

정규화 소인수분해를 이용한 탐색기 주사루프의 2자유도 H_∞ 제어

이 호 평*

Two-Degree-of-Freedom H_∞ Control of a Seeker Scan Loop Using Normalized Coprime Factorization

Ho-Pyeong Lee*

ABSTRACT

A two-degree-of-freedom (TDF) H_∞ controller for a seeker scan loop is presented for the purpose of improving scanning performances. The perturbed plant model is characterized via the normalized coprime factorization. The TDF H_∞ controller is designed based on the loop shaping design procedure and model matching approach, and its performances are evaluated and compared with those of a previous work. It is demonstrated that the proposed TDF H_∞ controller is more effective to the control of the seeker scan loop than the previous controller.

Key Words: Seeker Scan Loop(탐색기 주사루프), Two-Degree-of-Freedom H_∞ Controller (2자유도 H_∞ 제어기), LSDP(루프형성설계과정)

1. 서 론

자전 안정화된 자이로 (Spin-stabilized gyroscope) 를 구동하여 표적을 주사하는 탐색기 주사루프는 전형적인 2입력 2출력계로서 유도탄의 비행중 표적 포착 확률과 밀접한 연관이 있고, 표적 포착 확률을 높이기 위해서는 주사루프의 보다 우수한 제어 성능이 요구되고 있다. 특히 주사성능 향상을 위해 표적주사시 사용되는 주사주파수인 7-15 rad/sec 에서 최소 및 최대 특이값 특성이 좋아야 하고, 출력간의 커플링을 최소화 할 수 있는 강인

한 다변수 제어기법이 요구되고 있다. 또한 탐색기 주사루프는 정확히 수학적으로 모델링하기가 어렵고, 플랜트의 파라메터가 불확실하기 때문에 설계단계에서 고려할 수 없는 상당한 불확실성이 있다고 볼 수 있다. 이를 위해 이미 탐색기의 주사루프에 LQG/LTR방법과 루프형성설계과정(Loop Shaping Design Procedure, LSDP)을 이용한 H_∞ 제어 등을 적용하여 주사성능을 향상시킨 바 있다.^{(1),(2)} 그러나 상기 연구결과들은 기준입력과 플랜트 출력과의 차이만을 제어입력으로 갖는 1자유도 제어구조를 가지고 있으며, 일반적으로 이러한 1자유도 제어시스

* 국방과학연구소

전류량(A), 자이로의 피치방향의 각(deg), 위치검출기의 피치방향 출력(V), 복조기의 피치방향 출력(V), 복조기의 피치방향 출력의 미분값(V/s), 요방향의 선회토크에 비례하는 전류량(A), 자이로의 요방향의 각(deg), 위치검출기의 요방향 출력(V), 복조기의 요방향 출력(V), 복조기의 요방향 출력의 미분값 (V/s)이고, 제어입력은

$$u(t) = [u_\theta \ u_\varphi]^T \text{ 이고, 출력은 } y(t) = [\theta_p \ \varphi_y]^T \text{ 이다.}$$

성능 요구규격중의 하나는 각각의 제어 채널에서 계단 입력에 대해 정상상태 오차가 0이 되도록 하는 것이며, 또 다른 성능 요구규격은 저주파수에서 외란제거성능과 우수한 명령추종성능이다. 상기 성능 요구규격은 감도 전달함수행렬, $S(j\omega)$ 를 설정된 주파수 영역에서 다음과 같은 구속조건식으로 표현할 수 있다.

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] < -20 \text{ dB} \quad \forall \omega < 1 \text{ rad/sec} \quad (3)$$

강인성 요구규격은 고주파수에서의 센서잡음과 모델링 오차에 대한 강인성을 보장하는 것으로서 페루프 전달함수행렬, $T(j\omega)$ 가 설정된 주파수 영역에서 다음과 같은 구속조건을 만족해야 한다.

$$\bar{\sigma}[T(j\omega)] < -20 \text{ dB} \quad \forall \omega > 90 \text{ rad/sec} \quad (4)$$

그 외 주사 정밀도 규격으로서 요구되는 각속도를 고려하면 시스템 대역폭이 15 rad/sec 이상 되어야 하고, 10 deg/sec 의 속도로 원형주사시 주사 정밀도 10% 이내, 지향각도(Look Angle) 10 deg 에서의 위치정밀도 1 deg 미만, 출력간에 상호 커플링이 적어야 하며 적당한 시스템 감쇠비를 가져야 한다. 시간영역에서의 규격으로서 오버슈트는 10% 이내이고, 제어입력의 최대 크기는 2.8V 이하가 되어야 한다.

