

막구조물의 해석기법 및 설계



서 삼 열*

1. 서 론

지난 20년간 막구조물의 사용이 급속도로 증가했다. 이 구조시스템은 많은 독특한 장점을 지니고 있다. 막의 경량성은 대형공간을 덮기에 용이하며, 다양한 형상을 창조하는 능력이 뛰어나고, 조립이 용이하다는 것 등이 그것이다. 인장구조에 사용된 섬유 막재료는 면내강성은 가지고 있지만 휨강성은 없다. 또한, 곡률때문에 축에 수직(Transverse)인 하중에만 저항한다. 막구조물의 이러한 특성은 건축가나 엔지니어들에게 새로운 창조의 기회를 제공한다. 다양한 컴퓨터 기법이 인장구조물을 설계하는 엔지니어들을 돕기 위해 개발되어 왔다. 어떤 문제에 대한 해는 아직 개발중에 있다.

막구조물의 설계는 다음의 단계로 구성되어 있다.

- 형상탐색 : 건축적 그리고 구조적인 요구조건을 만족하는 초기평형형상의 결정
- 하중해석 : 눈 또는 풍하중과 같은 여러가지 사용하중하에서의 구조물의 거동

조사

-재 단 도 : 평면상의 섬유재단도 결정

막 구조곡면은 일반적으로 곡면이 복잡하고 따라서 그 형태를 수식으로 표현하는 것이 곤란하며, 초기장력 및 자중에 대해서 평형을 이룰 수 있는 형태가 아니면 실현 될 수 없다. 기하학적의미에서 초기장력과 자중에 대해서 형성가능한 곡면이 필요하게 된다. 또한, 막은 휨강성이 없기 때문에 그 형태, 구조물에 대한 하중 그리고 내부응력들은 평형방정식을 만족하기 위해 비선형적으로 상호 작용한다. 막 구조물의 초기설계(Preliminary Design)에서는 규정된 프리스트레스가 평형상태에 있는 초기형상결정 문제가 매우 중요하게 된다. 초기평형형상의 결정문제를 “형상탐색(Shape Finding)”이라 한다. 평형조건을 만족하는 것에 부가적으로 초기형상은 건축적(미적) 그리고 구조적(강도와 안정성)요구조건을 만족해야 한다. 더구나, 소요공간에 대한 건축적 요구사항에 직면하게 되고, 2중곡률의 반경은 면외하중에 저

* 정희원, 대림전문대학 건축설비과, 조교수

항하고 구조물의 안정성을 보장하기에 충분할 만큼 적어야 한다. 거기에는 많은 평형형상이 존재하고 설계자는 설계의 모든 요구조건에 가장 잘 만족하는 형상을 선택해야 한다. 이러한 조건에 가장 만족스러운 형상은 최소곡면(Minimal Surface)형상이다. 최소곡면형상의 장점은 막의 모든 부분에서 인장응력이 균등하다는 것이다. 그러나 몇가지 경우에서 만족스럽지 못한 경우도 있다.

초기평형형상이 결정되면, 구조물의 사용기간 중에 직면하게 되는 모든 종류의 힘에 대한 저항을 확보하기 위해서, 여러가지 하중하에서의 구조물의 거동이 해석되어야 한다. 휨강성의 결여는 인장구조물이 보통 정도의 하중하에서조차 큰 변위를 받을 수 있는 구조물로서 인식되게 한다. 즉, 이러한 구조물은 규정된 하중조건하에서 큰 변위를 받음으로서 적합해지지는 경향이 있다. 어떤 경우에는 하중자체가 변형에 의존하는 경우도 있다. 이러한 예는 처진 표면에 수직을 유지하려고 하는 압력하중이 그것이다. 인장구조물의 하중해석에서 이러한 효과를 고려하기 위해서는 비선형해석이 필요하게 된다. 더구나, 막은 어떠한 압축응력에도 저항할 수 없다. 주름(Wrinkling)은 외부하중이 초기인장응력보다 더 큰 압축응력을 일으킬때 발생한다. 요소주름을 취급하는 과정 또한, 하중해석에서 포함되어야 한다.

