

# 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석

## Geometrically Non-linear Finite Element Analysis of Space Frames

김 문 영\*      안 성 원\*\*  
Kim, Moon-Young      Ahn, Sung-Won

### 요 약

공간뼈대구조에 대하여 기하학적 비선형성이 고려될 수 있는 유한요소이론 및 해석법을 제시한다. 이를 위하여 가상일의 원리를 이용하여 대변형효과를 고려한 3차원 연속체의 평형방정식으로부터, 구속된 뒹(restrained warping)효과를 무시하고 유한한 회전각의 2차항의 효과를 포함하는 변위장을 도입하여 초기응력을 받는 공간뼈대요소의 증분평형방정식을 유도한다. 공간뼈대구조를 유한요소로 나누어 요소의 변위장을 요소변위벡터에 관한 Hermitian 다항식으로 나타내고 이를 평형방정식에 대입함으로써 탄성 및 기하학적인 강도행렬을 유도한다. 또한 updated Lagrangian co-rotational formulation에 근거하여, 증분변위로부터 강제회전변위와 순수변형성분을 분리시켜서 강제회전은 요소의 방향변화를 결정하고, 순수변형은 부재력증분을 산정하는 불평형하중 산정법을 제시한다. 공간뼈대구조의 횡-비틀좌굴 및 후좌굴 기동에 대한 예제들을 통하여 본 연구에 대한 해석결과와 문헌의 결과를 비교 검토함으로써 본 연구에서 제시된 이론 및 해석방법의 정당성을 입증한다.

### Abstract

A clearly consistent finite element formulation for geometrically non-linear analysis of space frames is presented by applying incremental equilibrium equations based on the updated Lagrangian formulation and introducing Vlasov's assumption. The improved displacement field for symmetric cross sections is introduced based on inclusion of second order terms of finite rotations, and the potential energy corresponding to the semitangential rotations and moments is consistently derived. For finite element analysis, elastic and geometric stiffness matrices of the space frame element are derived by using the Hermitian polynomials as shape functions.

A co-rotational formulation in order to evaluate the unbalanced loads is presented by separating the rigid body rotations and pure deformations from incremental displacements and evaluating the updated direction cosines of the frame element due to rigid body rotations and incremental member forces from pure deformations. Finite element solutions for the spatial buckling and post-buckling analysis of space frames are compared with available solutions and other researcher's results.

Keywords : space frame element, geometrically non-linear analysis, semitangential rotation

\* 정희원, 성균관대학교 토목공학과 부교수  
\*\* 성균관대학교 토목공학과 석사과정

\* 이 논문에 대한 토론을 1997년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

공간뼈대구조의 대변형 및 유한요소해석에 관한 연구는 토목, 건축, 기계 그리고 전체 구조공학의 여러분야에서 근간을 이루고 있는 연구주제이다. 실제 구조물의 기동은 기하학적인 비선형성에 의하여 크게 영향을 받게 되므로 구조물의 후좌굴 기동을 고려할 수 있는 수치해석방법을 개발하는 것이 매우 중요하다. 이는 보다 엄밀한 설계기준을 적용할 수 있기 때문이다. 특히, 컴퓨터의 발달과 함께 이러한 구조물의 해석방법은 급속히 발전하였으며 현재 막벽 공간뼈대구조의 비선형해석은 계산역학의 중요분야를 형성하고 있다.

공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석에 관한 연구들은 대체로 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 강도행렬을 산정하는 2절점 직선요소와 isoparametric interpolation 함수를 형상함수로 사용하고 강도행렬을 산정할 때 가우스 수치적분을 적용하는 곡선 요소로 요약할 수 있다. 이러한 요소를 사용하여 뼈대구조물을 해석한 문헌들은 직선요소를 사용한 Wen과 Rahimzadeh<sup>1)</sup>와 곡선보 요소를 적용한 Bathe와 Bolourchi<sup>2)</sup>의 논문에서 찾아볼 수 있다. 보-기둥이론을 이용하는 유한요소법에 관한 연구로는, Saafan<sup>3)</sup>이 휨으로 인한 수평절점변위의 변화를 고려하여 평면뼈대에 대한 강도행렬을 유도하였고 Oran<sup>4)</sup>은 이를 평면 및 공간뼈대로 확장시켜서 절점강도행렬을 제시하였다. Meek와 Tan<sup>5)</sup> 그리고 Papadrakakis<sup>6)</sup>는 각각 arc-length method와 vector iteration method를 적용하여 공간뼈대구조의 후좌굴해석을 수행하였다. 金과 張<sup>7,8)</sup>은 변위 및 하중중분 알고리즘을 사용하여 강성인접된 평면뼈대구조의 기하학적인 비선형해석을 수행하였다. 그리고 金<sup>9)</sup>은 공간뼈대구조의 기하학적인 비선형 유한요소해석법을 제시하였다. 유한요소법을 사용하여 막벽공간뼈대의 안정성 및 기하학적 비선형해석을 수행하는 경우에 탄성강도행렬과 기하학적인 강도행렬의 계산은 필수적이다. 이러한 강도행렬을 이용하여 막벽공간보의 좌굴해석 및 기하학적 비선형해석을 수행한 이제까지의 연구들은 문헌<sup>10,11)</sup>

에서 찾아볼 수 있다.

Argyris<sup>12,13)</sup>는 자유도로서 회전각을 가지는 공간보의 유한요소해석법에 의한 안정성 문제와 기하학적 비선형해석에 대한 이제까지 연구들이 공간상에서 서로 방향이 다른 뼈대구조로 구성된 공간뼈대 구조물에 대한 것으로 확장시켰을 때 근본적인 오류를 범하고 있다는 점을 지적하였다. 이는 유한한 회전각을 취급하거나, 기하학적인 강도행렬을 유도할 때 방향이 다른 고정된 축들에 대한 회전각(axial rotations)들이 non-commutativity의 성질을 나타내기 때문이다. 고정된 축에 대한 회전각과 대응하는 고정된 축에 대한 모멘트(axial moment)는 비보존력이며 Ziegler에 의해서 도입된 conservative moment<sup>14)</sup>들도 고정된 축에 대한 회전각을 고수하는 한 이 모멘트들이 하는일이 경로에 의존하게 되므로 유일한 포텐셜을 가질 수 없다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 Argyris<sup>12,13)</sup>는 회전각을 semitangential rotation으로, 비틀 및 휨모멘트는 semitangential moment로 정의하고 natural mode formulation을 이용하여 휨은 무시하고 2축 대칭단면을 갖는 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석법을 개발하였다.