2.2 정규화 소인수분해를 이용한 강인 안정도

공칭플랜트 G 를 정규화된 좌소인수분해로 나타내면 $G = M^{-1}N$ 이며, M, N 은 $M\tilde{M} + N\tilde{N} = I$ 을 만족하는 서로 소이며, M, N 은 다음과 같이 표현된다.

$$[N \ M] = \begin{bmatrix} A + HC & B + HD & H \\ R^{-1/2}C & R^{-1/2}D & R^{-1/2} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서 $H := (BD^T + ZC^T)R^{-1}$, $R := I + DD^T$ 이다. 이 때 $Z \geq 0$ 은 아래와 같은 필터대수리카티방정식의 유일 해이다.

$$(A - BS^{-1}D^TC)Z + Z(A - BS^{-1}D^TC)^T - ZC^TR^{-1}CZ + BS^{-1}B^T = 0 \quad (6)$$

$$S := I + D^TD \quad (7)$$

한편 좌소인수분해에 의한 섭동모델은 $\|\Delta_M \Delta_N\|_\infty < \gamma^{-1}$ 을 만족하는 조건하에서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G_p = (M - \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N) \quad (8)$$

여기서 Δ_M, Δ_N 은 섭동모델을 Fig2에서와 같이 좌소인수분해로 표현했을 때의 모델 불확실성이며, 각각 공칭 플랜트의 분모와 분자의 섭동량을 나타낸다. 이 때에 페루프 시스템의 내적 강인 안정도를 최대화하기 위해서는 아래의 γ 값을 최소로 하는 피이드백제어기 K 를 구해야 한다.^{(5),(6)}

$$F_\gamma(P, K) = \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (9)$$

여기서 최적의 γ_{opt} 값은 좌소인수분해 모델의 Hankel norm을 사용하여 구할 수 있는데, 다음의 제어대수 리카티방정식의 유일 해를 이용하여 식 (11)과 같이 구할 수 있다

$$(A - BS^{-1}D^TC)X + X(A - BS^{-1}D^TC) - XBS^{-1}B^TX - C^TR^{-1}C = 0 \quad (10)$$

$$\gamma_{opt} = (1 + \lambda_{\max}(XZ))^{1/2} \quad (11)$$

본 연구에서는 전 보상기 F_1 과 후 보상기 F_2 를 이용하여 루우프 형성을 하고 정규화된 소인수분해에 의한 모델 섭동을 고려한 2자유도 H_∞ 제어 방법을 제안할 것이므로, 위에서 언급된 공칭 플랜트는 원래의 공칭 플랜트 G_n 가 아닌 루우프 형성된 플랜트, 즉 $G = F_1 G_n F_2$ 를 나타낸다.

2.3 모델매칭을 이용한 강인 성능 문제

Fig. 2는 본 연구에서 고려하는 2자유도 제어구조로서 기존의 2자유도 제어 구조를 보다 일반화시킨 구조이며 실제로 더 양호한 명령추종성능을 제공한다고 알려져 있으며, $2\frac{1}{2}$ 자유도 제어 구조라고도 불린다.⁽⁷⁾ Fig. 2와 같

은 제어 구조에 대해 모델매칭의 관점에서 섭동 페루프 시스템의 강인 성능을 보장하기 위한 문제는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\| (I - G_p(-K_1 + K_2))^{-1} G_p K_1 - M_0 \|_{\infty} \leq \gamma \quad (12)$$

