

## 주파수 영역 민감도 방법을 이용한 집중 질량 구조물의 응답 해석

백문열\*, 기창두\*\*

### Analysis of Response of Lumped Mass System Using Sensitivity Method in Frequency Domain

Baek, Moon-Yeol\*, Kee, Chang-Doo\*\*

#### ABSTRACT

The aim of this paper is to present some results of sensitivity analysis in frequency domain. The sensitivity functions in frequency domain is not depend on the external excitation but depend on the frequency of the system's resonance. The sensitivity functions are determined as function of partial derivatives of system transfer functions taken with respect to system design parameters. The logarithmic sensitivity function is the dimensionless sensitivity function available, making it useful to compare the influence of various parameters on system variables. Two degree of freedom system is used to illustrate the procedure for sensitivity analysis proposed in this paper.

**Key Words:** frequency domain(주파수 영역), lumped mass system(집중질량계), partial derivative(편도함수), sensitivity(민감도), sensitivity analysis(민감도해석), transient response(천이응답), vibration(진동), vibration analysis(진동해석), vibration amplitude(진동진폭).

#### 1. 서론

민감도 함수 기법은 근래에 들어 여러 분야에 활발하게 응용되고 있는 해석 기법이다. 민감도 해석 기법은 대상 시스템의 종류와 관계 없이 관심 영역에 따라서 크게 시간 영역 해석과 주파수 영역 해석으로 구분하여 생각할 수 있다. 여러 응용 예에서 민감도 함수 기법은 주로 시간 영역에서 구조물의 동적 또는 정적 응답 해석<sup>2,6)</sup>에 적용되어 왔다. 종래의 민감도 해석법에 대한 연구는 구조물

의 시간 영역의 응답에 대한 해석이 주류를 이루어 왔으나 최근 들어 주파수 영역의 중요성이 부각되면서 이에 대한 연구 또한 폭 넓게 진행되고 있다.

시간 영역 민감도 해석 기법은 외부 가진이 주어질 때 시스템 응답의 시간·영역 변화율에 대한 해석을 의미한다. 가진 즉, 입력의 종류와 크기에 의해서 민감도 함수의 값 역시 변화하게 된다. 따라서, 시간 영역 민감도 함수의 해석은 입력이 한정된 몇 가지 형태로 결정되는 경우에도 입력의 종류에 따라 수 차례 이상의 해석을 수행하여야

\* 정회원, 순천공업전문대학 자동차과

\*\* 정회원, 전남대학교 기계공학과

완전한 시스템의 설계 변수 민감도 해석이 가능하다. 시간 영역 민감도 함수의 단점은 첫째 민감도 값이 입력에 종속되며 둘째 인간의 주관적 감성의 측면에서 보상해줄 가중 함수의 사용이 곤란하다는 점이다. 그러나, 주파수 영역 민감도 함수는 이러한 시간 영역 민감도 해석의 결점을 보완 해준다. 우선, 전달 함수를 구하는 과정에서 실제 입력은 고려하지 않아도 되고, 나아가서 인체의 가중 함수(5)를 사용하여 실제 인간이 느끼는 척도로서 주파수 대역을 고려할 수 있다. Nalecz 등은<sup>(7,8)</sup> 주파수 영역 민감도 기법을 사용하여 차량 동역학 시스템의 주파수 응답 특성에 미치는 시스템 설계 변수의 영향에 대한 연구를 통해 일반적인 동역학 시스템의 주파수 영역 민감도 해석 기법에 대한 이론식을 전개하였다.

국내의 연구로는 박호<sup>(1)</sup>의 자동차의 현가장치의 성능을 해석과 장진회 등이<sup>(4)</sup> 차량의 조향 장치의 요잉(yawing) 특성의 해석 등의 연구가 있다. 일반적으로 시간 영역 민감도 함수의 최대 단점은 위에서 언급한 바와 같이 입력의 종류에 의해 민감도 함수의 형태와 크기가 전적으로 변하는 입력 종속 특성이다.

