

경계요소법에 의한 유한폭 판재내의 대칭 원형함유물과 균열의 상호간섭에 대한 연구

박성완*

A Study for Mutual Interference between Symmetric Circular Inclusion and Crack in Finite Width Plate by Boundary Element Method

Park Sung-Oan*

ABSTRACT

A two-dimensional program for the analysis of bimaterial inclusion has been developed using the boundary element method.

In order to study the effects of circular inclusion on the stress field of the crack tip, numerical analysis was performed for the straight crack of finite length around the symmetric circular inclusion whose modulus of elasticity was different from that of the matrix material.

In the case of inclusion whose stiffness was smaller than that of the matrix material, the stress intensity factor was found to increase as the crack emanated. The stress intensity factor was uninfluenced from the radial change in inclusion and remained constant for the stiffness equivalent to the matrix materials, where as it decreased for the inclusion with larger stiffness.

For the variation in the distance of the inclusion, a small increase in the stress intensity factor was observed for the case with small or equal stiffness compared with the matrix materials. The inclusion with larger stiffness showed a gradual decrease in the stress intensity factor as the crack emanated.

Key Words: Mutual Interference(상호간섭), Symmetric Circular Inclusion(대칭원형함유물), Boundary Element Method(경계요소법), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Rigid Support(강성지지)

1. 서론

파괴역학은 파괴현상을 일으키는 균열선단에서의 응력 확대계수(stress intensity factor: S.I.F)등을 사용하여

연구하는 학문으로 기초적인 이론은 1921년 이미 Griffith⁽¹⁾에 의하여 이루어 졌으며 그후 Griffith의 이론은 Irwin⁽²⁾에 의하여 강제에도 적용할 수 있도록 수정되었다.

* 시립 인천전문대학 기계설계과 정회원

응력확대계수는 물체속의 균열을 다루는 파괴역학의 인자로서 다양한 기하학적 형태와 하중조건에 대한 균열에 대하여 또한 재료에 내재해 있는 균열이나 사용중에 발생, 성장한 균열에 대하여 그 재료의 임계값인 파괴강도(fracture toughness or critical stress intensity factor) 값과 비교함으로써 그때의 하중조건과 내재한 균열길이에서의 안전도를 규명할수 있다^{(3), (4)}.

균열은 재료내부에 존재하고 있는 이물질 내지 결함을 기점으로하여 발생하는 경우가 대부분이며 일반적으로 재료의 강도를 저하시킨다. 그러나 최근에 와서는 오히려 재료의 강도를 높이기 위하여 이물질을 고의적으로 첨가하는 경우도 있다. 예를들면 비행기, 구조물, 액체나 기체를 저장하는 탱크, 최근 건설분야의 신소재로 각광받고 있는 섬유보강 콘크리트, 기타 첨단 반도체재료 등이다.

이와같이 이종재료 함유물의 존재가 재료강도의 향상및 저하에 끼치는 영향이 대단히 크므로 많은 사람들이 관심을 가지고 복합탄성체에 대한 활발한 연구를 하고 있으나 강도평가에 영향을 미치는 인자가 다양하므로 이들 인자의 해석에 많은 어려움이 있다.

기계적 성질이 다른 이종재료 함유물이 포함된 균열거동에 대한 이론해석은 England⁽⁵⁾ 가 원형의 탄성함유물을 포함한 접합경계면 균열에 기계적하중을 작용시킬 경우에 대하여 이론해석을 하였으며 Tamate⁽⁶⁾ 는 2차원 탄성이론을 기초로 Muskhelishvili 복소함수를 사용하여 인장응력이 작용하는 무한평판에 직선균열 주위의 응력장에서 다른 탄성재료의 원형함유물 효과를 해석하였다.

Toya^{(7), (8)} 는 원형의 탄성함유물과 타원형 강체함유물을 포함한 접합경계면 균열에 대한 균열성장조건을 구하였으며 Erdogan^{(9), (10)} 등은 균열과 함유물의 상호작용 문제를 날전위(edge dislocation)이론을 기초로 적분방정식으로 해석하였고 Hsu⁽¹¹⁾ 등은 원형함유물과 동일직선상의 대칭균열에 대해 Muskhelishvili복소함수를 이용하여 해석하였다.

