사파의 변위성분은 다음과 같다.

$$u_1^i = \frac{e^{ik_1 x}}{k_1 x} \quad (30)$$

입사파의 표준화된 파수(normalized wave nu-

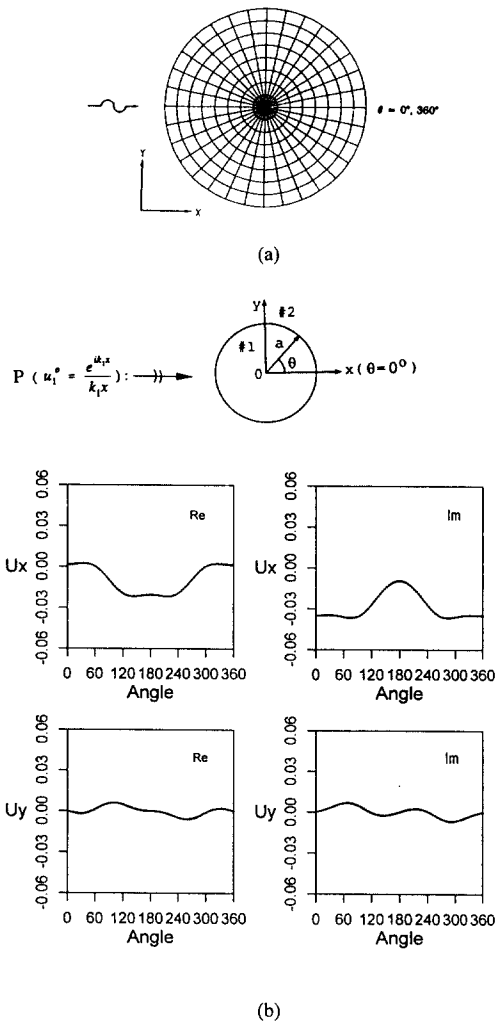


Fig. 2 (a) A typical discretized model in the volume integral equation method (b) Real and Imaginary parts of the normalized displacement ($U_x = u_1, U_y = u_2$) at the interface of single cylindrical inclusion for $k_2 a = 2.5$ due to an incident P wave (the analytical and the numerical solutions using VIEM and BIEM). k_2 is the S wavenumber in the host medium.

가 $k_2 a = 2.5$ (a: 함유체의 반지름)인 중간 주파수의 경우를 택하였다. 계산상의 자세한 기법은 SH파의 경우와 동일하지만, 미정값인 함유체 내부에서의 u_1 과 u_2 및 그들의 도함수 사이의 결

합(coupled) 특성 때문에 계산이 더 복잡해지는 차이점이 있다. 그림 2는 체적적분 방정식법(VIEM)과 경계요소법에 의한 경계면의 변위성분에 대한 수치해석 결과와 해석해^{3,4)} 사이의 비교를 보여준다. 세가지의 서로 다른 방법을 사용하여 얻은 결과들이 아주 잘 일치함을 알 수 있다.

2. 3. 3 다수의 함유체 문제

다수의 경계면(interface)을 갖는 다수의 함유체 문제를 해석하기 위하여 경계요소법을 이용하는 경우는 모든 경계면에서의 변위 및 표면력 벡터의 연속성을 만족시켜야만 하기 때문에 실제 수치해석과정이 무척 복잡하게 된다. 이와 같은 단점을 보완할 수 있는 방법으로 체적적분 방정식법이 개발되었으며 다음과 같은 장점을 들 수 있다. 첫째, 다수의 함유체 문제에 대하여 체적적분 방정식법을 수치해석적으로 적용함에 있어서 단일 함유체 문제와 기본적으로 차이점이 없다. 그러므로 단일 함유체 문제에서와 마찬가지로 비균질 재료로 구성된 함유체 내부만을 표준의 유한요소를 사용하여 분할하면 된다.(그림 3 참조) 또한, 각각의 함유체에서 개개의 관측점(observation point)에 대하여 모든 함유체를 포함하는 영역에 대한 적분이 필요하므로 모든 함유체들 사이의 상호작용이 정확하게 모델링에 포함된다. 더 나아가서 모든 경계면에서의 연속조건은 식 (1)의 유도과정에서 자동적으로 만족되었기 때문에 다수의 함유체 문제에서의 체적적분 방정식법을 적용하기가 매우 쉽고 간편해진다. 둘째, 표준의 유한요소를 사용하여 함유체 내부를 모델링함으로써 임의의 함유체 모양이나 packing sequence에 전혀 지장을 받지 않는다. 여기에서는 다수의 함유체 문제에서의 체적적분 방정식법의 결과를 해석적 방법에 의한 해와 비교하기 위하여 실린더 형태의 함유체로 구성된 간단한 형태의 packing sequence(hexagonal과 square)에 대하여 고찰해 보았다. 그림 3에서 대칭성을 이용하여 다수 함유체의 1/4만 표준의 8-node 사각형과 6-node 삼각형의 유한요소를 사용하여 분할하였으며, 재료는 graphite/epoxy를

