

# 점조도 계산법

李 鎮 雨

〈湖西大 電氣工學科 教授〉

## 1. 거리역자승 법칙

크기가 유한하고 불균일한 광원으로부터 광속이 수광부의 한 점으로 방사되는 일반적인 상황은 그림 1과 같다. 광원의 면적소  $dA$ 는 수광부의 면적소  $dA'$  위의 점 P 방향으로 휘도가  $L$ 이라고 가정한다. 광원은 광원에서  $dA'$ 에 대응하는 입체각  $d\omega$  안으로  $d\Phi$  [lm]을 방사한다. 광원에서 수광부에 이르는 직선은  $dA$ 의 법선과 각  $\alpha$ ,  $dA'$ 과는 각  $\beta$ 를 이룬다.

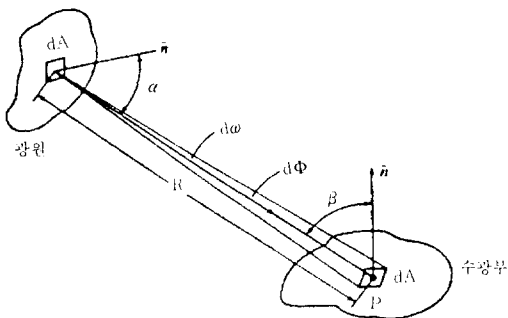


그림 1. 거리역자승법칙의 일반적인 상황

$$d\Phi = L d\omega = \frac{L dA' \cos \beta}{R^2} \quad (1)$$

점 P에서의 조도는 다음 식으로 주어진다.

$$E = \frac{d\Phi}{dA'} = \frac{L \cos \beta}{R^2} \quad (2)$$

이것은 점광원에 대한 거리 역자승의 법칙의 형태이다.  $dA$ 를 무한 면적 광원의 한 부분이라고 가정하면, 식 (2)는 다음과 같이 수정된다.

$$dE = \frac{dI \cos \beta}{R^2} \quad (3)$$

그리고

$$dI = L \cos \alpha dA \quad (4)$$

이 식을 식 (3)에 대입하면, 다음과 같이 된다.

$$dE = \frac{L \cos \alpha \cos \beta dA}{R^2} \quad (5)$$

식 (5)는 면광원의 면적소에 대한 거리 역자승 법칙의 형태이다.

P방향으로의 무한한 면광원의 광도와 P점에서의 조도를 계산하기 위하여, 식 (4), (5)를 광원면적으로 적분하면 다음 식이 얻어진다.

$$I = \int_s L \cos \alpha dA \quad (6)$$

$$E = \int_s \frac{L \cos \alpha \cos \beta dA}{R^2} \quad (7)$$

식 (7)은 일반적인 식으로, 임의의 형상과 배광의 광원에 의하여 제공되는 조도를 계산할 수 있다. 문제는 적분인데, 적분은 해석적 혹은 컴퓨터

터를 사용하여 수치해석적으로 해결할 수 있다.

식 (6)은 일반적인 식이 아니다. 광도는 점광원의 주어진 방향으로의 성질이다. 만약 그림 1에서 거리 R이 광원의 최대크기에 비하여 커지게 되면(far-field case), 식 (6)은 광원의 광도가 된다. 이러한 경우 수광부는 충분히 멀리 떨어져 있어, 각 광원 면적소로부터 연결되는 선은 평행하다고 가정해도 좋다. 거리 R이 광원의 최대크기에 비하여 크지 않은 경우(near-field case) 식 (6)은 광원의 광도를 계산할 수 없다. 그러므로 식 (6)은 점이 아닌 광원에 사용할 수는 있으나, 수광점이 광원으로부터 비교적 먼 거리에 있어야만 한다.

## 2. 거리역자승 법칙에 의한 근사계산

거리역자승의 법칙(Inverse Square Law ; ISL)은 점광원에 기초한 것으로 점광원이 아닌 경우 사용하려면, 광원의 크기가 광원과 수광부 사이의 거리에 비하여 작아야 한다. 일반적으로 광원의 최대크기에 대한 거리의 비가 적어도 5:1은 되어야만 ISL이  $\pm 1(\%)$ 의 오차 내에서 성립한다. 이러한 문제를 살펴보기 위하여, 그림 2와 같은 디스크 광원을 생각한다. 광원은 반지름  $R=1[m]$ 이며, P방향으로 일정 휘도  $L [cd/m^2]$ 을 갖고 있다. 광원에서 수광부까지의 거리를 D라고 가정하며, 광원의 최대 크기 2R에 비하여 크지 않다고 가정한다. 그러므로 ISL이 전체 광원에 적용되지 않는다.