주파수 영역의 민감도 함수는 시스템의 고유 특성인 전달 함수에 대한 설계 변수의 민감도를 구하는 것이므로 이러한 단점을 피할 수 있다. 또한, 주파수 영역의 민감도 함수는 시스템의 응답에 대한 각종 가중 함수에 의해서 인체에 미치는 직접적인 크기의 응답을 계산할 수 있다는 장점을 갖고 있다. 한편, 주파수 영역의 민감도 함수의 단점은 해석할 수 있는 시스템이 전달 함수를 구할 수 있는 선형 시스템인 경우로 한정된다. 따라서, 비선형 시스템에 대한 주파수 영역 민감도 해석은 선형화 작업이 선행되어야 한다.

한편, 유한 요소 모델과 같은 복합 구조의 대형 시스템에서는 민감도 행렬을 구하기 위해 설계 변수에 대한 편미분을 쉽게 얻을 수 없고 시간 영역과는 달리 실수부와 허수부를 분리하는 것 역시 기술적인 어려움이 따른다. 해석적 방법에 의해 민감도 행렬을 구할 수 있는 경우는 시스템의 자유도와 설계 변수의 수가 적은 극히 간단한 시스템의 경우로 한정된다. 따라서, 이러한 복합 시스템이나 대형 시스템의 주파수 영역 민감도 행렬은 푸리에 변환 등에 의해 수치적 방법으로 계산해야 한다.

본 연구에서는 설계 변수간의 영향력의 크기를 직접적으로 비교하고자 하는 경우에 유용한 대수 민감도 함수를 이용하여 주파수 영역에서의 민감도 해석을 수행하며, 특히 다입력 시스템에서 동일한 출력에 대해서 입력이 상이

한 경우의 민감도 곡선에 대하여 간단한 집중 질량 구조물의 예를 통해 고찰을 하고자 한다.

## 2. 주파수 영역 민감도 해석 이론

$n$ 자유도의 점성 감쇠하는 선형 시스템의 운동 방정식은 다음과 같은 행렬 형태로 쓸 수 있다

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = K. \quad (1)$$

여기서,  $M$ 과  $C$  및  $K$ 는  $n$  차원의 양의 대칭, 정방 행렬로써, 순서대로 관성, 감쇠 및 강성 행렬이고,  $q$ 와  $F$ 는  $n$  차원의 변위와 힘의 열 벡터이다.

$q^*$ 와  $F^*$ 는  $q$ 와  $F$ 의 푸리에 변환이라고 하면, 식 (1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$q^* = Z^{-1}F^*, \quad (2)$$

여기서

$$Z = K - \omega^2 M + j\omega C. \quad (3)$$

이며,  $\omega$ 는 라디안 주파수이고,  $j = (-1)^{\frac{1}{2}}$ 이다.

식 (2)와 식 (3)으로부터  $n$  차원의 정방 전달 행렬 (square transfer matrix)은 다음 식 (4)와 같이 표현할 수 있다.

$$G = Z^{-1}. \quad (4)$$

이제 행렬  $K, M, C$ 의 각 성분이  $r$  차원 설계 변수 벡터  $a$ 로 표현된다고 가정하자.

$$a = [a_1, \dots, a_r]. \quad (5)$$

식 (1)은 설계 변수를 변화시키기 전의 시스템으로써 일반적으로 공칭 시스템(nominal system)이라고 한다. 공칭 시스템 식 (1)의 설계 변수 벡터를  $a_0$ 라고 하면, 실제 설계 변수 벡터는  $a = a_0 + \Delta a$ 로 나타낼 수 있고, 여기서  $\Delta a$ 는 설계 변수의 작은 변화량(perturbation)으로 가정한다.

민감도 행렬은 하나의 설계 변수  $a_s$ 에 대한 전달 행렬  $G$ 의 편미분으로 정의할 수 있다.

$$W_s = \left. \frac{\partial G}{\partial a_s} \right|_{a_0}, \quad s = 1, \dots, r. \quad (6)$$

식 (6)에서 아래 첨자  $a_0$ 는 편미분이 공칭 설계 변수 값에서 계산됨을 나타낸다.

식 (6)의 민감도 행렬  $W_s$ 의 모든 성분은 주파수  $\omega$ 에 대한 복소 함수이다. 이 함수들은 전달 행렬  $G$ 에 의해 특성화되는 시스템의 동적 속성에 미치는 설계 변수 변화의 영향을 기술한다.