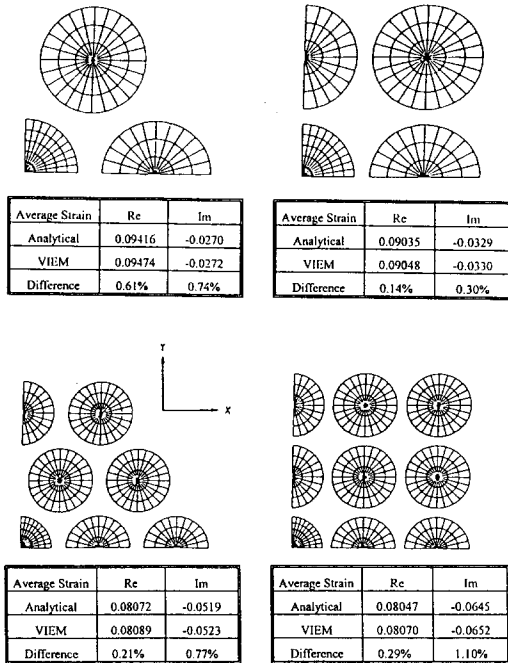


Fig. 3 Calculated average strains in the central fiber by analytical and volume integral equation methods. The material is graphite/epoxy with volume concentration 0.6 and frequency is 10 MHz.

사용하였고, 입사파는 SH 파로 주파수는 10 MHz를 사용하였다. 이때 중앙에 있는 섬유에서의 평균 변형률에 대하여, 서로 다른 개수의 함유체를 사용했을 경우에, 체적적분 방정식법의 결과와 해석적 방법¹⁵⁾에 의한 해를 서로 비교 검토하였다. 두 방법사이에 생기는 차이는 모든 경우에 1%미만으로 매우 정확한 해를 얻을 수 있었다. 체적적분 방정식법에서의 대칭을 이용하는 방법은 유한요소법이나 경계요소법의 경우와 상이하게 다르다는 점을 주목해야 한다.

3. 3차원 산란문제 해석

3차원 정상상태의 탄성파 산란문제 해석을 위한 체적적분 방정식법의 수치해석 적용은 연구중에 있으며, 여기서는 경계요소법을 이용한 수치

해석 방법에 대해 고찰해본다.

3. 1 3차원 경계요소법

합유체의 바깥면에서의 적분 방정식은

$$u_i(x) = u_i^0(x) - \int_{S_+} [G_{ij}(\xi, x) t_j(\xi) - T_{ij}(\xi, x) u_j(\xi)] dS(\xi) \quad (31)$$

로 표시되고, 안쪽면에서의 적분 방정식은

$$u_i(x) = \int_{S_-} [G_{ij}(\xi, x) t_j(\xi) - T_{ij}(\xi, x) u_j(\xi)] dS(\xi) \quad (32)$$

로 표시된다.

3차원 시간-조화 탄성동력학상태에 대한 Green 함수¹³⁾는

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2 r^3} \{ \delta_{ij} [(k_2 r)^2 e_2 + D] + C r_{,i} r_{,j} \} \quad (33)$$

이다. 여기서 $r = |\mathbf{x} - \xi|$ 이고 $i, j=1, 2, 3$ 이다.