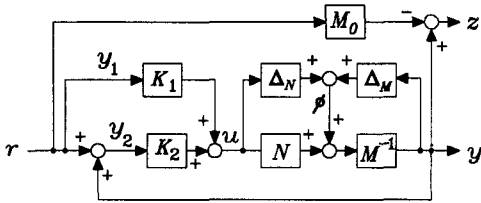


Fig. 2 Two-degree-of-freedom H_{∞} control structure

여기서 M_0 는 바람직한 페루프 모델이고, G_p 는 섭동 모델로서 가정하는 방법에 따라서 여러 가지 최적화 해를 구할 수 있다. 여기서는 정규화된 좌소인수분해에 의한 섭동모델식 (8)를 사용하여 해를 구한다. 식(8)과 식(12)를 이용하여 다음과 같은 Φ 를 고려하고 역행렬 보조정리를 이용하여 선형분수변환(Linear Fractional Transformation)을 하면

$$\Phi = (I - (M - \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)(-K_1 + K_2))(M - \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)K_1 - M_0 = F_l \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_M & \Delta_N \end{bmatrix} \quad (13)$$

이 되고, P_{11} , P_{12} , P_{21} 및 P_{22} 는 다음과 같다.

$$P_{11} = (I - GK_2)^{-1}G(K_1 + K_2) - M_0, \quad P_{12} = (I - GK_2)^{-1}M^{-1} \\ P_{21} = \begin{bmatrix} G(I - K_2G)^{-1}(K_1 + K_2) \\ (I - K_2G)^{-1}(K_1 + K_2) \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} (I - GK_2)^{-1}M^{-1} \\ K_2(I - GK_2)^{-1}M^{-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Fedheffer⁽⁸⁾에 의하면 식(13)에서 $\left\| \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq \gamma$

이고 $\| \Delta_M \ \Delta_N \|_{\infty} \leq \gamma^{-1}$ 이면 $\| \Phi \|_{\infty} \leq 1$ 이다. 따라서 $\| P_{22} \| \leq \gamma$ 이면 소이득정리 (Small Gain Theorem)에 의하여 $\| \Delta_M \ \Delta_N \|_{\infty} \leq \gamma^{-1}$ 인 모든 섭동에 대하여 페루프 시스템은 안정하며 모델매칭관점에서의 강인 성능을 만족한다. 왜냐하면 P_{22} 는 강인 안정도와 관련이 있기 때문에 $\| P_{22} \| \leq \gamma$ 을 만족하면 식(9)에 의하여 $\| \Delta_M \ \Delta_N \|_{\infty} \leq \gamma^{-1}$ 을 만족하는 정규화된 소인수형태의

모든 섭동에 대하여 안정함을 나타낸다. 모델매칭을 이용한 강인성문제는 위와 같이 일반화된 표준형 H_{∞} 문제로 변환할 수 있으며 DGKF 알고리즘⁽⁹⁾을 이용하여 제어기를 설계할 수 있다. 이 방법은 상태공간식으로 표현되는 일반화 플랜트에 대해 2개의 리카티방정식을 풀어서 준 최적제어기를 제공한다. 식(14)를 이용하여 제어기를 설계하는데에는 2가지 방법이 있다. 첫째는 Limebeer⁽¹⁰⁾의 보조정리를 이용하여 식(14)의 첫 번째 열과 두 번째 열을 각각 독립적으로 만족시키는 2자유도 H_{∞} 제어기를 설계하는 것이다. 반면에 한번의 설계단계에서 K_1 과 K_2 를 동시에 설계할 수도 있다. 전자의 방법에 의한 제어기의 차수가 후자의 방법에 의한 제어기보다 높으나 성능은 다소 우수한 것으로 알려져 있으며, 후자의 방법은 비교적 설계하기 용이하고 저차의 제어기를 제공하므로 본 논문에서는 후자의 방법으로 제어기를 설계할 것이다.

3. 2자유도 H_{∞} 제어기 설계

3.1 모델매칭을 이용한 2자유도 강인 제어 문제

Fig. 3은 전 절에서 논의된 강인 안정도와 강인 성능을 고려하여 2자유도 H_{∞} 제어기 설계를 위한 강인 제어 문제를 나타내고 있다. 그림에서 r 은 기준입력이고, $z_i (i = 1, 2, 3)$ 는 최소화하기를 원하는 출력이다. u 는 제어입력이고, $y = [y_1^T \ y_2^T]^T$ 는 측정 가능한 플랜트 출력으로 제어기의 입력을 나타내고 있다. M_0 은 바람직한 페루프모델을 나타내며 시간영역에서의 규격 즉 상승시간, 정착시간 및 오버슈트등을 고려하여 선정한다.