$w_{s(k,l)}$ 과  $g_{k,l}$ 을 행렬  $W_s$ 와  $G$ 의  $(k,l)$ 번째 성분이라고 하자. 여기서  $w_{s(k,l)} = \partial g_{k,l} / \partial a_s$  ( $k=1, \dots, n, l=1, \dots, m, s=1, \dots, r$ )이다. 이 성분들은

$$w_{s(k,l)} = \text{Re}\{w_{s(k,l)}\} + j \text{Im}\{w_{s(k,l)}\}, \quad (7)$$

$$g_{k,l} = \text{Re}\{g_{k,l}\} + j \text{Im}\{g_{k,l}\}. \quad (8)$$

실제 문제에 주파수 영역 민감도 해석을 응용하는 경우에는 전달 함수 성분의 실수부와 허수부의 민감도 대신에 진폭-주파수 특성의 민감도를 고려해야 한다. 이 진폭은 일반적으로 진폭-주파수 특성으로 알려져 있다. 바탕이 되는 착상은 민감도 함수의 값이 크면 진폭의 변화 역시 크며, 반대의 경우도 마찬가지다. 따라서 진폭-주파수 특성의 민감도 함수는 기계 시스템의 설계와 수정에 아주 유용한 정보를 내포하고 있다.

진폭-주파수 특성의 민감도 함수는 복소 민감도 함수의 실수부와 일치한다. 이것의 의미는

$$w_{s(k,l)}^{|g_{k,l}|} = \text{Re}\{w_{s(k,l)}\}, \quad (9)$$

이고, 여기서

$$|g_{k,l}| = \sqrt{[\text{Re}\{g_{k,l}\}]^2 + [\text{Im}\{g_{k,l}\}]^2}, \quad (10)$$

$$w_{s(k,l)}^{|g_{k,l}|} = \frac{\partial |g_{k,l}|}{\partial a_s}. \quad (11)$$

식 (11)의 민감도 함수는 양의 값만을 갖는 민감도 곡선을 의미하게 된다. 따라서, 설계 변수의 변화에 따라 시스템의 전달 함수의 변화량을 나타낼 수 있는 새로운 민감도 함수가 필요하게 된다. 이와 같은 목적을 위하여 대수 민감도 함수(logarithmic sensitivity function)를 주파수 영역의 민감도 해석에 사용한다. 대수 민감도 함수는 식 (11)의 양변에 대수를 취하여 다음과 같이 정의된다<sup>(6)</sup>.

$$s_{s(k,l)} = \frac{\partial \ln g_{k,l}}{\partial \ln a_s} = \frac{\partial g_{k,l}}{\partial a_s} \frac{a_s}{g_{k,l}} = w_{s(k,l)} \left( \frac{a_s}{g_{k,l}} \right). \quad (12)$$

식 (12)의 대수 민감도 함수는 식 (11)의 민감도 함수를  $a_s / g_{k,l}$ 로 정규화하여 무차원화 함으로써 전달 함수의 진폭-주파수 특성에 대한 설계 변수의 상대적인 영향력을 보다 용이하게 비교할 수 있는 민감도 함수이다.

### 3. 모의 실험

모의 실험에서 사용할 수학적 모델은 간단한 2 자유도 시스템이며 그림 1에 나타내었다. 1계 상미분 방정식으로 나타낸 시스템의 운동 방정식은 식 (13)과 같다.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 - c_1 \dot{z}_2 + k_1 z_1 - k_1 z_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{z}_2 - c_1 \dot{z}_1 + (c_1 + c_2) \dot{z}_2 - k_1 z_1 + (k_1 + k_2) z_2 &= c_2 \dot{u} + k_2 u. \end{aligned} \quad (13)$$

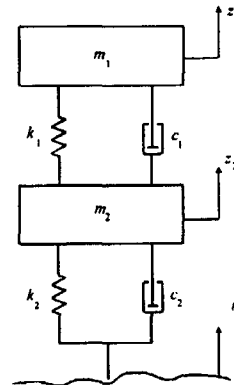


Fig. 1 2 Degrees of Freedom System

주파수 영역의 민감도를 고려하고자 하는 설계 변수의 벡터는 식 (5)와 같은 형태로 나타낼 수 있으며, 본 연구에서는 그림 1의 시스템의 전체 설계 변수 모두에 대한 민감도를 구하고자 하므로, 6개의 설계 변수로 구성된 설계 변수 벡터  $\mathbf{p}$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{p} = \{m_1, m_2, c_1, c_2, k_1, k_2\}. \quad (14)$$