본 고에서는, 막과 케이블 그리고 골조로 구성된 인장구조물의 설계에서 형상탐색과 하중해석 모두에 대한 대변형 유한요소과정을 기술하고자 한다.

2. 유한요소방정식의 정식화

유한요소법은 막 구조물의 해석에서 가장 유용한 접근방법이다. 막구조의 심한 기하학적 비선형성에 기인하여 고차요소에 의한 큰(Coarse)요소 분할의 사용 보다는 원시적인 요소의 미세한(Fine) 분할의 사용이 더 바람직하다.

2.1 막요소

막은 휨응력에 저항할 능력이 없다. 따라서, 곡

면의 접선응력만이 면에 수직인 하중에 평형하기 위해서 작용한다. 하중이 변할때, 응력과 국소곡률은 평형을 유지하기 위해서 변화하고, 이러한 변화들은 면의 커다란 변위와 회전을 동반한다. 따라서, 선형탄성론의 미소변위이론을 적용할 수 없고, 변형도-변위 관계식에서 2차항들은 반드시 고려되어야 한다. 비선형의 변형도-변위 관계식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)을 유한요소법의 전형적인 삼각형 평면응력요소를 이용하여 요소방정식을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{Q}_e^T \mathbf{k}_m \mathbf{Q}_e \\ \mathbf{P} &= \mathbf{Q}_e^T \mathbf{p} \\ \mathbf{U} &= \mathbf{Q}_e^T \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서, \mathbf{k}_m 은 탄성강성매트릭스 \mathbf{k}_e 와 기하학적 강성매트릭스 \mathbf{k}_g 로 구성되어 있으며, \mathbf{p}, \mathbf{u} 는 각각 요소좌표계에서 측정된 절점력과 절점변위를 나타낸다. \mathbf{Q}_e 는 요소좌표계에서 측정된 절점변위를 전좌표계로 평가된 절점변위로 변환하는 변환매트릭스이다. 이 매트릭스는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_e & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_e & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_e \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기에서, \mathbf{T}_e 는 요소좌표계의 전좌표계로의 회전에 관련된 회전매트릭스이다. \mathbf{T}_e 의 자세한 유도는 많은 문헌에서 참조할 수 있다.

2.2 케이블요소

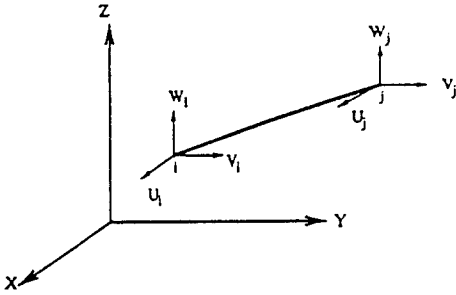


그림 1 전좌표계에서의 케이블요소

그림 1과 같이 변형되지 않은 형상에서 i절점 (X_i, Y_i, Z_i) 과 j절점 (X_j, Y_j, Z_j) 에 연결된 케이블요소를 고려한다.

절점 i와 j가 각각 변위벡터 $[U_i, V_i, W_i]^T$ 와 $[U_j, V_j, W_j]^T$ 를 가지고 있다면 공학변형도의 정의에 의해서 케이블의 변형도를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\epsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \tag{4}$$

여기에서,

$$l_0 = \sqrt{[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2]}$$

그리고,

$$l_1 = \sqrt{[(X_j - X_i + U_j - U_i)^2 + (Y_j - Y_i + V_j - V_i)^2 + (Z_j - Z_i + W_j - W_i)^2]}$$