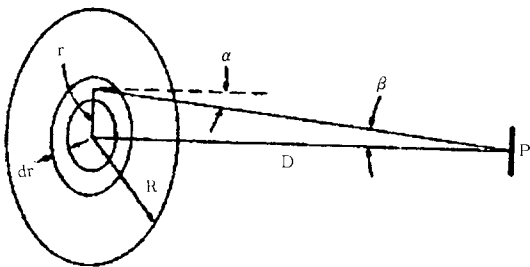


그림 2. 점이 아닌 광원

그러나 그림 2의 링 안의 모든 점에 대한 작

은 링에서는 성립할 수 있다.  $\alpha$ 와  $\beta$ 와 링에서 P까지의 거리를 일정하다고 하면, 식 (5)와 같은 ISL의 미분형을 적용하면 다음 식과 같다.

$$dE = \pi D^2 L \frac{2rdr}{(D^2 + r^2)^2} \quad (8)$$

식 (8)의 양변을 적분하면, 다음 식과 같이 된다.

$$E = \pi D^2 L \int_0^R \frac{2rdr}{(D^2 + r^2)^2} = \frac{\pi LR^2}{D^2 + R^2} \quad (9)$$

P방향에서의 광원의 미분광도는 다음 식과 같다.

$$dI = \frac{L(2\pi r dr)D}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \quad (10)$$

광원에서의 광도를 계산하면 다음 식과 같다.

$$I = 2\pi L \int_0^R \frac{rdrD}{(D^2 + r^2)^{3/2}} \quad (11)$$

$D/(D^2 + r^2)^{1/2}$ 는 광원각의 cosine이다. 정의에 의하여 I는 주어진 방향  $\alpha$ 는 상수이고 이 경우는 0이다. 다른 방법으로 말하면, 모든 r에 대하여  $D \gg r$ , 따라서

$$I = 2\pi L \int_0^R r dr \quad (12)$$

결과는

$$I = \pi R^2 L = LA \quad (13)$$

따라서, 광원의 광도는 단순히 휘도와 투사되는 광원의 면적의 곱이 된다.

조도계를 P에서 광원에 수직으로 놓았다고 가정하면, P에서의 측정된 E는 D값에 따라 다르게 된다. 그 값은 식 (9)에서 계산할 수 있다. 또한 식 (2)( $\beta=0^\circ$ 인 경우)에서 ISL을 전체 광원에 적용하여 E를 계산할 수 있으나 가정에 문제가 있게 된다. 표 1에  $R=1[m]$ ,  $L=500[cd/m^2]$  따라서  $I=1,570[cd]$ 의 결과를 나타내었다. 여기에서 실제 휘도와 근사(ISL)휘도의 차이가 1[%]이내가 되려면, 2R(광원의 최대크기)에 대한 D의 비가 5:1이상이어야 한다. 그러나, 3

[%]의 오차도 무방하다면, 단지 3:1의 비율만이 필요하다. 이 예에서 다른 광원 형태를 직접 일반화시키지는 못할지라도, 광원휘도분포가 거의 램버시안(Lambertian)이라면 패턴은 거의 같게 된다.

표 1.

D	실제 E	ISL E	% 오차	겉보기 I
0.5	1,260	6,280	400	314
1	785	1,570	100	785
2	314	393	25	1,257
4	92.4	98.2	6.25	1,478
6	42.5	43.6	2.78	1,528
8	24.2	24.5	1.56	1,547
10	15.6	15.7	1.00	1,555
15	6.95	6.98	0.44	1,564
20	3.92	3.9	0.25	1,567
30	1.74	1.75	0.11	1,569
40	0.981	0.982	0.06	1,570