본 논문에서는 공간뼈대구조에 대하여 기하학적인 비선형성이 고려될 수 있는 유한요소이론 및 해석방법을 제시하며, 이를 위하여 탄성 및 기하학적 강도행렬을 산정하고, updated Lagrangian-co-rotational formulation에 근거한 구조물의 변형된 상태에서의 내력을 구하는 불평형하중 산정법을 제시한다. 가상일의 원리를 이용하여 초기응력을 받는 3차원 연속체의 평형방정식으로부터 구속된 유효과를 무시하고 단면은 대칭이고 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 개선된 변위장을 도입하여 막벽 공간뼈대에 대한 증분 평형방정식을 얻는다. 뼈대구조물을 유한요소로 분할하여 뼈대요소의 변위장을 요소변위벡터에 관한 Hermitian 다항식으로 나타내고 이를 평형방정식에 대입함으로써 탄성 및 기하학적 강도행렬을 산정한다. 이때 축방향변위와 비틀각에 대해서는 1차, 횡방향 변위들에 대해서는 3차 Hermitian다항식을 사

용한다. 공간뼈대구조의 횡-비틀좌굴 및 후좌굴 거동에 대한 예제들을 통하여 본 연구의 유한요소 해석에 의한 결과와 문헌의 해석결과를 비교 검토함으로써 본 연구에서 제시된 이론 및 방법의 타당성과 유용성을 입증한다.

## 2. 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소이론

본 장에서는 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 해석법을 제시하기 위하여, 공간뼈대요소의 변위장을 도입하여 3차원 연속체의 증분평형방정식으로부터 뼈대요소의 증분방정식을 유도한다. 이때 Hermitian 다항식을 사용하여 뼈대요소의 접선강도행렬을 산정하고, co-rotational formulation에 근거한 불평형하중 산정법을 제시한다.

### 2.1 회전자유도를 갖는 유한요소의 증분평형방정식

Updated Lagrangian formulation에 의한 증분평형방정식을 유도하기 위하여, 가상일의 원리를 이용한 3차원 연속체의 평형방정식<sup>15)</sup>은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Omega} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta' {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R$$

$$= \int_{\Omega} {}^{t+\Delta t} T_i \delta' {}^{t+\Delta t} U_i dS \quad (1)$$

여기서  ${}^{t-\Delta t} S_{ij}$  는 2nd Piola-Kirchhoff stress,  ${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$  는 Green-Lagrange strain이며,  ${}^t U_i$ 는 변위벡터성분이다. 오른쪽항은 표면력(surface force)에 의한 가상일을 나타낸다.

식(1)에서의 응력, 변형도 및 변위는 다음과 같은 증분식으로 나타낼 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t \tau_{ij} + \rho S_{ij} \quad (2a)$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}^t \epsilon_{ij} \quad (2b)$$

$${}^{t+\Delta t} U_i = {}^t U_i + U_i + U_i' \quad (2c)$$

여기서 뒀첨자 't'와 't+Δt'는 각각 시간 t와 t+Δt

상태에서의 크기를 나타내며, 식(2)와 이후의 식들에서 뒀첨자가 표시되지 않는 물리량은 증분량을 의미하는 것으로 약속한다.  ${}^t \tau_{ij}$ 는 시간 t에서의 Cauchy stress를 나타낸다.  $U_i$ 와  $U_i'$ 는 증분변위<sup>16)</sup>를 구성하며, 이 두벡터는 각각 단면의 유한한 회전으로 인한 변위파라미터의 1차 및 2차항을 나타낸다. 식(2c)를 식(2b)의 정의식에 대입하고, 변위파라미터의 2차항까지를 고려하면 증분변형도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^t \epsilon_{ij} = {}^t e_{ij} + \eta_{ij} + \dot{e}_{ij} \quad (3a)$$

여기서

$${}^t e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t U_{ij} + {}^t U_{ji}) \quad (3b)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t U_{ki} \cdot {}^t U_{kj}) \quad (3c)$$

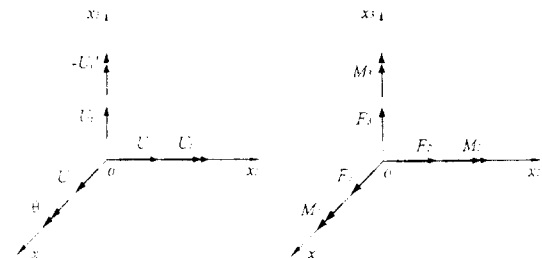
$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} (U'_{ij} + U'_{ji}) \quad (3d)$$

식(3)에서  ${}^t e_{ij}$ 와  $\eta_{ij}$ 는  $U_i$ 에 의한 변형도의 선형 성분과 비선형성분을,  $\dot{e}_{ij}$ 는  $U_i'$ 에 의한 선형성분을 나타낸다. 식(2)을 식(1)에 대입하고 비선형항을 무시하면, 다음과 같은 증분평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} {}^t C_{ijrs} e_{rs} \delta_i e_{ij} dV + \int_{\Omega} {}^t \tau_{ij} \delta (\eta_{ij} + \dot{e}_{ij}) dV$$

$$= {}^{t+\Delta t} R - \int_{\Omega} {}^t \tau_{ij} \delta_i e_{ij} dV \quad (4)$$

### 2.2 공간뼈대요소의 변위파라미터와 단면력



(a) Displacement parameters (b) Stress resultants  
 그림 1 Notation for displacement parameters and stress resultants

그림 1a는 부재좌표계( $x_1, x_2, x_3$ )에 대하여 대칭 단면을 갖는 공간뼈대요소의 변위장을 6개의 변위 파라미터로 나타낸 것으로  $x_1$ 은 도심축,  $x_2$ 와  $x_3$ 는 주축을 나타낸다.  $U_x, U_y, U_z$ 는 각각  $x_1, x_2, x_3$ 축방향의 강체이동변위(rigid body translation)를 나타내며,  $\theta, -U_x, U_y$ 은  $x_1, x_2, x_3$ 축에 대한 강체회전 변위(rigid body rotation)를 나타낸다. 부재내 임의의 한점이 휨과 비틀 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을때 전단변형을 무시한 공간뼈대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = U_x - U_x'x_3 - U_y'x_2 - \theta'\phi \quad (5a)$$