구조물의 진동이 신체에 미치는 영향은 ISO 2631<sup>(5)</sup>에 의해 정의되어 있다. 이 기준에 따라 본 연구의 모의실험은 0에서 30Hz까지의 주파수 영역에 대하여 수행하였으며, 본 연구는 시스템 전달 함수에 대한 민감도 해석을 주목적으로 하고 있으므로 가중 함수에 대해서는 고려하지 않았다. 주파수 영역의 민감도 함수는 시간역 민감도 함

수와는 달리 시스템의 고유 특성인 전달 함수의 민감도 함수를 구하는 것이므로 외부 가진에 독립적이므로 입력의 종류에 구애 받지 않는다. 모의 실험에서는  $m_1$ 의 속도와  $k_2$ 로 전해 지는 노면 입력의 전달 함수(이하  $g_{21}$ )에 대한 설계 변수들의 민감도와  $m_1$ 의 속도와  $c_2$ 로 전해 지는 노면 입력 간의 전달 함수(이하  $g_{22}$ )에 대한 민감도를 구하였다. 동적 구조물의 전달 함수  $g_{21}$ 과  $g_{22}$ 의 진폭-주파수 특성을 각각 그림 2과 3에 나타내었으며, 시스템의 공진 주파수는 스프링 위 질량  $m_1$ 의 경우 약 1.2Hz(이하 1차 공진 주파수)이고 스프링 아래 질량의  $m_2$ 의 공진 주파수는 약 10.1Hz(이하 2차 공진 주파수)이다.

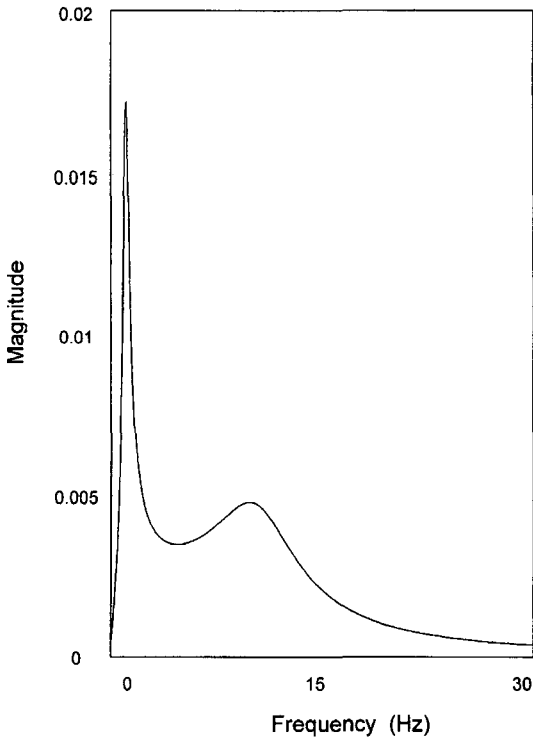


Fig. 2 Transfer Function  $|g_{21}|$

#### 4. 결과 및 고찰

##### 4.1 전달 함수 $g_{21}$ 에 대한 민감도

$g_{21}$ 의 진폭에 대한 설계 변수 벡터  $\mathbf{P}$ 의 각 요소에 대한 대수 민감도는 그림 4와 같다.