Sheng⁽¹²⁾ 등은 Ergogan등의 적분방정식을 이용하여 무한체내에 원형함유물 주위의 분기균열이 면외전단을 받을때 균열진전 경로를 해석하였으나 응력함수를 결정하는데 많은 수치적인 어려움이 있다. 그러므로 복잡하고 실질적인 상태에 대한 응력확대계수를 구하기 위하여 수치적인 기술이 중요한 역할을 한다. 그러나 이종재료 함유물에 대한 대부분의 연구는 함유물의 형상변화와 동일

직선상의 균열만을 대상으로 하였고 대칭 원형함유물과 직선균열에 대한 연구는 그다지 흔하지 않은 것은 사실이다.

따라서 본 논문은 원형함유물이 균열선단의 응력장에 미치는 영향을 조사하기 위하여 모재와 탄성계수가 다른 대칭 원형함유물 주위에 유한길이의 직선균열이 존재하는 유한체에 대하여 선형탄성이론을 기초로 경계조건적 적용이 용이하면서 고정도의 해석이 가능한 경계요소법(boundary element method)⁽¹³⁾을 적용하고 이종재료 함유물 해석용 2차원 프로그램을 개발하여 유한판에 대한 대칭 원형함유물의 종류및 함유물의 반경변화와 직선균열과 함유물 사이의 거리변화에 따른 응력확대계수를 수치해석 하였으며 유한폭 변화에 대한 역학적 거동을 검토하여 다공체(porous media) 파괴역학 연구에 기초자료를 제공한다.

2. 경계요소법 프로그램

Fig. 1의 흐름도와 같이 경계요소법에 의한 이종재료 함유물 해석용 2차원 프로그램은 다음 3단계로 구성되어 있다.

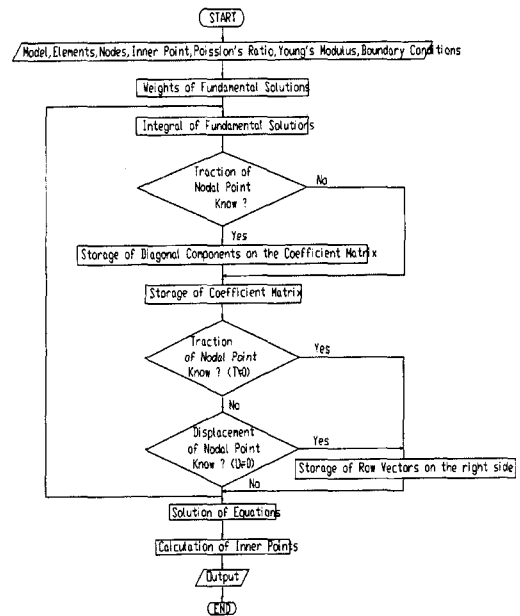


Fig. 1 Flow chart

(제 1단계)

요소의 중심의 좌표와 면적을 계산하고 요소의 개별좌표 x, y 의 기본 벡터를 전체좌표 X, Y 로 표시한다. 요소의 중심의 좌표와 각변을 이루는 4개의 3각형의 면적이 요소전체의 면적에 대하는 비율을 계산하여 무한체내에서 4변형요소와 동일한 평면부분에 크기 1의 등분포하중이 작용할 때 요소중심에 있어서 변위를 계산하기 위해 요소에 관한 입력 데이터와 계산된 면적과 개별좌표 각 방향의 기본벡터를 포함한 연립방정식을 조립한다.

(제 2단계)

연립방정식의 계수 행렬식을 24列 마다 분할하고 경계조건을 부여하여 J 요소에 알맞는 크기 1의 weight 에 의해 발생하는 요소 I 의 표면력 혹은 변위를 계산하여 연립방정식의 계수행렬식을 계산한다. 이때 요소 J 의 중심에서 요소 I 를 중심으로 벡터의 전체좌표로 표시된 성분 (XX, YY)를 구하여 weight크기 1로 작용한 경우의 응력과 변위를 계산하는 subroutine을 불러서 전체좌표로 표시된 요소 I 의 개별좌표의 기본 벡터를 요소 J 의 개별좌표로 나타낸다.

subroutine에서 전송 되어진 요소 I 의 중심의 위치에 있어서 응력과 변위는 요소 J 의 개별좌표로 나타내어지고 있기 때문에 이것을 요소 I 의 개별좌표로 나타낸다. 이 경우 응력은 요소 I 에 있어서 표면력으로 변환된다.

(제 3단계)

subroutine 에서 크기 1의 집중하중이 무한체에 작용한 경우의 임의點의 응력과 변위를 계산한다. 이때 집중하중은 좌표의 원점으로 2개의 좌표축을 각각의 正의 방향을 향해서 사용한다.