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = U_y - \theta'x_3 \quad (5b)$$

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = U_z + \theta'x_2 \quad (5c)$$

$$U_1'(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}[-\theta'U_x'x_2 + \theta'U_y'x_3] \quad (6a)$$

$$U_2'(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}[-(\theta^2 + U_y'^2)x_2 - U_y'U_x'x_3] \quad (6b)$$

$$U_3'(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}[-(\theta^2 + U_z'^2)x_3 - U_z'U_x'x_2] \quad (6c)$$

여기서  $\theta'$ 는 단면의 뒹뒹변형에 의한  $x_1$ 축방향으로의 변화율이며 구속된 뒹뒹(restrained warping) 거동을 무시하는 경우에 일정한 값을 갖는다.

식(5), (6)은 각각 변위파라미터의 1차항과 2차항을 나타내며,  $\phi$ 는 뒹뒹(warping)함수를 나타낸다.

Vlasov의 가정에 따라 면내변형도( $\epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}$ )는 무시하고, 면내응력( $\tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{23}$ )은 영으로 가정한다. 그림 1a의 변위파라미터에 대응하는 단면력은 그림 1b와 같이 나타낼 수 있으며, 이들에 대한 정의식은 다음과 같다.

$$F_1 = \int_A \tau_{11} dA, \quad F_2 = \int_A \tau_{12} dA \quad (7)$$

$$F_3 = \int_A \tau_{13} dA, \quad M_1 = \int_A (\tau_{13}x_2 - \tau_{12}x_3) dA$$

$$M_2 = \int_A \tau_{11}x_3 dA, \quad M_3 = -\int_A \tau_{11}x_2 dA$$

여기서  $F_1$ 은 축력,  $F_2, F_3$ 는 전단력,  $M_2, M_3$ 는  $x_2$ 와  $x_3$ 축에 대한 휨모멘트, 그리고  $M_1$ 은 비틀모멘트

이다. 선형탄성재료로 가정하면 대칭단면의 단면력-변위관계식과 평형조건식은 다음과 같다.

$$F_1 = EAU_x', \quad F_2 = M_3, \quad F_3 = -M_2 \quad (8)$$

$$M_1 = GJ\theta', \quad M_2 = -EI_2 U_x', \quad M_3 = -EI_3 U_y'$$

여기서,  $EA, EI_2, EI_3, GJ$ 는 각각 축방향강성,  $x_2$  및  $x_3$ 축방향의 휨강성, 그리고 비틀강성을 의미한다. 공간뼈대요소의 접선강도행렬을 유도하기 위하여 식(4)를 생각한다. 변위장에 대한 식(5)와 (6)을 식(4)에 대입하고 식(7)의 단면력에 대한 정의를 고려하면 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>16)</sup>

$$\int C_{ijrs} e_{rs} \delta_i e_{ij} dV = \frac{1}{2} \delta \int (EAU_x'^2 + EI_3 U_y'^2 + EI_2 U_z'^2 + GJ\theta'^2)' dx_1 \quad (9a)$$

$$\int \tau_{ij} \delta(\eta_{ij} + e_{ij}') dV = \frac{1}{2} \delta \int [F_1(U_y'^2 + U_z'^2) + M_P \theta'^2 + F_2 U_x' \theta' - F_3 U_y' \theta' + M_1(U_x' U_y' - U_x' U_z') + M_2(U_x' \theta' - U_y' \theta') + M_3(U_x' \theta' - U_z' \theta')] dx_1 \quad (9b)$$

$$\int \tau_{ij} \delta_i e_{ij} dV = \int [F_1 \delta U_x' - M_2 \delta U_y' + M_3 \delta U_y' + M_1 \delta \theta'] dx_1 \quad (9c)$$

### 2.3 공간뼈대요소의 접선강도행렬

그림 2는 공간뼈대요소의 재단변위와 재단력벡터를 표시한 것이다. 일반화된 좌표들( $U_x, U_y, U_z, \theta$ )을 재단변위벡터로 나타내기 위해서는 요소의 거동을 적절히 나타낼 수 있는 형상함수를 선택하여야 한다. 본 논문에서 축방향변위  $U_x$ 와 비틀회전각  $\theta$ 는 선형변화로 가정하고, 휨거동에 의한 횡

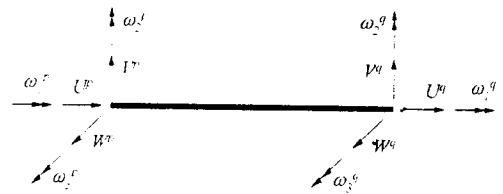


그림 2 Member displacement vector

방향 처짐  $U_y, U_z$ 은 3차 Hermitian 다항식을 사용한다. 그림 2을 참조하여 위의 사항들을 고려하면 공간뼈대요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다.

$$U_x = (1-\beta) \cdot U^p + \beta \cdot U^q, \beta = x_1/L \quad (10a)$$

$$U_y = h_1 \cdot V^p + h_2 \cdot L \cdot \omega_3^p + h_3 \cdot V^q + h_4 \cdot L \cdot \omega_3^q \quad (10b)$$

$$U_z = h_1 \cdot W^p - h_2 \cdot L \cdot \omega_2^p + h_3 \cdot W^q - h_4 \cdot L \cdot \omega_2^q \quad (10c)$$

$$\theta = (1-\beta) \cdot \omega_1^p + \beta \cdot \omega_1^q \quad (10d)$$

여기서,  $h_i$ 는 3차 Hermitian 다항식을 나타낸다.