그림 2에 주어진 광원을 실험실에서 멀리 떨어진 점에서 보이는 광도를 측정하려고 하면, 조도계를 사용하여, 표 1에서와 같은 실제 E값을 얻을 수 있다. 그러면 표 1에서 겉보기 I열은 각각의 실제 E에 D<sup>2</sup>을 곱하여 계산할 수 있다. D가 증가함에 따라 겉보기 광도가 이후의 전체 광원의 실제 광도에 접근한다. 극한의 표현을 사용하면

$$I = \lim_{D \rightarrow \infty} E D^2 \tag{14}$$

이 결과는 식 (9)에서 유도된다. D ≫ R인 경우

$$E = \frac{\pi L R^2}{D^2} = \frac{LA}{D^2} = \frac{I}{D^2} \tag{15}$$

### 3. 띠, 원통과 사각형광원

불규칙한 형태 혹은 규칙적인 형태이나 서로 흩어져 있는 여러개의 광원에 의하여 만들어지는 한 점의 조도를 계산하는 데는 “building-block” 접근법을 사용하는 것이 유용하다. 이 방법의 사용법은 다음과 같다. 몇 개의 광원의 표준 형태

를 정의하고, 그들이 만들어내는 조도의 공식을 만든다. 공식은 거리, 각도와 변수에 따른 조도로 표현되어, 사용자는 특별한 조명 상황에 적합한 값을 대입할 수 있다. 여기에서 중첩의 원리를 사용하고, 조도의 합은 고려하는 기구에 적합한 기본 광원 형태의 조합에 의하여 구하여진다.

이러한 물리 시스템 모델링의 아이디어는 복잡한 시스템을 몇 개의 간단한 실체로 구성하고, 중첩의 원리를 사용하여 집합적인 해답을 얻는 아이디어로 물리학과 공학에서 널리 사용된다. 중첩의 원리는 여러 자극에 대한 시스템의 응답은, 각각의 자극이 별도로 시스템에 적용되는 응답의 합으로 된다는 것이다. 단 하나의 제한은 시스템이 선형적이어야 한다는 것이다. 즉, 자극 S가 응답 R을 만들 때, k가 실수일 때 자극 kS는 응답 kR을 만들어야만 한다. 이러한 제한은 시스템이 증가된 자극하에서 포화되지 않고 이전의 응답보다 더 큰 응답을 내지 않는 경우이다. (이러한 현상은 음향시스템에서 충실도가 매우 높지 않은 경우에 발생한다. — 음량 제어시 음량을 매우 크게 하면 음량은 조금 커지면서 왜형이 발생한다.)

#### 3.1 띠광원

그림 3에 휘도 L, yz평면에서 폭 W인 띠 광원을 보이고 있다. 띠의 중앙의 마주선 yz평면에 평행한 평면 위의 점 P에서의 조도를 구하려 한다. 점 P에서의 조도를 구하기 위하여 사용하려는 방법은 폭 W, 길이 dy의 작은 조각에 의한 P점에서의 조도를 구하고 이들을 적분하여 모든 조각들의 영향을 찾아낸다.

광원의 조각에서 P점까지의 거리는  $\sqrt{y^2 + q^2 + r^2}$  각  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 같고 이들의 cosine은  $q/\sqrt{y^2 + q^2 + r^2}$  이 된다. 이것은 식 (5)에 대입하면 다음 식이 된다.

$$dE_{11} = \frac{LWq^2 dy}{\sqrt{y^2 + q^2 + r^2}} \tag{16}$$

여기에서  $y = \pm h$  상에서 적분을 할 때, 2h는 띠의 길이가 되고, 다음 식으로 된다.

$$E_{11} = \frac{LWq^2}{q^2+r^2} \left( \frac{h}{q^2+r^2+h^2} + \frac{1}{\sqrt{q^2+r^2}} \tan^{-1} \frac{h}{\sqrt{q^2+r^2}} \right) \quad (17)$$

여기에서 아래첨자 H는 그림 3에서 수평면 위의 조도를 나타낸다. 띠를 0에서 h로 늘리고, 점 P를 띠 끝의 반대로 보내면 식 (17)을 2로 나누면 된다.

h가 무한대로 되면, 띠광원은 점 P에서의 거리에 비하여 매우 길게되어 식 (17)의 괄호 안의 처음 항이 사라지고 둘째 항은  $\pi/(2\sqrt{q^2+r^2})$ 이 되어 결과는 다음 식으로 된다.