윗식은 변형 전, 후의 케이블요소의 길이를 나타낸다. 변형도에 변분을 취하면,

$$\begin{aligned} \delta\epsilon = & \left[\frac{X_j - X_i + U_j - U_i}{l_1} \delta(U_j - U_i) \right. \\ & + \frac{Y_j - Y_i + V_j - V_i}{l_1} \delta(V_j - V_i) \\ & \left. + \frac{Z_j - Z_i + W_j - W_i}{l_1} \delta(W_j - W_i) \right] / l_0 \end{aligned} \tag{5}$$

식(5)를 매트릭스 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\delta\epsilon = \frac{1}{l_0} \mathbf{B} \delta \mathbf{U} \tag{6}$$

여기에서,

$$\mathbf{U} = [U_i, V_i, W_i, U_j, V_j, W_j]$$

그리고,

$$\mathbf{B} = [-C_x, -C_y, -C_z, C_x, C_y, C_z]$$

변형된 케이블의 방향여현 C_x, C_y, C_z 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{X_j - X_i + U_j - U_i}{l_1} \\ C_y &= \frac{Y_j - Y_i + V_j - V_i}{l_1} \\ C_z &= \frac{Z_j - Z_i + W_j - W_i}{l_1} \end{aligned} \tag{7}$$

케이블요소의 평형방정식은 다음과 같은 가상일의 원리를 사용하므로 얻을 수 있다.

$$\phi_c = \int_{s^*} \frac{1}{l_0} \mathbf{B}^T \sigma A ds = \mathbf{B}^T \sigma A \tag{8}$$

여기에서, A 는 케이블요소의 단면적이고, s^* 는 케이블요소의 길이를 나타낸다. 뉴튼-랩슨 반복법을 위해 요소방정식을 선형화하면,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c &= \frac{\partial \phi_c}{\partial \mathbf{U}} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{B}^T \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{U}} + A \sigma \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{U}} \\ &= \frac{EA}{l_0} \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \frac{A \sigma}{l_1} \mathbf{C} \end{aligned} \tag{9}$$

여기에서,

$$C = \begin{bmatrix} C_y^2 + C_z^2 & 0 & 0 & -C_y^2 - C_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_x^2 + C_z^2 & 0 & 0 & -C_x^2 - C_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_x^2 + C_y^2 & 0 & 0 & -C_x^2 - C_y^2 \\ -C_y^2 - C_z^2 & 0 & 0 & C_y^2 + C_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -C_x^2 - C_z^2 & 0 & 0 & C_x^2 + C_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & -C_x^2 - C_y^2 & 0 & 0 & C_x^2 + C_y^2 \end{bmatrix}$$

3. 형상 탐색

형상탐색에서, 초기평형형상에 대한 가장 널리 사용되는 기준은 최소곡면(Minimum Surface) 형상이다. 그러나 어떤 경우에는 최소곡면형상이 건축적 그리고 구조적 요구조건 모두를 만족할 수 없는 경우가 있다. 여기에서는 막 구조물에 대한 초기평형형상 결정에 대한 몇가지 방법을 소개한다.

3.1 최소곡면 접근법

최소곡면은 등장력상태로 특징지워진다. 최소곡면(등장력곡면)을 찾기 위해서, 전질의 식(2)에서 탄성계수를 0으로 하여 해석을 기하학적 강성 매트릭스만으로 수행하는 방법이 있다. 이 방법에서, 해석기법으로는 초기에 편평막으로부터 임의의 부분을 강제변위시키는 변위증분법을 사용한다. 그림 2는 변위증분법에 의한 카테노이드 곡면의 해석예를 나타내고 있다.