식(10)을 식(9)에 대입하여 적분을 행하면 증분 평형방정식(4)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta U_e^T {}^t K_e U_e = {}^{t+\Delta} R - \delta U_e^T {}^t F_e \quad (11a)$$

$$U_e = \langle U^p, V^p, W^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, U^q, V^q, W^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q \rangle \quad (11b)$$

$${}^t F_e = \langle {}^t F_1^p, {}^t F_2^p, {}^t F_3^p, {}^t M_1^p, {}^t M_2^p, {}^t M_3^p, {}^t F_1^q, {}^t F_2^q, {}^t F_3^q, {}^t M_1^q, {}^t M_2^q, {}^t M_3^q \rangle \quad (11c)$$

여기서  ${}^t K_e$ 는 부재좌표계에서  $12 \times 12$  접선강도행렬을 나타낸다. 이 강도행렬의 자세한 결과는 표 1에 제시하였다.  $U_e$ 와  ${}^t F_e$ 은 각각 부재좌표계에서 증분변위 및 부재력벡터를 나타내고(그림 2 참조),  $\langle \cdot \rangle$ 는 열벡터를 의미한다.

#### 2.4 공간뼈대구조의 불평형하중 산정

구조물의 비선형해석시 증분형식의 반복계산법을 적용하여야 하며, 이러한 계산에서 변형된 상태에 대응하는 부재력증분을 정확히 산정하는 것이 매우 중요하다. 이를 위하여 updated Lagrangian co-rotational formulation에서는 구조물 평형방정식으로부터 산정하는 부재의 증분변위  $U_e$ 를 강체변위(rigid body displacement)  $U_r$ 와 순수 변형성분(pure deformation)  $U_d$ 으로 분리시켜야 한다. 이를 식으로 나타내면 식(12)와 같다.

표 1 공간뼈대요소의  $12 \times 12$  접선강도행렬  ${}^t K_e$

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & \cdot & -e & v & b_1 & \cdot & -a_2 & \cdot & f & -v & b_1 & \cdot \\ a_3 & \cdot & -e' & -b_2 & v & \cdot & \cdot & -a_3 & f' & -b_2 & -v & \cdot \\ & & m & -h' & h & \cdot & e & e' & -m & g' & -g & \cdot \\ & & & c_1 & \cdot & \cdot & -v & b_2 & g' & a_1 & w & \cdot \\ & & & & c_2 & \cdot & -b_1 & -v & -g & -w & d_2 & \cdot \\ & & & & & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & a_2 & \cdot & -f & v & -b_1 & \cdot \\ & & & & & & & a_3 & -f' & b_2 & v & \cdot \\ \text{Sym} & & & & & & & & m & -i' & i & \cdot \\ & & & & & & & & & c_1 & \cdot & c_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= EA/L & a_2 &= 6F_1^p/5L + 12EI_2/L^3 \\ a_3 &= 6F_1^p/5L + 12EI_2/L^3 & b_1 &= F_1^p/10 + 6EI_2/L^2 \\ b_2 &= F_1^p/10 + 6EI_2/L^2 & c_1 &= 2F_1^p/L/15 + 4EI_2/L \\ c_2 &= 2F_1^p/L/15 + 4EI_2/L & d_1 &= -F_1^p L/30 + 2EI_2/L \\ d_2 &= -F_1^p L/30 + 2EI_2/L & e &= -(M_2^p)/L \\ f &= (M_2^p)/L & g &= -(M_2^q + M_2^p)/6 \\ h &= (2M_2^q - M_2^p)/6 & i &= -(M_2^q - 2M_2^p)/6 \\ m &= (I_2 + I_3)F_1^p/(AL) + GJ/L & v &= -M_1^p/L \\ w &= -M_1^p/2 \end{aligned}$$

여기서  $e'-i'$ 는  $e-i$ 의 식들에  $M_2^p$  대신  $M_3^p, M_3^q$  대신  $M_3^q$ 를 대입하여 얻는다.

$$U_i = \langle U_r; U_d \rangle \quad (12a)$$

$$U_r = \langle U_r, V_r, W_r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle, \quad (12b)$$

$$U_d = \langle U, \theta_{13}, \theta_{23}, \theta_{12}, \theta_{22}, \omega \rangle \quad (12c)$$

여기서  $\langle U_r, V_r, W_r \rangle$ 과  $\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$ 는 강체이동 및 회전변위를 나타내며, 식(12a)의 각 항들은 아래의 식으로 산정한다.

$$U_r = (U^p + U^q)/2, \quad V_r = (V^p + V^q)/2, \quad W_r = (W^p + W^q)/2 \quad (13a)$$

$$\gamma_1 = (\omega_1^p + \omega_1^q)/2, \quad \gamma_2 = (W^q - W^p)/L, \quad \gamma_3 = (V^q - V^p)/L \quad (13b)$$

$$U = U^q - U^p, \quad \omega = \omega_1^q - \omega_1^p \quad (13c)$$

$$\theta_{12} = \omega_2^q - \gamma_2, \quad \theta_{22} = \omega_2^q - \gamma_2, \quad \theta_{13} = \omega_3^q - \gamma_3, \quad \theta_{23} = \omega_3^q - \gamma_3 \quad (13d)$$

여기서  $\theta_{13}, \theta_{23}, \theta_{12}, \theta_{22}$ 는 그림 3에서 보는바와 같이 재단회전각증분이며  $\omega$ 는 부재양단의 상대적인 비틀림증분을 나타낸다. 그리고  $U$ 는 상대적인 축방

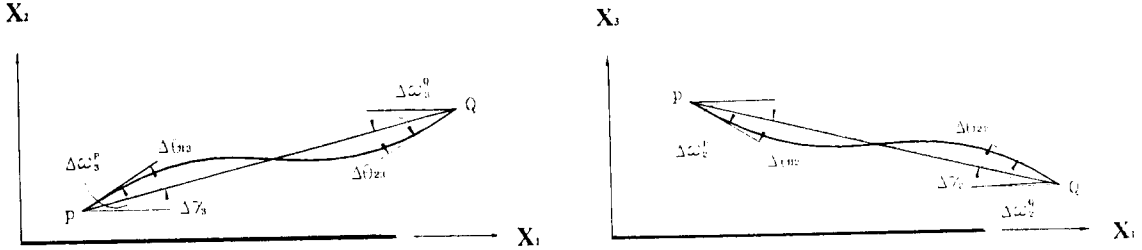


그림 3 Pure deformations of the beam projection on the  $x_1-x_2$  and  $x_1-x_3$  plane

표 2  $12 \times 12$  적합행렬  $A_e$

1	.	.	.	.	$\frac{1}{2}$	.	.	.	.	.	.
.	1	.	.	$\frac{L}{2}$	.	.	.	.	.	.	.
.	.	1	.	$\frac{L}{2}$	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}$	.
.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
1	.	.	.	.	$\frac{1}{2}$	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	$\frac{L}{2}$	.	.	.	.	.	.	.
.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	$\frac{1}{2}$
.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.
.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.