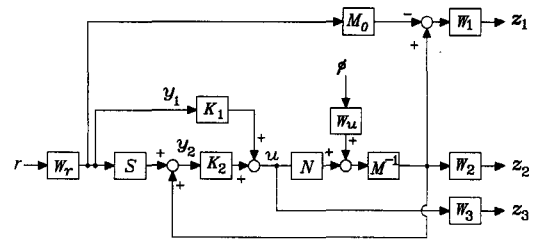


Fig. 3 Two-degree-of-freedom H_{∞} controller design configuration

$W_i (i = 1, 2, 3)$ 는 출력변수 $z_i (i = 1, 2, 3)$ 들에 대한 가중함수들이며, 이들 가중함수들사이에는 서로 상호보완 (Trade-off)의 관계가 있다. 설계된 제어계의 성능은 적절한 가중함수를 선택하는데에 달려있으며, 상당한 설계

경험과 설계 플랜트에 대한 자세한 정보를 필요로 하고 있다. 가중함수들은 모두 대각행렬로 선정하며, 또한 모든 가중함수는 제어기의 차수를 결정하므로 가능하면 저차의 최소위상인 전달함수로 선택하는 것이 좋다. 그림으로 부터 일반화플랜트는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1 M_0 W_r & W_1 M^{-1} W_u & W_1 G \\ 0 & W_2 M^{-1} W_u & W_2 G \\ 0 & 0 & W_3 \\ W_r & 0 & 0 \\ S W_r & M^{-1} W_u & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \phi \\ u \end{bmatrix} \quad (15)$$

식(15)에서 S 는 제어기의 구조를 구분하는 계수로서 $S=0$ 이면 기존의 2자유도 구조이고 $S=I$ 이면 본 연구에서 고려하는 $\frac{1}{2}$ 자유도 제어 구조를 나타낸다. 또한 $S=0$ 이고 $W_1 = W_r = \rho I$, $W_2 = W_3 = W_u = I$ 이면 Limebeer⁽¹⁰⁾의 2자유도 제어문제와 동일하다. 식(15)를 DGKF 알고리즘에 적용하면 2자유도 H_∞ 제어기를 설계할 수 있다.

3.2 2자유도 H_∞ 제어기 설계

주사루프는 고유값 0 을 이미 포함하고 있으므로, 임의의 일정한 입력에 대하여 0-정상상태오차를 만족시키기 위하여 자유적분요소를 첨가시킬 필요는 없다. 주사루프의 개루프모델은 저주파수에서 특이값들이 비교적 잘 일치하고 있으므로, 주사성능을 향상시키기 위해 대역폭을 증가시키고 고주파수영역에서의 센서잡음제거능력을 향상시키기 위해 후 보상기는 $F_2 = I_{2 \times 2}$ 로 선정하고, 전 보상기를 다음과 같이 결정한다.

$$F_1 = \frac{s + 20000}{100s + 2000} I_{2 \times 2} \quad (16)$$

루우프 형성된 플랜트 $G = F_1 G_n F_2$ 을 이용하면 식(10)과 식(11)로부터 $\gamma_{opt} = 2.7088$ 로 구해진다. 이 값은 매우 적절한 값으로 루우프 형성이 매우 만족스럽게 이루어졌음을 나타내고 있다. 또한 바람직한 페루프모델은 오버슈트 및 정착시간등 시간영역에서의 설계규격을 고려하여 $\omega_n = 18 \text{ rad/sec}$, $\zeta = 0.8$ 를 선택하면 다음과 같은 2차모델로 선정할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} I_{2 \times 2} \\ &= \frac{324}{s^2 + 28.8s + 324} I_{2 \times 2} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $I_{2 \times 2}$ 는 2X2 단위행렬을 나타내며, 또한 주파수영역에서의 설계규격을 고려하여 다음과 같은 가중함수를 선택한다.