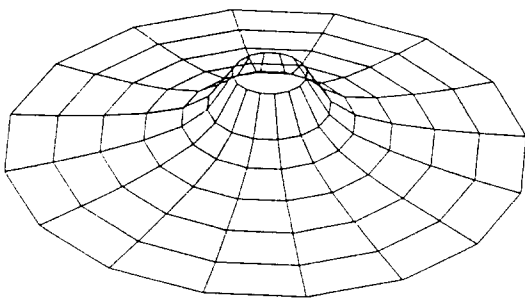


그림 2 변위증분법에 의한 카테노이드 곡면의 형상해석예

또다른 방법으로, 막의 탄성계수를 매우 작게 설정하여, 균등 프리스트레스상태(즉, $\sigma_{x0} = \sigma_{y0}$, τ_{xy0}

=0)에 있다고 가정하는 방법이 있다. 따라서 주어진 기하학적 경계조건하에서 막의 평형형태가 계산된다. 매우 작은 탄성계수를 사용하기 때문에 대변형이 유발되더라도 막에서의 응력들은 매우 미세하게 변화될 것이다. 따라서, 규정된 균등 프리스트레스는 막의 계산된 평형형상에서 평형으로 남게 된다. 다시 말하면, 막의 계산된 평형형상은 거의 등장력상태 즉, 최소곡면 상태에 있게 된다.

케이블보강 막구조의 경우, 평형형상은 케이블의 배치와 막과 케이블에서의 프리스트레스비에 의존한다. 막은 등장력상태에 있고, 케이블응력은 그 축을 따라서 일정하다고 가정하면, 대변위 유한요소해석은 곡면상의 2점(케이블양단)사이의 거리제한 정의를 이용한 최소곡면 계산으로부터 직접 결정된 형상과 같은 형상을 탐색한다. 그림 3과 그림 4는 이 방법에 의한 형상해석예를 나타내고 있다.

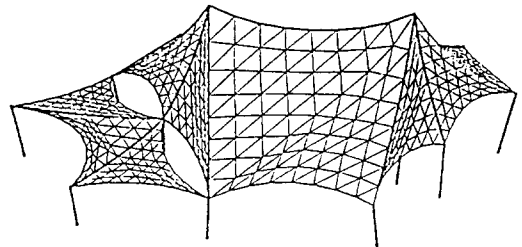


그림 3 형상탐색예-1

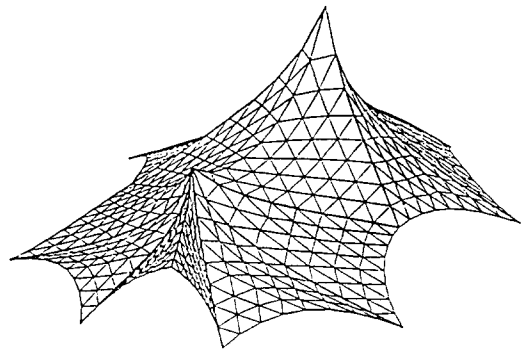


그림 4 형상탐색예-2

3.2 비등장력 곡면 접근법

최소곡면형상이 인장구조물의 설계에서 언제나 만족스러운 것은 아니다. 어떤 설계조건하에서는 최소곡면이 사용될때 만족스럽지 못한 경우가 있다. 최소곡면에 대한 평균곡률이 0이기 때문에 이러한 곡면은 오히려 편평(Flat)해지는 경향이 있다. 막의 곡면에 수직한 하중에 대한 저항능력은 그 곡률에 의존하기 때문에 최소곡면이 막 구조물에 언제나 만족스럽지만은 않다는 것을 알 수 있다.

예로서, 낮은 곡률의 최소곡면은 막지붕으로부터 빗물을 흘러내리게하는 시설에는 부적절하고, 설상가상으로 지붕에 작은 빗물 웅덩이를 만들기도 한다. 케이블의 사용은 다른 쪽면의 곡률을 강제적으로 감소시켜, 곡면 주곡률중의 하나를 증가시키므로써 최소곡면의 어려움을 극복할 수 있다. 그러나, 케이블에 의해서 야기되는 형상의 큰 변화는 케이블에 의해서 대부분의 하중이 전달됨을 의미한다. 결과적으로, 케이블 부착점인 골조에서의 응력이 크게 증가하는 결과를 유발한다. 따라서, 몇가지 경우에는 비등장력곡면은 설계자에게 더 많은 융통성을 제공할 수 있다. 이 접근법에서, 매우 작은 영계수는 앞에서와 같이 막에 대해서 가정되나, 초기응력은 더 이상 균등하게 가정할 필요는 없고 평형형상은 초기응력의 분포에 의존한다. 비등초기장력을 규정하기 위해서, 국소좌표계(r,s,t)가 그림 5와 같이 설정된다. 여기에서, r -축은 전좌표계 $X-Z$ 평면에 평행하고, t -축은 요소