표 3 공간빔대요소의  $12 \times 12$  접선강도행렬  $'K_e$

.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	$-h'$	$h$	.	$i$	$j$	$-i'$	$-j'$	.
.	.	.	.	$-h'$	$a_2$	.	$-e$	$e$	.	.	$-k'$
.	.	.	.	$h$	$a_2$	.	.	.	$e$	$-e$	$k$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	$i$	$-e$	.	$a_1$	.	.	.	.
.	.	.	.	$j$	$e$	.	$b_1$	$c_1$	.	$e$	$f$
.	.	.	.	$-i'$	$e$	.	$c_1$	$b_1$	$-e$	.	$g$
.	.	.	.	$-j'$	$-e$	.	$e$	$-e$	$b_2$	$c_2$	$-f'$
.	.	.	.	.	$-k'$	$k$	.	$e$	$c_2$	$b_2$	$-g$
.	.	.	.	.	.	.	.	$f$	$g$	$-f'$	$-g'$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$d$	.

$$a_1 = EA/L \quad a_2 = F^p/L$$

$$b_1 = 2F^p/L/15 + 4EI_d/L \quad b_2 = 2F^p/L/15 + 4EI_s/L$$

$$c_1 = -F^p/L/30 + 2EI_s/L \quad c_2 = -F^p/L/30 + 2EI_d/L$$

$$d = (I_2 + I_3)F^p/L(AL) + GJ/L \quad e = M_1^p/2$$

$$f = -(M_2^p - 2M_3^p)/12 \quad g = -(2M_2^p - M_3^p)/12$$

$$h = -(M_2^p + M_3^p)/2 \quad i = M_1^p/2$$

$$j = M_2^p/2 \quad k = (M_2^p - M_3^p)/4$$

항변위증분을 나타낸다.

부재좌표계에서 식(13)을 정리하면 증분변위  $U_e$  와  $U_i$ 의 관계식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_e = A_e \cdot U_i \tag{14}$$

여기서  $A_e$ 는 적합행렬을 나타내며 자세한 결과식은 표 2에 제시하였다.

식(14)를 식(11a)에 대입하면 아래와 같이 증분 변위  $U_e$ 에 대응하는 접선강도행렬  $'K_e$ 를 얻는다.

$$\delta U_e^T 'K_e U_e = \delta U_i^T (A_e^T 'K_e A_e) U_i = \delta U_i^T 'K_i U_i \tag{15}$$

여기서  $'K_i$ 의 구체적인 계산 결과식은 표 3에 제시하였다.

$'K_i$ 의 순수변형에 대응하는  $6 \times 6$ 행렬을  $'K_d$ (표 3에서 상자로 표시된 부분)로 나타내면, 부재력증분은 다음과 같이 얻는다.

$$'K_d \cdot U_d = F_d \tag{16a}$$

$$F_d = \langle F, M_{13}, M_{23}, M_{12}, M_{22}, M_1 \rangle \tag{16b}$$

여기서 순수변형벡터  $U_d$ 의 축방향변위  $U$ 는 휨 및 비틀변형으로 인한 축방향의 상대적인 변위성분을 나타내는 Bowing 효과를 고려하여 아래와 같이 수정한 식을 사용한다.

$$U = U^q - U^p + \delta \tag{17a}$$

$$\delta = (\theta_{12}^2 + \theta_{22}^2 + \theta_{13}^2 + \theta_{23}^2) \frac{L}{15} - (\theta_{12}\theta_{22} + \theta_{13}\theta_{23}) \frac{L}{30} + \frac{(I_2 + I_3)\omega^2}{2A} \quad (17b)$$

공간뺨대구조의 증분평형방정식에 대한 식(11)을 전체좌표계로 좌표변환시키고 직접강도법을 적용하면 구조물전체의 증분방정식을 얻을 수 있다. 전체좌표계에서 증분평형방정식으로부터 증분변위가 구해지면, 각 부재에 대하여 부재력증분을 산정하고 불평형하중을 결정하게 된다. 이때 증분형식의 반복계산법을 사용하는 경우, 불평형하중은 다음의 반복계산에서는 하중으로 작용한다. update co-rotational Lagrangian formulation에 근거한 불평형하중의 산정법을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 구조물 전체의 증분방정식을 풀어서 증분변위벡터를 구한다.
- 2) 각 부재에 대응하는 증분변위성분을 부재좌표계로 좌표변환시킨다.
- 3) 부재좌표계에 대한 증분변위로부터 강체회전변위와 순수변형성분을 계산한다.(그림 3 참조)
- 4) 단계 3)에서 계산된 강체회전변위를 전 단계까지의 강체회전변위에 더하여 새로운 좌표변환행렬을 구성한다.
- 5) 단계 3)에서 계산된 순수변형성분을 이용하여 각 부재의 재단력증분벡터를 식(16)과 같이 계산하고, 변형된 상태에 대응하는 재단력을 산정한다.
- 6) 단계 5)에서 계산된 각 부재의 재단력에 대응하는 절점력벡터와 각 절점에 작용하는 외력벡터의 차이로 불평형하중을 산정한다.
- 7) 단계 6)에서 구해진 불평형하중 성분중에서 가장 큰 값이 수렴허용치보다 작으면 다음 하중단계로 넘어가고, 그렇지 않으면 이 조건을 만족시킬 때까지 단계 1)부터 단계 6)까지 과정을 반복계산한다.