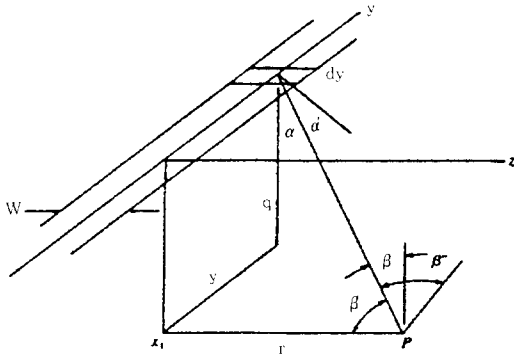


그림 3. 띠광원

$$E_{11} = \frac{\pi LWq^2}{2(q^2+r^2)^{3/2}} \quad (18)$$

h가 P까지의 거리에 비하여 매우 작게 되면, 식 (17)은 다음과 같이 된다.

$$E_{11} = \frac{LWq^2}{q^2+r^2} \left( \frac{h}{q^2+r^2} + \frac{h}{q^2+r^2} \right) = \frac{2LWq^2h}{(q^2+r^2)^2} \quad (19)$$

여기에서는 각도가 작은 경우 그 각의 tangent값은 라디안으로 표현된 각도와 같다는 가정을 사용하였다. 2WL이 작은 띠의 면적이라는 사실에 주목하면 식 (19)는 단순히 전체 광원에 대한  $E_{11}$ 의 ISL 값이 된다.

띠에 평행하지 않은 평면 상에 만들어지는 조도는 실제로 나타나는데, 예를 들면 천정에 부착된 조명기구에 의하여 벽면에 만들어지는 조도가

있다. 그림 3에서 xy평면에 평행한 평면의 점 P에서 수직면 조도를 찾기 위하여는 단지  $\beta$ 를  $\beta'$ 으로 치환하기만 하면 된다. 그러므로 식 (16)에서 cosine 항이  $q/\sqrt{y^2+q^2+r^2}$ 에서  $r/\sqrt{y^2+q^2+r^2}$ 로 치환된다. q와 r은 상수이므로, 적분에는 변화가 없고 결과는 다음과 같다.

$$E_{V1} = E_{11} \frac{r}{q} \quad (20)$$

여기에서  $V_1$ 는 띠에 평행한 수직평면 위의 점 P에서의 조도를 의미한다.

xy평면에 평행한 평면상의 점 P에서의 수직면 조도를 알기 위하여는 그림 3에서  $\beta$ 가  $\beta''$ 로 되고 식 (16)의 cosine항이  $y/\sqrt{y^2+q^2+r^2}$ 로 변경되어야 한다. y는 변수이므로 적분이 변하게 된다. 식 (16)은 다음과 같이 된다.

$$dE = \frac{LWqdy}{(y^2+q^2+r^2)^2} \quad (21)$$

이식은 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} E_{V1} &= \frac{LWq}{2} \int_0^h \frac{2ydy}{(y^2+q^2+r^2)^2} \\ &= \frac{LWq}{2} \left( \frac{-1}{(y^2+q^2+r^2)} \right) \\ &= \frac{LWqh^2}{2(q^2+r^2)(q^2+r^2+h^2)} \end{aligned} \quad (22)$$

$V_1$ 는 띠에 수직인 수직평면 상의 점 P에서의 조도를 나타내는 것에 주의하라. 또한 적분구간이 -h에서 h 대신 0에서 h인 점에 주의하라. 이유는 이 경우에는 P가 있는 평면에서 띠의 반만이 보이기 때문이다.

### 3.2 원통광원

원통광원과 띠광원사이의 유일한 차이점은 각도  $\alpha$ 의 변화이다. 원통광원은 그림 3에서 항상 점 P를 향하여 부사폭 W로 나타나나 띠광원은 그렇지 않다. 따라서 원통광원의 경우 그림 3에서  $\alpha$ 를  $\alpha'$ 으로 바꾸고, 식 (16) (21)에서  $\cos \alpha$ 가  $\sqrt{q^2+r^2} / \sqrt{y^2+q^2+r^2}$ 에서  $q/\sqrt{y^2+q^2+r^2}$ 로 변경

된다.  $q$ 와  $r$ 은 변수가 아니므로 적분의 변화는 없고 다음의 일반적인 결과를 얻는다.

$$E_{\text{tube}} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{q^2}} E_{\text{strip}} \quad (23)$$

$r=0$ 일 때, 즉 점  $P$ 가 광원의 직하에 있을 때,  $E_{\text{tube}} = E_{\text{strip}}$ 이 된다. 다른 경우에는  $E_{\text{tube}} > E_{\text{strip}}$ 이 된다.