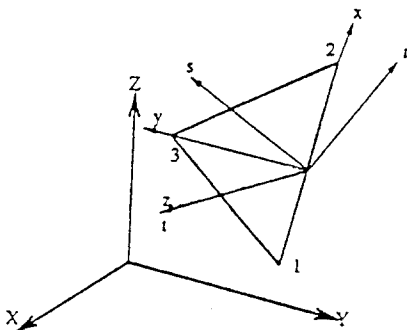


그림 5 초기응력 좌표계

의 평면에 수직한 요소 z -축과 일치한다. 초기응력은 국소좌표계(r,s,t)에서 주어지고, 유한요소해석을 위해 요소좌표계(x,y,z)로 변환된다.

만족스러운 초기 평형형상을 찾기 위해서 초기응력의 비를 여러번 조정하는 작업이 필요하다.

그림 6은 케이블이 사용되지 않고, 중심부의 높이가 규정된 말안장형 막구조물을 보여주고 있다. 이 곡면에서 초기응력은 $\sigma_r=13, \sigma_s=5$ 를 사용하였다.

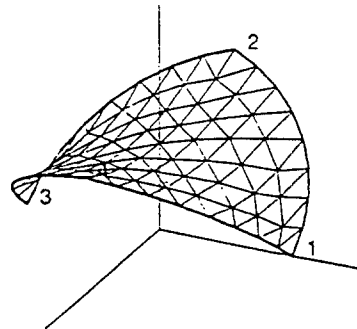


그림 6 비등장력 말안장형 막구조물

3.3 비선형 변위해석 접근법

막 구조물의 설계에서, 비 등초기장력의 크기를 어떻게 설정해야 하는가는 분명치 않다. 이러한 경우에, 탄성변형에 근거를 둔 다른 접근법이 사용될 수 있다. 그림 7에 제시된 Marquee막구조물의 경우, 등초기장력하의 편평막으로부터 출발하여, 영계수에 대한 실제값을 사용하여, 막의 중심부를 최종 목적위치의 아주 작은 부분만을 변위시킨다.

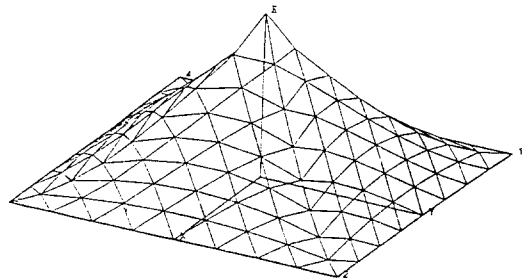


그림 7 Marquee막구조물

결과적인 평형형상은 비등장력형상이 되고, 아주 큰 응력이 분포하게 된다. 이 단계에서, 변형에 기인한 응력들은 제거하고, 단지 초기응력만을 유지시킨다. 다음에, 중심부에서 또 다른 수직변위를 부가한다. 이 과정은 Marquee의 중심부가 설계치에 완전하게 변위될 때까지 반복된다. 마지막 증분 단계에서의 응력은 평형상태에 있게 되고, 막의 응력계산에 사용한다. 마지막 반복이 매우 큰 응력을 나타내면, 마지막 부분의 탄성응력을 방출한 후에 좀 더 적은 변위를 부여한다. 이 과정은 인장구조물에 대한 건설과정을 시뮬레이션하는 효과를 얻을 수 있다. 그림 7에 제시된 막구조물은 비선형변위 접근법에 의해서 생성된 것이다. 9번의 뉴턴-랩슨 반복으로 최종형상이 결정되었다.