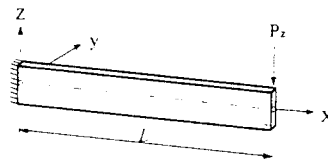
### 3. 수치해석 예

본 논문에서 제시된 비선형 유한요소이론을 적

용하여 공간뺨대구조에 대한 기하학적 비선형 해석을 수행한다. Snap-buckling과 같은 비선형 극한거동을 추적하기 위하여 변위 및 하중증분법<sup>8)</sup>을 적용한다. 대칭단면을 갖는 공간뺨대구조에 대하여 안정성해석(선형좌굴해석)과 기하학적 비선형 해석(후좌굴해석)을 수행하기 위한 유한요소해석 프로그램을 개발하였다. 본 연구에서 개발된 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 공간뺨대구조의 좌굴하중에 대한 엄밀해 또는 횡좌굴에 관한 특성을 보여주는 Argyris 해석결과와 본 연구에 의한 수치해석 결과들을 비교 검토한다.

#### 3.1 횡하중에 의한 캔틸레버의 횡좌굴

그림 4는 자유단에 연직하중이 작용하는 캔틸레버를 나타낸 것이다. 10개의 뺨대요소로 모델링하였으며, 횡좌굴해석에 사용된 재료 및 단면제원은 그림 4에 함께 나타내었다.



L=100cm    A=0.1cm<sup>2</sup>    I<sub>z</sub>=1cm<sup>4</sup>  
 I<sub>y</sub>=0.125cm<sup>4</sup>    I<sub>p</sub>=0.0cm<sup>4</sup>    E=10<sup>4</sup>N/cm<sup>2</sup>  
 G=E/2    J=0.01cm<sup>4</sup>

그림 4 Lateral buckling of end-loaded cantilever

표 4는 표 1의 접선강도행렬  $K_t$ 를 사용하여 선형 횡좌굴해석에 의한 임계하중값과 엄밀해를 함께 나타낸 것이다.

그림 5는 수평방향으로  $P_z/1000$ 와 연직하중  $P_z$ 를 받는 캔틸레버의 횡방향에 대한 후좌굴거동을 추적한 해석결과(연직하중  $P_z$ 와 수평변위  $v$ 의 관계곡선)와 선형좌굴하중값을 함께 나타낸 것이다. 횡좌굴하중 근처에서 과도한 수평변위가 발생하

표 4 Lateral buckling load of end-loaded cantilever(N)

This Study	Analytic solution <sup>17)</sup>
1.00563	1.00315

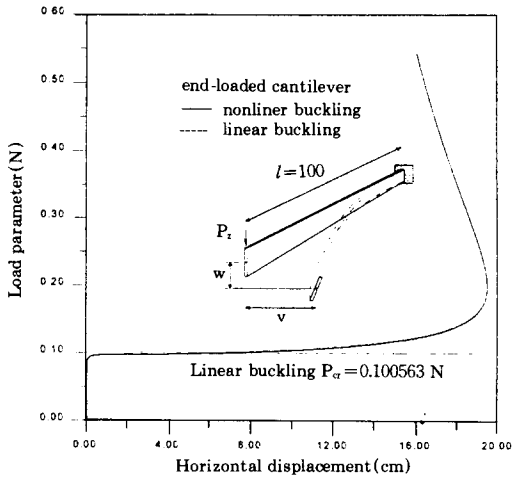


그림 5 Load-displacement diagram of cantilever

고, 이 후에 하중이 급격히 증가하는 전형적인 후 좌굴거동을 관찰할 수 있다.

### 3.2 수평하중에 의한 직각 캔틸레버구조의 횡좌굴

그림 6은 횡방향 집중하중에 의해서 횡좌굴을 일으키는 직각 캔틸레버구조를 나타낸 것이다. 20개의 뼈대요소로 모델링하였으며, 해석에 사용된 재료의 성질 및 단면제원은 아래와 같다.

$$L=100\text{cm} \quad A=1\text{cm}^2 \quad I_y=1000\text{cm}^4 \quad I_z=1\text{cm}^4$$

$$I_\phi=0.0\text{cm}^4 \quad E=10^4\text{N/cm}^2 \quad G=E/2 \quad J=2\text{cm}^4$$

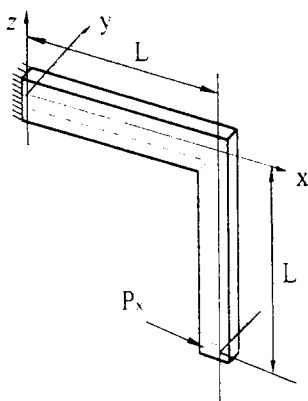
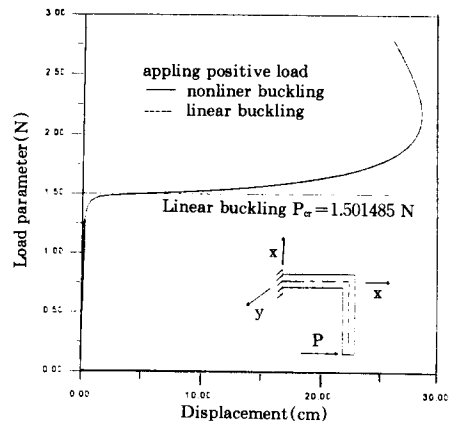


그림 6 Lateral buckling of rigid-angle frame under end load

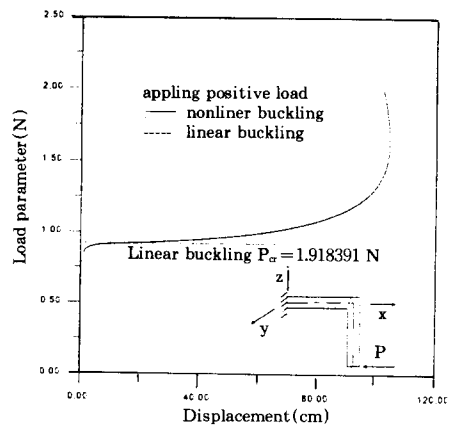
구조물의 횡좌굴에 대한 임계하중값은 횡방향 하중의 방향에 따라서 수평부재가 인장력 또는 압축력을 받는 경우에 대하여 좌굴하중을 산정하였으며, 본 연구에 의한 해석결과와 Argyris의 결과<sup>12)</sup>를 표 5에 함께 나타내었다. 표에서 보는 바와 같이 두 결과는 완전히 일치하는데 이는 본 연구에서 유도한 접선강도행렬이 Argyris의 natural mode formulation에 의한 행렬과 거의 일치하였기 때문이라고 판단된다.