또한,

$$e_\alpha = e^{ik_\alpha r} (i = \sqrt{-1}), \alpha = 1, 2$$

$$D = \Gamma_2 e_2 - \Gamma_1 e_1, \Gamma_\alpha = -1 + ik_\alpha r$$

$$C = \Omega_2 e_2 - \Omega_1 e_1, \Omega_\alpha = 3 - 3ik_\alpha r - k_\alpha^2 r^2 \text{이다.}$$

그리고,

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2 r^4} \left\{ \lambda e_i (k_1 r)^2 \Gamma_{1j} r_{,i} n_j + \mu e_2 (k_2 r)^2 \Gamma_2 (\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_j) + 2\mu [C (\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) + F r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n}] \right\} \quad (34)$$

이다. 여기서 $F = H_1 e_1 - H_2 e_2$,

$$H_\alpha = 15 - 15ik_\alpha r - 6k_\alpha^2 r^2 + ik_\alpha^3 r^3 (i = \sqrt{-1}) \text{이다.}$$

$x = \xi$ 일때 $G_i(\xi, x)$ 는 $\frac{1}{r}$ 형태의 특이성을 보이고, $T_i(\xi, x)$ 는 $\frac{1}{r^2}$ 형태의 특이성을 나타낸다. 따라서, 이러한 특이성을 처리하기 위하여 2차원 산란문제 해석에서와 마찬가지로 직접 적분기법⁹⁾을 사용하였다.

그외의 일반적인 수치해석 과정은 계산상의 복잡함이 추가되는 것외에는 2차원 경계요소법의 경우와 매우 유사하다.

3.2 P파의 산란

경계요소법의 정확도를 조사하기 위하여, 한 개의 구형의 함유체 및 공동에 의한 산란문제를 고찰해본다. 대칭의 특성을 이용하기 위하여 입사파가 P파인 경우를 고려한다. 이 문제에 대한 해석하는 문헌에서 구할 수 있다²⁾.

P파가 $z(x_3)$ 축을 따라 구형의 산란체에 입사한다고 가정할 때, 입사파의 변위 포텐셜은 다음과 같이 표시된다. (그림 5)

$$\phi = \phi_0 e^{ik_1 z} \tag{35}$$

여기서, ϕ_0 은 복소수 진폭을 나타내며, k_1 은 지에서의 P파의 파형수이다. 식 (35)으로부터, 입사파의 변위성분은 다음과 같이 얻어진다.

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = ik_1 \phi_0 e^{ik_1 z} \tag{36}$$

그림 4는 이 문제를 해석하기 위하여 사용된 서로 다른 경계요소법 분할형태(mesh)들을 보여준다. 대칭성을 이용하여 구(그림 4-a)의 한 8분원(octant)만 2차 경계요소(quadratic element)를 사용하여 분할하였다. 입사파의 표준화된 파수가 $k_1 a = 0.125$ (a: 산란체의 반지름)으로 저 주파수일 때, 또는 $k_1 a = 2.0$ 으로 중간 주파수인 경우에, 산란체가 함유체 또는 공동인 경우에 대하여 고찰해 보았다. 그림 5는 그림 4에 있는 분할에 따른 경계요소법에 의한 경계면의 변위에 대한 수치해석 결과와 해석해 사이의 비교를 보여준다. 그림 4-(d)의 분할(□)을 사용했을 때, 구

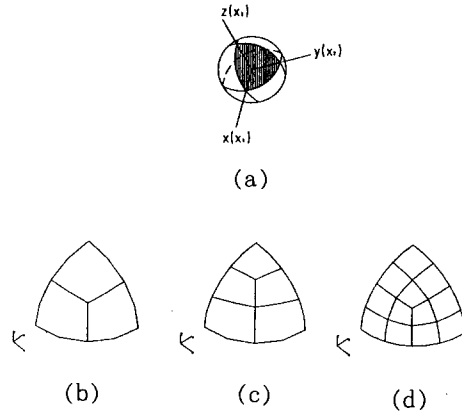


Fig. 4 Three different meshes used in the boundary integral equation method.

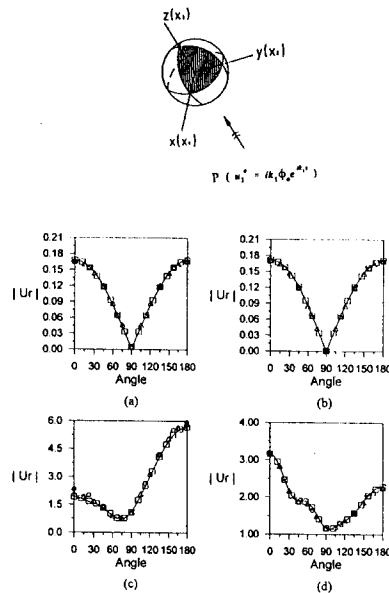


Fig. 5 Amplitude of the radial component of the displacements on the surface of single spherical cavity(a and c) and inclusion (b and d) for $k_1 a = 0.125$ (a and b), 2.0(c and d) due to an incident P wave. k_1 is the P wavenumber in the matrix. Solid line indicates the analytical solution while $\circ \triangle \square$ indicate the numerical solutions using BIEM(\circ :mesh b, \triangle :mesh c and \square :mesh d in fig. 3). (Angle = 0:the positive $X_3(z)$ axis and Angle:180:the negative $x_3(z)$ axis).