설계 변수는  $m_1$ 과  $k_1$ 은 1차 공진 주파수 부근에서

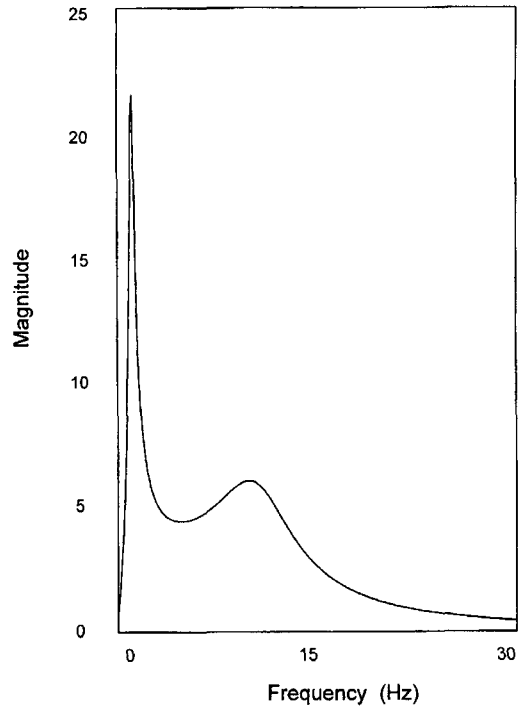


Fig.3 Transfer Function  $|g_{22}|$

가장 큰 양의 민감도 값을 나타내고, 따라서 이 두 설계 변수의 값을 줄이면 1차 공진 주파수 부근에서 전달 함수  $g_{21}$ 의 진폭이 줄어들게 됨을 알 수 있다.

2차 공진 주파수 부근에 영향을 미치는 설계 변수는  $m_1$ 과  $m_2$ 이다. 1차 공진 주파수와 2차 공진 주파수 사이의 영역에서는  $c_1$ 과  $m_1$  그리고  $k_2$ 의 민감도 값이 가장 크다. 여기서  $c_1$ 의 민감도는 양의 값이지만  $m_1$ 과  $k_2$ 의 민감도 값은 음이다. 따라서, 이 영역에서 전달 함수의 진폭을 줄이기 위해서는  $c_1$ 의 값을 줄이거나  $m_1$ 과  $k_2$ 의 값을 늘려야 한다.

특히 주목할만한 민감도 곡선은 설계 변수  $c_2$ 의 경우이다.  $c_2$ 의 민감도는 해석 영역 전체에 걸쳐 약 1이다. 이것은 전달 함수의 진폭을 줄이기 위해서는  $c_2$ 의 값을 줄여서 재설계 하여야 한다는 점이다. 다른 설계 변수,  $m_2$ 의 경우에 값을 줄이면 2차 공진점 이하에서는 전달 함수의 진폭을 줄일 수 있지만 2차 공진점 이후에서는 오히려 전달 함수의 진폭이 커지게 되고, 설계 변수  $m_1$ ,  $c_1$ ,  $k_1$ 의 값에 대한 조정 역시 이러한 상쇄 효과를 갖게 된다. 하지만,  $c_2$ 의 값을 감소시키면 전 영역에 걸

쳐 전달 함수의 진폭 억제하는 효과를 거둘 수 있음을 의미한다.

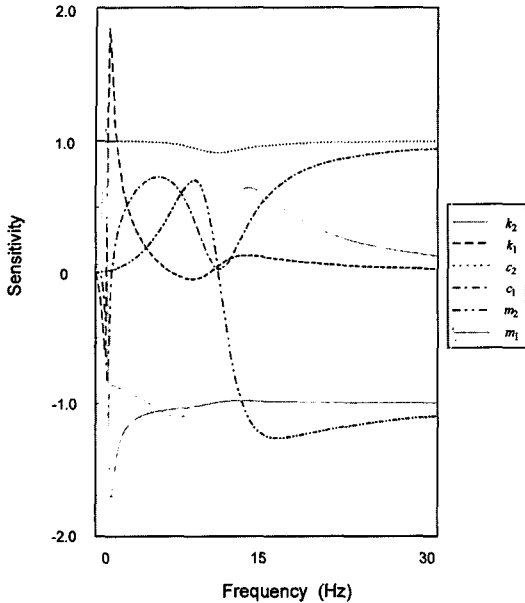


Fig.4 Logarithmic Sensitivity Functions of Parameters for Transfer Function  $|g_{21}|$

#### 4.2 전달 함수 $g_{22}$ 에 대한 민감도

$g_{22}$ 의 진폭에 대한 설계 변수 벡터  $\mathbf{P}$ 의 각 요소에 대한 대수 민감도 곡선은 그림 5와 같다.

전달 함수  $g_{21}$ 의 경우와 같이  $g_{22}$ 의 진동 진폭에 대해서도 설계 변수는  $m_1$ 과  $k_1$ 은 1차 공진 주파수 부근에서 가장 큰 양의 민감도 값을 나타내고, 따라서 1차 공진 주파수 부근에서 전달 함수  $g_{22}$ 의 진동 진폭을 억제하기 위해서는 이 두 설계 변수의 값을 감소시켜 재설계하여야 함을 알 수 있다.