표 5 Lateral buckling load of rigid-angle frame under end load(N)

	Load $P_z$ positive	Load $P_z$ negative	
This Study	Analytic solution <sup>12)</sup>	This Study	Analytic solution <sup>12)</sup>
1.50148	1.50148	0.91839	0.91839



(a) Load  $P_z$  positive



(b) Load  $P_z$  negative

그림 7 Right-angle frame under end load. Load-displacement diagram



그림 7은 y방향으로  $P_x/1000$ 와 수평하중  $P_x$ 를 받는 직각 캔틸레버의 후좌굴 해석결과(수평하중  $P_x$ 와 y방향의 횡변위의 관계곡선)를 제시한 것이다. 수평하중의 방향변화에 따라 이에 대응하는 선형좌굴하중 근처에서 과도한 횡변위가 발생하는 후좌굴거동을 관찰할 수 있다.

3.3 단순지지된 직각 뼈대구조의 횡좌굴

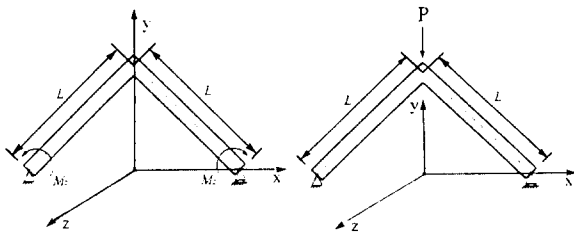
그림 8a는 양단 모멘트  $M_z$ 와 중앙절점에서 z방향 하중  $M_z/2000$ , 그림 8b는 중앙의 집중하중  $P$ 와 z방향 하중  $P/1000$ 를 작용시켜서 횡좌굴을 일으키는 직각뼈대구조를 나타낸 것이다. 이때 부재 단면은 직사각형이며 해석에 사용된 제원은 다음과 같다.

$$L=240\text{mm} \quad A=18.0\text{mm}^2$$

$$I_y=1350\text{mm}^4 \quad I_z=0.54\text{mm}^4$$

$$I_\phi=0.0\text{mm}^4 \quad E=71240\text{N/mm}^2$$

$$G=27191\text{N/mm}^2 \quad J=2.16\text{mm}^4$$



(a) Lateral buckling of frame under end moment (b) Lateral buckling of frame under central force

그림 8 Lateral buckling of hinged right-angle frame

구조물 형상과 하중조건이 대칭이므로 구조물의 절반만을 20개의 요소로 분할하여 해석하였으며, 구조물의 횡좌굴에 대한 임계하중값은 각각 표 6a, 6b에 나타내었다. 또한 해석결과들을 비교하기 위하여 Argyris<sup>18)</sup>의 결과와 엄밀해<sup>17)</sup>를 함께 표시하였으며 본 연구에 의한 임계하중값이 엄밀해 및 Argyris의 결과와 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

변위 및 하중중분 알고리즘을 이용하여 양단 모

표 6(a) Critical moment of right-angle frame under moment(Nmm)

This Study	Analytic solution <sup>17)</sup>	Argyris's result <sup>18)</sup>
622.85	622.21	624.77

(b) Critical load of right-angle frame under central force(N)

Load $P_x$ positive		Load $P_x$ negative	
This Study	Argyris's result	This Study	Argyris's result
11.6718	11.7437	3.9464	3.9469

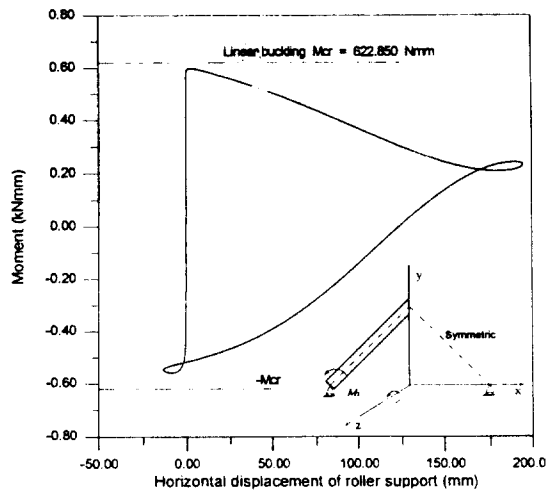
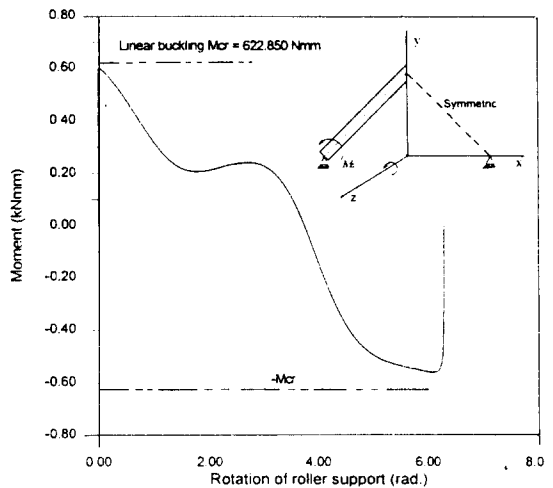


그림 9(a) Load-displacement diagram



(b) Load-displacement diagram

멘트에 의해서 횡좌굴을 일으키는 직각뼈대구조의 기하학적 비선형해석을 수행하였다. 이때 이동단의 수평변위를 변위증분법을 적용하는 구간에서 변위제어 파라미터로 사용하였다. 그림 9a와 그림 9b는 각각 모멘트의 변화에 따른 이동단에서의 수평변위와 회전변위의 비선형 관계곡선을 나타낸 것이다. 후좌굴해석이 가능하도록 하기 위하여 도입한 중앙절점의 Z 방향 하중의 영향 때문에 선형좌굴하중보다 작은 값에서 snap-through 거동을 보였으며, 양단에 대칭으로 작용하는 모멘트하

중에 의하여 구조물이 한바퀴 회전하게 되는 복잡한 후좌굴거동을 나타낸다.

그림 10은 중앙의 집중하중에 의해서 횡좌굴을 일으키는 직각 뼈대구조를 나타낸 것이다. 작용하중의 방향에 따라서 부재가 인장력 또는 압축력을 받는 경우에 대해 각각 후좌굴거동을 추적하였다. 3.2절의 경우와 유사한 후좌굴거동을 관찰할 수 있다.