형의 함유체 및 공동에 대해 모두 정확한 해를 얻을 수 있었다.

4. 결 론

체적적분 방정식법이 임의의 형태와 다수의 함유체 및 공동 또는 크랙을 포함하는 무한고체에서의 일반적인 탄성동력학 문제에 대한 새로운 수치해석 방법으로 소개되었다. 체적적분 방정식법과 경계요소법사이의 상대적인 정확성 및 효율성을 비교하기 위하여 우선 2차원 단일 함유체 및 다수의 함유체 문제에 대하여 고찰해 보았다.

단일의 함유체 문제에 대하여는 두 방법 다 잘 적용됨을 알 수 있었다. 다수의 함유체문제에서는 체적적분 방정식법이 경계요소법보다 수치해석적으로 사용하기가 용이하고 정확한 해를 산출하였다⁸⁾. 3차원 단일 함유체 문제에 대하여는 우선 경계요소법의 결과와 해석해를 비교 검토하였으며, 적절한 분할을 사용함으로써 정확한 수치해석 결과를 얻을 수 있었다. 일반적인 3차원 탄성동력학 문제해석을 위한 체적적분 방정식법의 개발에 대한 연구는 진행중에 있으며, 추후의 논문에서 발표할 예정이다.

감사의 글

이 논문은 1996학년도 홍익대학교 교내연구비에 의하여 연구된 논문으로 대학당국에 진심으로 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Banerjee, P.K. and Mukherjee, S.(eds.), *Developments in Boundary Element Methods-3*, Elsevier Applied Science Pubs., London and New York, 1984.
2. Bettess, P., "Infinite Elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 11, pp. 53-64, 1977.
3. Bose, S. K. and Mal, A.K., "Longitudinal Shear Waves in a Fiber-Reinforced Composite", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 9, pp. 1075-1085, 1973.
4. Bose, S. K. and Mal, A.K., "Elastic Waves in a Fiber-Reinforced Composite", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 22, pp. 217-229, 1974.
5. Cerrolaza, M. and Alarcon, E., "A Bi-Cubic Transformation for the Numerical Evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals in Boundary Methods", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 28, pp. 987-999, 1989.
6. Dong, S.B., "Global-Local Finite Element Methods", *State-of-the-Art Surveys on Finite Element Technology*, Noor, A.K. and Pilkey, W.D.(Eds.), ASME, pp. 451-474, 1983.
7. Kitahara, M., *Boundary Integral Equation Methods in Eigenvalue Problems of Elastodynamics and Thin Plates*, Elsevier Science Pubs., London and New York, 1985.
8. Lee, J.K. and Mal, A.K., "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 67, pp. 135-159, 1995.
9. Li, H.B. and Han, G.M., "A New Method for Evaluating Singular Integrals in Stress Analysis of Solids by the Direct Boundary Element Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, pp. 2071-2098, 1985.
10. Lu, S. and Ye, T.Q., "Direct Evaluation of Singular Integrals in Elastoplastic Analysis by the Boundary Element Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 32, pp. 295-311, 1991.
11. Mal, A.K. and Knopoff, L., "Elastic Wave Velocities in Two Component Systems", *J. Inst. Math. Applics.*, Vol. 3, pp. 376-

- 387, 1967.
12. Pao, Y.-H. and Mow, C.-C., *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane, Russak Inc., New York, 1973.
 13. Pao, Y.-H. and Varatharajulu, V., "Huygens' Principle, Radiation Conditions and Integral Formulae for the Scattering of Elastic Waves", Dept. of Theoretical and Applied Mechanics, Cornell University, July 1975.
 14. Rizzo, F.J., Shippy, D.J., and Rezayat, M., "A Boundary Integral Equation Method for Radiation and Scattering of Elastic Waves in Three Dimensions", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, pp. 115-129, 1985.
 15. Yang, R.B. and Mal, A.K., "Phase Velocity and Attenuation of SH waves in a Fiber-Reinforced Composite", *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Vol. 12A, pp. 155-162, 1993.

(접수일자 : 1997. 2. 3)