$$W_1 = \left[\frac{s + 20}{s + 0.001} \right] I_{2 \times 2} \quad (18)$$

$$W_2 = 0.1 I_{2 \times 2} \quad (19)$$

$$W_3 = \left[\frac{50s + 5}{s + 1000} \right] I_{2 \times 2} \quad (20)$$

$$W_r = I_{2 \times 2} \quad (21)$$

$$W_u = 0.01 I_{2 \times 2} \quad (22)$$

이상의 가중함수를 포함한 일반화 플랜트에 대해서 γ_{min} 은 DGKF 알고리즘을 이용하여 $\gamma_{min} = 1.8262$ 로 구해졌다. 일반적으로 γ_{min} 보다 약간 큰 γ 에 대한 제어기가 가격함수의 H_2 놈을 더 작게 만들기 때문에 제어성능이 더 좋다고 알려져 있다. 따라서 $\gamma = 1.9$ 에 대한 준최적 제어기를 최종적인 2자유도 H_∞ 제어기, K 로 선정한다.

4. 성능 분석

본 절에서는 설계된 2자유도 H_∞ 제어기의 성능을 기존의 1자유도(One-Degree-of-Freedom, ODF) LSDP제어기의 성능과 비교 검토함으로써 제한한 설계방법의 유용성을 확인하고자 한다. 편의상 그림에서 기존의 1자유도 LSDP제어기는 ODF LSDP 그리고 본 논문에서 설계된 2자유도 H_∞ 제어기는 TDF LSDP라고 표현한다.

4.1 주파수 및 시간 응답 특성

Fig. 4는 감도 전달함수행렬의 특이값선도로서 설계된 2자유도 H_∞ 제어기와 기존의 1자유도 LSDP제어기의 외란제거성능은 비교적 설계사양을 만족하고 있으며, 2자유도 H_∞ 제어기가 훨씬 우수한 외란제거성능을 가지고 있음을 알 수 있다. Fig. 5는 페루프 전달함수행렬의 특이값선도이며 두 제어기에 의한 페루프시스템의 특이값의 크기가 $\omega = 0$ 근처에서 1이므로 정상상태오차가 0이

고 저주파수영역에서 명령추종성능은 비슷하나, 표적 주사 주파수 부근에서는 2자유도 H_{∞} 제어기가 보다 우수하다

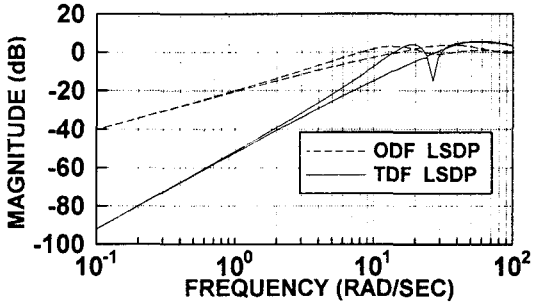


Fig. 4 Singular value plot of sensitivity transfer function matrix

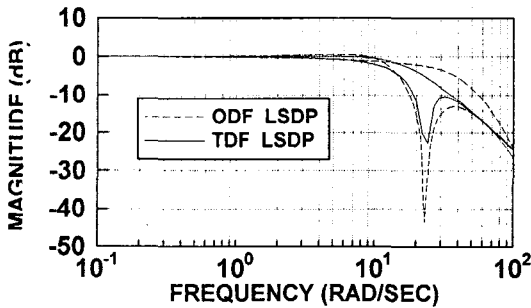


Fig. 5 Singular value plot of closed-loop transfer function matrix

Fig. 6은 $[1, 0]^T$ 계단입력에 대한 플랜트 출력과 제어 입력을 모델에 의한 출력과 함께 보여 주고 있다. 그림으로부터 1자유도 LSDP제어기에 의한 출력간의 최대 커플링은 17% 이나, 2자유도 H_{∞} 제어기에 의한 출력간의 최대 커플링은 10%로서 상당히 감소되었음을 알 수 있다 이것은 완전히 비연성된 바람직한 페루프모델을 설계에 고려했기 때문이다. 또한 2자유도 H_{∞} 제어기가 오버슈트가 작고 더 짧은 정착시간을 보여준다. Fig. 7은 $[1, 1]^T$ 계단입력에 대한 플랜트 출력과 제어입력을 나타내고 있으며, 2자유도 H_{∞} 제어기가 1자유도 LSDP제어기보다 오버슈트가 작고 성능이 우수하며 제어입력의 크기도 만족스러움을 알 수 있다.