5. 결 론

공간뼈대구조의 안정성 및 기하학적 비선형해석을 수행하기 위하여 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 개선된 변위장을 도입하여 공간뼈대구조에 대한 비선형 유한요소법을 제시하였다. 그리고 제시된 이론 및 방법의 타당성을 입증하기 위하여, 공간뼈대구조의 횡방향 후좌굴거동을 해석하고 문헌의 해석결과와 비교, 검토하여 결과들이 서로 잘 일치함을 확인하였다. 본 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 본 연구의 선형좌굴하중과 Argyris의 결과가 거의 일치하였는데, 이는 유한한 회전각의 2차항을 고려하여 산정한 본 연구의 기하학적 강도행렬과 semitangential moment와 semitangential rotation에 근거하여 natural mode formulation 으로부터 유도한 Argyris의 강도행렬이 거의 동일한 값을 갖기 때문이라고 판단된다.

(2) 본 연구의 기하학적 비선형해석법을 이용하여 부재가 유한한 각도로 만나는 공간뼈대구조의 횡방향 후좌굴해석이 가능하다.

(3) 변위 및 하중증분법과 결합시킨 본 연구의 기하학적 비선형해석법을 적용하는 경우에 여러 개의 극한점(limit point)을 갖는 공간뼈대구조의 복잡한 기하학적 비선형 평형경로(equilibrium path)를 추적할 수 있다.

참 고 문 헌

1. R. K. and J. Rahimzadeh, "Nonlinear elastic frame analysis by finite element", J. Struct. Eng., ASCE,

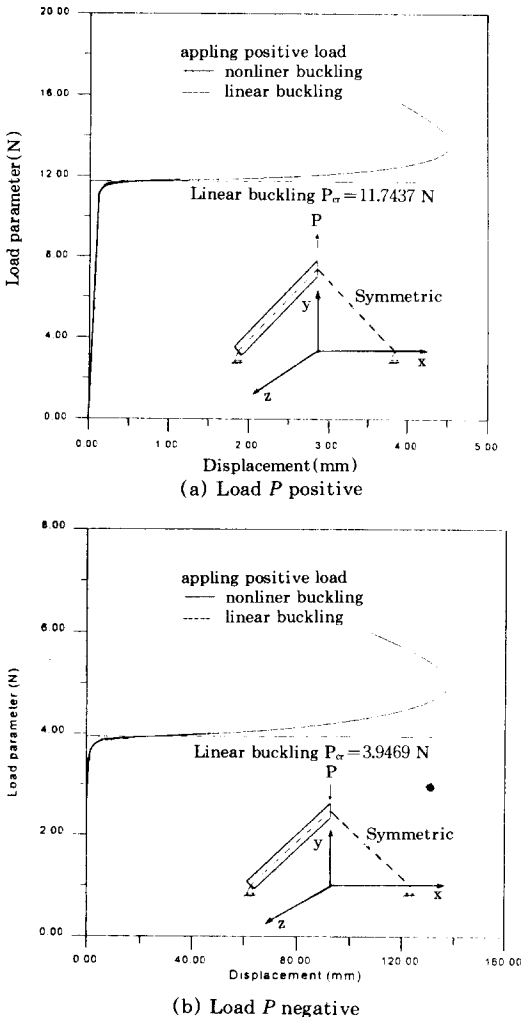


그림 10 Symmetrical right-angle frame. Load-displacement diagram

- Vol. 109, 1983, pp.1952~1972
2. K. J. Bathe and S. Bolourchi, "Large displacement analysis three-dimensional beam structures". *Intermat. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 14, 1979, pp. 961~986.
  3. S. A. Saafan, "Non-linear behavior of structural plane frames", *J. Struct. Engrg., ASCE*, Vol. 89, 1963, pp. 557~579
  4. C. Oran, "Tangent stiffness in plane frames", *J. Struct. Eng., ASCE*, Vol. 99, 1973, pp.973-985.
  5. J.L. Meek, and H.S. Tan, "Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 47, 1984, pp.261-282.
  6. M. Papadrakakis, "Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods", *Computers & Structures*, Vol. 14, 1981, pp.393-402.
  7. 金文榮, 張丞弼, "전단변형을 고려한 平面 뼈대 構造物의 幾何的인 非線形 解析", 大韓土木學會 論文集, 제10권 제1호, 1990, pp.27-36.
  8. 金文榮, 張丞弼, "保存力 및 非保存력을 받는 構造物의 幾何的 非線形 有限요소解析을 위한 荷重 및 變位增分 알고리즘의 開發", 大韓土木學會 論文集, 제10권 제2호, 1990, pp.11-22.
  9. 金文榮, "剪斷變形을 考慮한 空間 뼈대 構造의 幾何學的인 非線形 解析", 大韓土木學會 論文集, 제13권 제4호, 1993, pp.39-49.
  10. R.S. Barsoum and R.H. Gallagher, "Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems", *Internat. J. Number. Meths. Eng.*, Vol. 2, 1970, pp.335-352.
  11. W.F. Chen and T. Atsuta, "Theory of beam columns", Vol. 2, McGraw-Hill, Inc., New York, 1977, pp. 539-608.
  12. J.H. Argyris, P.C. Dunne and D.W. Scharpf, "On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 14, 1979, pp.401-451.
  13. J.H. Argyris, P.C. Dunne and D.W. Scharpf, "On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.14, 1979, pp.99-135.
  14. H. Ziegler, "Principles of structural stability", 2nd ed., Birkhaser, Basel/Stuttgart, 1977, pp.115-128.
  15. K.J. Bathe, "Finite element procedures", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1996, pp.522-528.
  16. M.Y. Kim, S.P. Chang and S.B. Kim, "Spatial stability analysis of thin-walled space frames", *Internat. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 39, 1996, pp.499-525.
  17. S.P. Timoshenko and J.M. Gear, "Theory of elastic stability", 2nd., ed., McGraw-Hill, 1961, pp.212-277.
  18. J.H. Argyris, O. Hilpert, G.A. Malejannakis and D. W. Scharpf, "On the geometrical stiffness of a beam in space - a consistent v. w. approach", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol. 20, 1979, pp.105-131.

(접수일자 1996. 10. 30)