3.4 주름의 처리

막은 어떠한 압축응력에도 저항할 수 없으므로 외부하중이 초기 인장응력보다 큰 압축응력을 유발할때 주름은 발생하고, 요소에서의 응력들은 재분배 된다. 요소의 주름을 취급하는 과정은 하중 해석의 신뢰도를 보장하기 위해서 고려되어야 한다. 주응력 σ_1 과 σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2$)는 해석과정에서 언제나 계산되고 검토되어야 한다. 주름이 발생하는지 아닌지는 다음의 조건에 의해서 결정할 수 있다.

- (1) $\sigma_1 \leq 0$: 2축주름의 발생
- (2) $\sigma_2 \leq 0$ 그리고 $\sigma_1 > 0$: 2번째 주응력 방향으로 단일축 주름의 발생
- (3) $\sigma_2 > 0$: 주름이 발생하지 않는다.

2축 주름의 경우, 요소는 비활동적이고(Inactive) 0으로 두어야 한다. 또한, 요소강성매트릭스의 결정에서 매우 작은 성분 α 를 갖는 대각탄성매트릭스를 사용한다.

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (9)$$

단일축 주름에서, 응력상태는 그림 8의 모어씨클에서 보여지는 것과 같이 될것이다. 압축응력 σ_2

가 발생하지 않도록 해야 한다. 이것은 다음의 방법으로 해결할 수 있다. 주응력 방향의 구성방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) + \sigma_{10} \quad (10)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\epsilon_1 + \epsilon_2) + \sigma_{20} \quad (11)$$

$$\tau = 0 \quad (12)$$

(전단응력이 주응력방향에서 정의에 의해 0가 된다 하더라도 전단변형은 초기응력이 설정되어 있다면 일반적으로 0가 되지 않는다.)

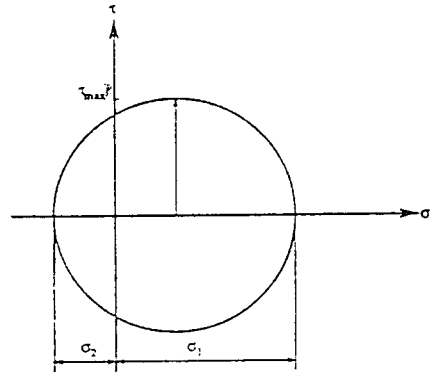


그림 9 모어씨클

여기에서, σ_{10} , σ_{20} 는 각각 주응력방향의 초기응력이다. 두번째 주응력 σ_2 는 0가 되어야 한다. 식 (11)으로 부터 다음식을 얻을 수 있다.

$$\epsilon_2 = -\nu\epsilon_1 - \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_{20} \quad (13)$$

식(13)을 (11)에 대입하면, 실제응력을 얻을 수 있다.

$$\sigma_1 = E\epsilon_1 + \sigma_{10} - \nu\sigma_{20} \quad (14)$$

따라서, 주응력 방향에서 주름요소의 응력벡터는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma = [\sigma_1 \ 0 \ 0] \quad (15)$$

주응력의 좌표계에서 탄성매트릭스는 다음과 같은 형태를 취한다.

$$D = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (16)$$

응력벡터(15)와 탄성매트릭스(16)은 요소좌표계(x,y,z)로 변환되고, 국소요소 강성매트릭스를 평가하는데 사용된다. 주름이 발생한 후에 재료는 이방성재료와 같이 거동하기 때문에 이 과정이 필요하다.

그림 10-11은 그림 34의 형상탐색결과 구조물의 풍하중과 설하중에 대한 응력-변형 해석결과를 나타내고 있다. 두 경우에서, 막의 초기합응력(σ_0)은 7 lb/in로, 섬유계수(Eh)와 막의 포와송비는 각각 5500lb/in와 0.3을, 케이블의 면적계수(EA)는 6×10^6 lb를 사용하였다. 풍속은 7.5mph로 가정하였다.