### 3.3 사각형광원

마지막 표준광원의 형태는 사각형평면으로 그림 4에 도시하고 있다. 평면은 휘도  $L$ , 크기가  $h$ 와  $w$ 이고  $xy$  평면에 놓여 있다. 점  $P$ 는 평면의 모서리에서 외부로 거리  $q$ 되는 점에 위치하고 있다. 크기  $dx$ 와  $dy$ 의 작은 미분 면적소를 선택한다. 이 면적소로부터  $P$ 점에 주어지는 조도는 식 (5)에서부터 다음과 같이 유도된다.

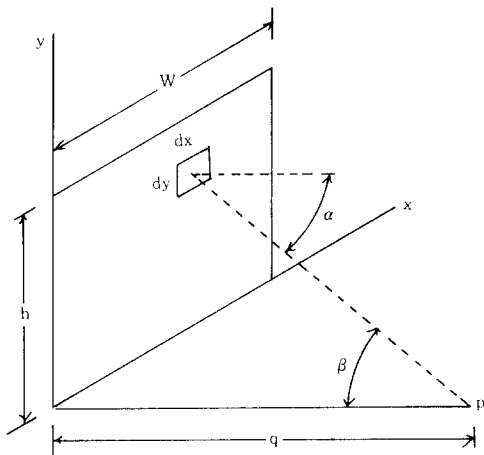


그림 4. 사각형광원

$$dE = \frac{L q^2 dx dy}{(q^2 + x^2 + y^2)^2} \quad (24)$$

식 (24)에는 두 개의 변수가 있는데 이 점이 이전의  $dE$  표현에서는 단 하나의 변수만이 존재하였던 것과 다른 점이다. 그러므로  $E$ 를 계산하기 위하여 적분을 두 번 행하여야 한다. 결과는 다음 식과 같다.

$$E_1 = \frac{L}{2} \left( \frac{h}{\sqrt{h^2 + q^2}} \tan^{-1} \frac{w}{\sqrt{h^2 + q^2}} + \frac{w}{\sqrt{w^2 + q^2}} \right)$$

$$\tan^{-1} \frac{h}{\sqrt{w^2 + q^2}} \quad (25)$$

여기에서 부호  $\parallel$ 는 광원평면에 평행한 평면상의 조도를 나타낸다.

창문을 통하여 들어오는 주광에 의한 조도를 계산하는 경우, 그림 4를 변경시켜 점  $P$ 가 있는 대상 평면을 수직 대신 수평으로 하는데, 이유는 창문이 수직이고 작업면은 책상 위, 테이블과 같은 수평면 조도가 중요하기 때문이다. 식 (24)를 변형하면 다음과 같이 된다.

$$dE = \frac{L q dy dx dy}{(q^2 + x^2 + y^2)^2} \quad (26)$$

이것을 적분하면 다음 식이 된다.

$$E_{\perp} = \frac{L}{2} \left( \tan^{-1} \frac{w}{\sqrt{q}} - \frac{q}{\sqrt{h^2 + q^2}} \tan^{-1} \frac{w}{\sqrt{h^2 + q^2}} \right) \quad (27)$$

여기에서 기호  $\perp$ 는 점  $P$ 의 평면이 광원 평면에 수직인 것을 나타낸다.

### 4. 상호반사에 의한 조도의 증가

앞 절까지에서는 임의의 형체와 크기를 같은 광원에 의한 직사조도를 계산하는 방법을 설명하였다. 이러한 것은 조도를 증가시키는 반사면이 없다고 가정한 것으로, 도로나 운동장을 조명할 경우에 적합하다. 그러나 실내조명에서는 광원으로부터의 빛 이외에 천장, 벽, 바닥, 가구, 기기, 기구 등으로부터의 반사광이 있으며, 실내의 어떤 점의 조도는 광원으로부터의 직사조도 이외에 반사에 의한 확산조도가 추가된다. 본 절에서는 확산조도를 일으키는 상호반사에 대하여 설명한다.

천장, 벽, 바닥 등의 면 사이에 반사가 반복되는 것을 상호반사라 한다. 상호반사의 결과로서 조도가 직사조도만의 경우보다 증가한다. 이 계산은 복잡하며 미분방정식을 풀어야 하나, 본 절에서는 간단한 평행평면의 상호반사의 경우에 대하여 설명한다.