4.2 주사 성능

주사파형을 설계할 때는 탐색기의 순간시계와 총 주사

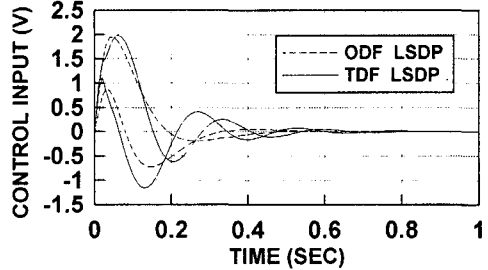
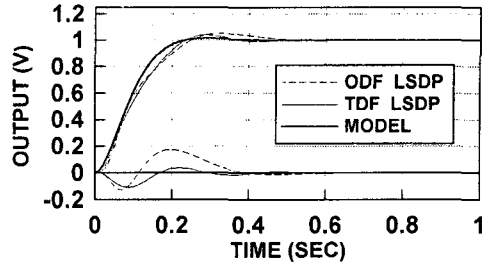


Fig. 6 Plant outputs and control inputs to $[1, 0]^T$ Step Input

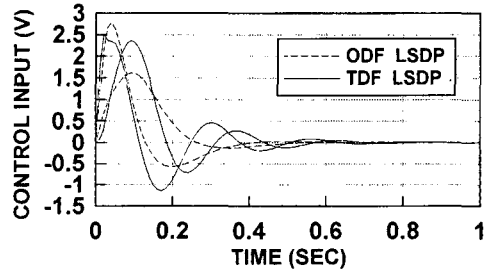
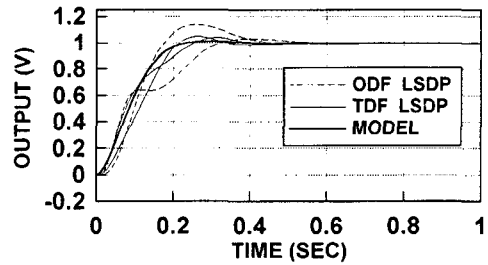


Fig. 7 Plant outputs and control inputs to $[1, 1]^T$ Step Input

영역을 고려하여 설계하여야 한다. 본 논문에서는 순간시계는 $f = 1.3 \text{ deg}$, 주사속도는 20 deg/sec , 총 주사영역은 5 deg 로 가정하여 주사 성능을 검토한다. Fig. 8 - Fig. 10은 각각 2자유도 H_{∞} 제어기와 1자유도 LSDP제어기를 이용한 원형, 나선형 및 장미꽃형 주사파형에 대한 시뮬레이션결과를 비교한 그림이며 모든 주사파형에서 정상상태 응답특성 및 주사정밀도 측면에서 2자유도 H_{∞} 제어기가 1자유도 LSDP제어기보다 더 우수함을 알