단일축 주름이 몇 요소에서 발생하였으나, 극소수의 요소만이 2축주름이 발생하였다.

4. 결 론

본 고에서는, 막구조물의 설계시 반드시 수행되어야 하는 형상해석과 응력-변형해석과정을 간

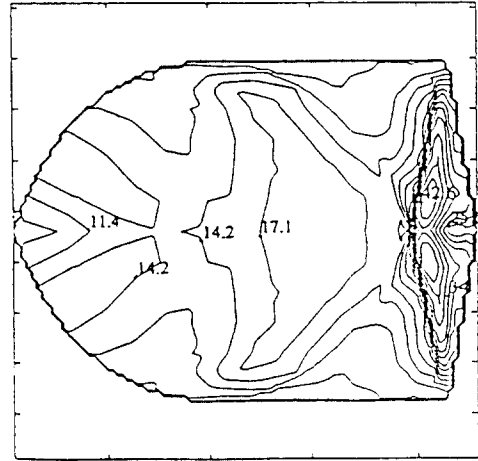


그림 11 180도 방향 풍하중에 의한 해석모델-1의 응력등고선

략하게 언급하였다. 막 구조물의 설계과정은 3부분의 주요 단계로 나뉘어 진다: 형상탐색, 하중해석, 재단도 생성. 여기에서는 형상탐색과 하중해석 단계를 다루었다. 언급된 비선형 유한요소 해석 과정은 형상탐색과 하중해석모두에 적용할 수 있다.

또한, 형상탐색해석에 대한 3가지 방법, 즉, 등장력곡면, 비등장력곡면 그리고 비선형변위해석등이 초기 평형형상을 결정하는 방법으로 소개었다. 형상탐색에 대한 여러 접근법의 사용 가능성은 다양한 막 구조물에 대한 설계를 편리하게 한다. 여기에서는 언급되지 않았으나, 우리나라에서도 형상해석, 응력해석 뿐 아니라 막구조물의 시공과정에 대한 시공해석과 막면 형성에 매우 중요한 단계인 재단도해석(Cutting Pattern Analysis)에 대한 연구와 막구조물의 적용분야를 넓히려는 응용연구가 절실히 필요한 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

1. Argyris, J.H., etal, "A General Method for the Shape Finding of Lightweight Tension Structures," Comput. Mech. Appl.Mech. Engng 3, 1974, pp.135-149.
2. Harber, R.B and Abel, J.F., "Initial Equilib-

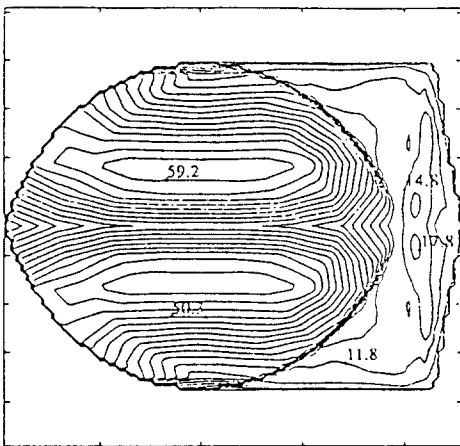


그림 10 눈하중에 의한 해석모델-1의 응력등고선

- rium Solution Methods for Cable Reinforced Membranes, Part I-Formulation, Part II-Implementation," *Comput. Mech. Appl.Mech. Engng* 30, 1982, pp.263-306.
3. Miyamura, A. et al, "A Case Study of the Design and Construction of a Tension Fabric Structure," *Proc.Int.Colloquium on Space Structure*, Beijing, 1986, pp.622-629.
 4. Fujitake, M., Kojima, O. and Fukushima, S., "Analysis of Fabric Tension Structures," *Comput. Struct.*32, 1989, pp.537-547.
 5. Moncrieff, E. and Topping, B.H.V., "Computer Methods for the Generation of Membrane Cutting Patterns," *Compt.Struct.*37, 1990, pp. 441-450. 