그림 5에서 천장  $C$ 와 바닥  $F$ 가 평행하며, 또한 무한히 넓다고 가정하고, 바닥에 직사조도  $E$

[lx]를 줄 경우, 상호반사에 의한 바닥 및 천장의 조도를 계산한다.

바닥의 반사율을  $\rho_b$ , 천장의 반사율을  $\rho_c$ 라 하면, 직사조도  $E$ [lx]에 의하여 바닥의 광속발산도는  $E\rho_b$ [lm/m<sup>2</sup>]로 된다. 바닥도 천장도 무한이므로 바닥으로부터 반사된 광속은 전부 천장에 부딪히므로 천장의 조도는 바닥의 광속발산도와 같은 값이며  $E\rho_b$ [lx]로 된다. 이것이 천장의 광속발산도  $E\rho_b\rho_c$ [lm/m<sup>2</sup>]를 일으키고, 바닥에 조도  $E\rho_b\rho_c$ [lx]가 생긴다. 이와 같이 반사가 반복되어 천장 및 바닥에 축차적으로 생기는 조도는 그림 5와 같이 된다. 최종 조도는 이들의 총합으로 다음 식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \text{바닥의 조도 } E_b &= E + E\rho_b\rho_c + E(\rho_b\rho_c)^2 + \dots \\ &= E\{1 + \rho_b\rho_c + (\rho_b\rho_c)^2 + \dots\} \\ &= \frac{E}{1 - \rho_b\rho_c} \text{ [lx]} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{천장의 조도 } E_c &= E\rho_b + E\rho_b^2\rho_c + E\rho_b^3\rho_c^2 + \dots \\ &= \frac{E\rho_b}{1 - \rho_b\rho_c} \text{ [lx]} \end{aligned} \quad (29)$$

반사율  $\rho_b, \rho_c$ 는 1에 가까운 경우에는 직사조도  $E$ 에 비하여  $E_b$ 가 대단히 증가한다. 이와 같은 결과를 에너지보존의 법칙으로부터 구할 수 있다.

천장 및 바닥의 면적을  $S$ [m<sup>2</sup>]라 놓으면, 바닥에 입사한 광속은  $F1 = ES$ [lm]이다. 바닥의 최종 조도를  $E_b$ [lx]라 하면, 그의 광속발산도는  $E_b\rho_b$ [lm/m<sup>2</sup>]이며, 이것에 의하여 천장에 생기는 조도를  $E_c$ 라 하면

$$E_c = E_b\rho_b \text{ [lx]} \quad (30)$$

로 된다. 바닥에서 흡수된 광속은  $E_b(1 - \rho_b)S$ [lm], 천장에서 흡수된 광속은  $E_c(1 - \rho_c)S$ [lm]이며, 에너지보존의 법칙에 의하여 그의 합은  $F1$ 과 같아야 하므로 다음 식을 얻는다.

$$E = E_c(1 - \rho_c) + E_b(1 - \rho_b) \text{ [lx]} \quad (31)$$

식 (30)과 (31)을 대입하면

$$E = E_b\rho_b(1 - \rho_c) + E_b(1 - \rho_b) = E_b(1 - \rho_b\rho_c) \text{ [lx]} \quad (32)$$

로 되며, 앞에서와 같은 결과를 얻을 수 있다.

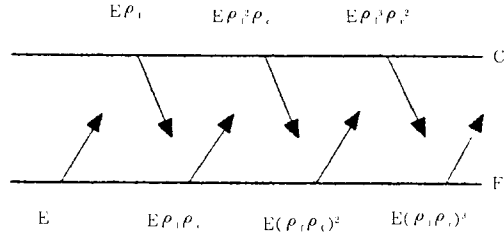
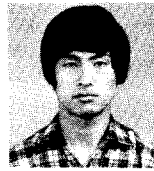


그림 5. 천장과 바닥의 상호반사

### ◇ 著 者 紹 介 ◇



이진우(李鎮雨)

1961年 2月 4日生. 1984年 서울대  
工大 電氣工學科 卒. 1986年 서울대  
大學院 電氣工學科 卒(碩士). 1990  
年 서울대 大學院 電氣工學科 卒(博  
士). 세명백트론(株) 研究室長 勤務. 現在 湖西大 工  
大 電氣工學科 助教授. 當學會 理事.