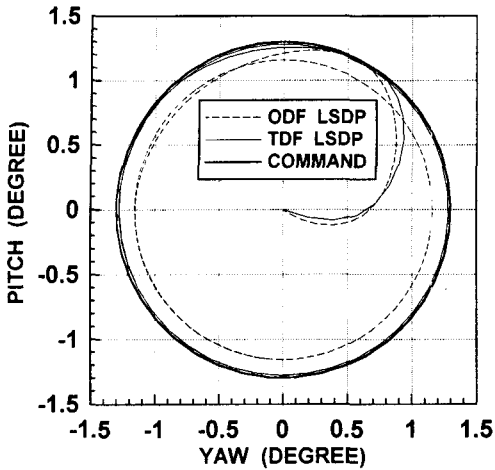


Fig. 8 Responses to conical scan pattern

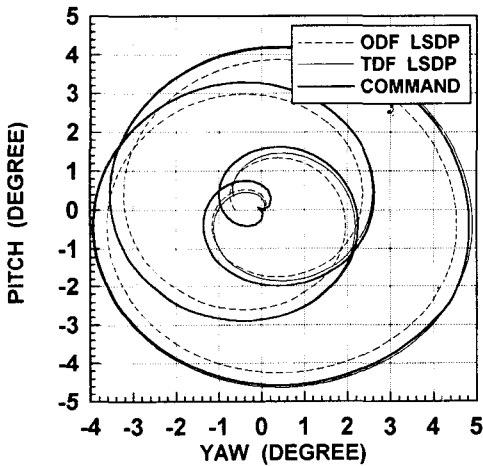


Fig. 9 Responses to spiral scan pattern

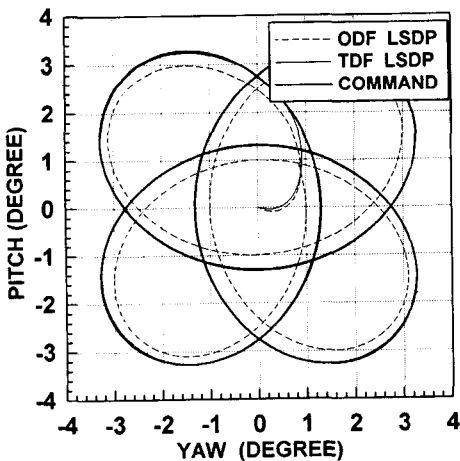


Fig. 10 Responses to rosette scan pattern

수 있다. 따라서 2자유도 H_{∞} 제어가 1자유도 LSDP 제어기보다 더 좋은 표적 포착확률을 제공할 것으로 예측된다.

5. 결 론

정규화 소인수분해와 모델매칭을 이용하여 강인 안정도와 강인 성능을 동시에 고려할 수 있는 2자유도 H_{∞} 제어기 설계방법이 제안되었다. 제안된 방법은 주파수영역에서의 설계규격만 고려하는 표준 H_{∞} 제어방법과 비교하여 시간영역에서의 설계규격을 고려할 수 있도록 바람직한 페루프모델을 도입하였다. 탐색기 주사루프에 적용하여 2자유도 H_{∞} 제어를 설계하여 성능을 분석한 결과 설계된 2자유도 H_{∞} 제어기는 기존의 1자유도 LSDP 제어기와 비교하여 과도응답 및 주파수성능이 개선되어 주사성능이 매우 향상되었다. 그러나 다른 H_{∞} 제어기 설계방법에서와 마찬가지로 설계된 2자유도 H_{∞} 제어기의 차수는 매우 높지만, 모델 차수의 축소에 대한 많은 유용한 연구 결과가 보고되고 있어서 큰 문제가 없을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

1. 황 흥연, 이 호평, "탐색기의 주사루프 모델링과 LQG/LTR보상기 설계", 대한기계학회 논문집, 제 17권, 제11호, pp. 2730-2741, 1993.
2. 이호평, 송창섭, "LSDP를 이용한 탐색기 주사루프의 H_{∞} 제어", 한국정밀공학회지, 제12 권, 제1호, pp. 78-86, 1995.
3. Freudenberg, J. S., and Looze, D. P., "Right Half Plane Poles and Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 30, pp. 555-565, 1985.
4. Pernebo, L., "An Algebraic Theory for the Design of Controllers for Linear Multivariable Systems - Part II: Feedback Realizations and Feedback Design", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 26, pp. 183-194, 1981.
5. McFarlane, D. and Glover, K., "A Loop Shaping Design Procedure Using H_{∞} Synthesis", IEEE Trans. on AC, Vol. 37, No.6,

- pp.759-769, 1992.
6. McFarlane, D. and Glover, K., Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description. Springer-Verlag, 1990.
 7. Grimble, M. J., Robust Industrial Control, Prentice Hall, 1994.
 8. Redheffer, R. M., "On a certain linear fractional transformation", J. Maths. Phy., Vol. 39, pp 269-286, 1960.
 9. Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A., "State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems", IEEE Trans. on AC, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847, 1989.
 10. Limebeer, D. J. N., Kasenally, E. M., and Perkins, J. D. "On the Design of Robust Two Degree of Freedom Controllers" Automatica, Vol. 29, No. 1, pp. 157-168, 1993.