1차 공진 주파수와 2차 공진 주파수 사이의 영역에서는  $c_1$ 과  $m_1$ 의 민감도 값이 가장 크다. 여기서  $c_1$ 의 민감도는 양의 값이지만  $m_1$ 의 민감도 값은 음이다.  $c_1$ 의 값을 감소시키고  $m_1$ 을 증가시키면 전달 함수의 진폭을 감소시킬 수 있다.

2차 공진 주파수 부근에 영향을 미치는 설계 변수는  $m_1$ 과  $m_2$ 이다. 이 진동 진폭을 줄이기 위해서는  $m_1$ 을 증가시키고  $m_2$ 를 감소시켜야 한다. 특히  $m_2$ 를 재설계할 때는 상쇄 효과에 대해 상당한 주의가 필요하다.

이상에서 살펴 본 바와 같이 전달 함수  $g_{21}$ 와  $g_{22}$ 의 민감도 곡선은 설계 변수  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $c_1$  그리고  $k_1$ 의 경우는 거의 일치한다.  $c_2$ 의 민감도는 해석 영역 전체에 걸쳐 약 0이다. 이것은  $c_2$ 가 전달 함수의 진폭에 전혀 영향을 미치지 않는 설계 변수임을 의미한다. 따라서,  $c_2$ 는 주파수 응답을 재설계하기 위한 대상에서 제외된다.  $k_2$ 는 2차 공진점 이전에서는 영향이 거의 미미하지만 이후에는 양의 값이며 상대적으로 큰 민감도를 갖는다. 그러므로,  $k_2$ 의 재설계는 값을 감소시키는 방향으로 이루어져야 할 것임을 알 수 있다.

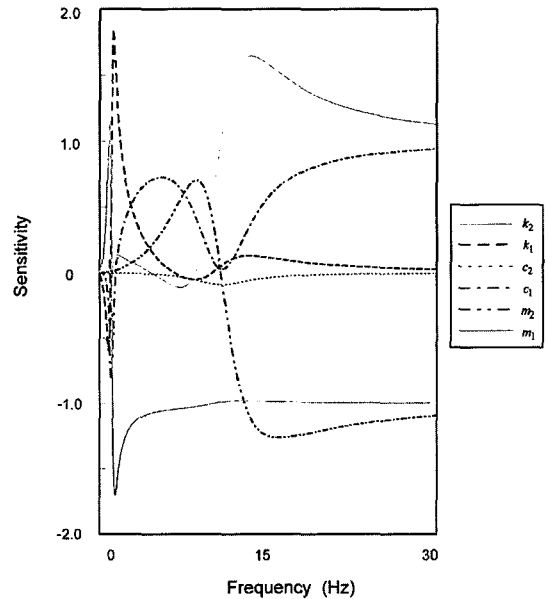


Fig.5 Logarithmic Sensitivity Functions of Parameters for Transfer Function  $|g_{22}|$

#### 4.3 전달 함수 $g_{21}$ 과 $g_{22}$ 에 대한 민감도 함수의 비교

전달 함수  $g_{21}$ 에 대한 민감도와  $g_{22}$ 에 대한 민감도 곡선에서 가장 큰 차이점은 설계 변수  $c_2$ 와  $k_2$ 의 경우이다. 전달 함수  $g_{21}$ 와  $g_{22}$ 는 같은 상태 변수 응답을 다른 입력으로 나눈 값이며,  $c_2$ 와  $k_2$ 는 입력이 직접 전달되는 설계 변수이다. 전달 함수  $g_{21}$ 은 입력이 속도 성분으로 설계 변수  $c_2$ 로 주어지고 전달 함수  $g_{22}$ 는 입력이 변위 성분으로 설계 변수  $k_2$ 로 주어진다. 이러한 차이가 두 전달 함수의 민감도 곡선에 있어서도 차별성을 드

리낸다.

이와 같이 동일한 상태 변수의 응답에 대하여 구한 전달 함수의 민감도가 입력의 종류에 따라 다르게 나타나는 것은 해석 대상 구조물이 다입력/다출력 시스템(multiple input/multiple output system)이기 때문이다. 이러한 다입력/다출력 시스템은 위에서 살펴본 바와 같이 입력이 직접 주어지는 설계 변수의 민감도가 입력에 따라서 전혀 다른 경향을 보일 수 있다. 그러므로, 다중 입력 시스템의 설계 변수를 재설계하기 위해서는 한 상태 변수와 모든 입력 간의 전달 함수에 대한 민감도를 구하고 이를 종합적으로 해석을 하여야 적절한 설계 변수의 영향력을 결정할 수 있다.

### 5. 결 론

본 논문에서는 구조물의 주파수 영역 민감도 해석을 수행하였고 이상의 연구를 통한 결론은 다음과 같다.

1. 입력에 종속되는 시간 영역 민감도에 비해 주파수 영역 민감도 함수는 시스템의 고유 특성인 전달 함수를 편미분하여 민감도 해석이 가능하므로 외부 가진에 독립적인 해석을 할 수 있다.
2. 전달 함수의 진폭 대 주파수 특성을 검토하기 위하여 무차원의 정규화 민감도 함수인 대수 민감도 함수를 이용하는 것이 여러 개의 설계 변수의 민감도를 비교 판단하기에 유용하다. 특히, 대수 민감도 함수는 특정 주파수에서 설계 변수들의 영향력을 평가하는데 대단히 편리하다.
3. 민감도 값에 의해 시스템의 설계 변수를 재설계 하는 과정은 상쇄 효과에 대한 세심한 주의가 필요하다.
4. 해석 대상 구조물이 다입력 시스템일 때에는 같은 상태 변수의 응답에 대해서 구한 전달 함수의 민감도일 지라도 입력의 종류에 따라 민감도 값은 다르게 나타날 수 있으며, 특히 입력이 직접 주어지는 설계 변수의 민감도는 전혀 다른 경향성을 보일 수도 있다. 따라서 다입력 시스템의 설계 변수를 재설계하기 위해서는 한 상태 변수에 주어지는 모든 입력에 대한 민감도를 구하여 종합하여야 올바른 값을 결정할 수 있다.

이상의 결론을 통해 향후 민감도의 상쇄 효과를 정량적으로 합성하여 해석할 수 있는 새로운 민감도 해석 기법과 이를 통한 최적 설계에 관한 연구가 진행되어야 할 것

으로 생각된다.

### 참 고 문 헌

1. 박호, 자동차 현가장치의 성능감도해석 및 능동진동제어에 관한 연구, 한양대학교, 박사학위논문, 1990.
2. Howard M. Adelman and Rahpael T.Haftka, "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems," AIAA Journal, Vol.24, No.5, pp.823~832, 1986.
3. Edward J. Haug and Jasbir S. Arora, Applied Optimal Design, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
4. Jin-Hee Jang and Chang-Soo Han, "The Sensitivity Analysis of Yaw Rate for a Front Wheel Steering Vehicle : In Frequency Doamin," KSME International Journal, Vol.11, No.1, pp.56~66, 1997.
5. International Standard ISO-2631/2, Evaluation of human exposure to Whole-Body Vibration-Part II : Continuous and Shock-Induced Vibration in Buildings(1-80Hz), 1989.
6. Gregory J. Moore, MSC/NASTRAN Design Sensitivity and Optimization-User's Guide(Version 68), The Macneal-Schwendler Corporation, 1994.
7. Andrzej G. Nalecz, "Application of Sensitivity Methods to Analysis and Synthesis of Vehicle Dynamic Systems," Vehicle System Dynamics, Vol.18, pp.1~44, 1989.
8. Andrzej G. Nalecz and Jerzy Wicher, "Design Sensitivity Analysis of Mechanical Systems in the Frequency Domain," Journal of Sound and Vibration, Vol.120, No.(3), pp.517~526, 1988.
9. Singiresu S. Rao, Engineering Optimization - Theory and Practice(3rd Edition), John Wiley & Sons, Inc., 1996.
10. G. V. Reklaitis, A. Ravindran and K. M. Ragsdell, Engineering Optimization - Methods and Application, John Wiley & Sons, Inc., 1983.