3. 수치해석 및 고찰

원형 함유물의 종류, 함유물의 반경변화와 함유물의 거리변화 및 유한폭 영향에 의한 균열선단의 응력에 미치는 영향을 조사하기 위하여 탄성계수가 다른 대칭 4원형 함유물을 갖는 평판에서 하중방향에 수직인 유한길이의 직선균열에 대하여 Fig. 2에서 $a/c = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$, $a/w = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$,

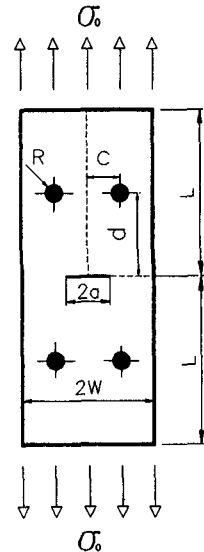


Fig. 2 Configuration and coordinate system

$a/d = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, R/c = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$, 전단계수비 $\Gamma_i/\Gamma = 0, 0.2, 0.6, 1.0, 2.0$ 으로 하였다.

요소는 선형요소로 탄성 함유물이 모재에 삽입될 때 함유물과 모재의 재료결합을 완전접착에 가깝도록 이상화하기 위하여 함유물과 모재의 접착에 대한 함유물의 강성지지(rigid support)는 2000Kgf/mm로 함유물과 모재를 완전결합체로 하였고 함유물과 모재를 블록화하여 접착하도록한 2차원 경계요소법 프로그램을 개발하여 수치해석 하였으며 수치적분은 해석적으로 처리 하였다. 사용한 컴퓨터는 IBM PC(Pentium, 120MHz, RAM 64MB) 기종으로 계산시간은 문제당 30분 정도 소요 되었다. 또한 본 프로그램의 검증을 위해 탄성문제에 적용하여 Fig. 3에 표시한 평면응력 문제를 고려한다.

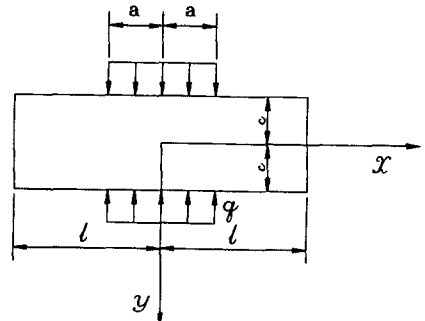


Fig. 3 Model of plane stress

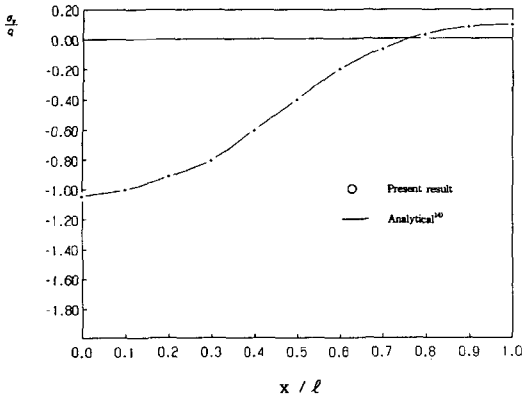


Fig. 4 Distribution of normal stress σ_y

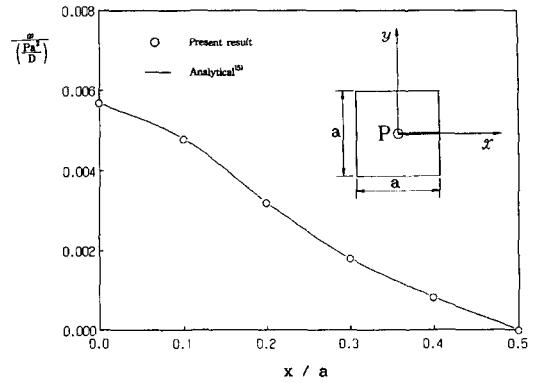


Fig. 5 Deflection in a simply supported rectangular plate with a concentrated load(x axis)

Table 1. Deflection of a centrally loaded rectangular plate

Boundary condition	Exact solution	Present result
Built-in edges	0.05605	0.0559
Simply supported	0.116	0.1156

$a/l = c/l = 0.4$ 로 대칭성은 고려하지 않는 것으로 전영역을 28개의 요소로 등분할 하여 Young's Modulus $E=1$, Poisson's ratio = 0.3으로 해석을 행하였다.

Fig. 4는 중앙면 $y = 0$ 에 있어서 수직응력 σ_y 의 해석해⁽¹⁴⁾와 비교를 표시한 것으로 표면력이 불연속으로 있는 문제에 대해서도 정도 좋은 결과가 얻어지는 것을 알 수 있다. 또한 여러종류의 경계조건을 가진 사각형 평판으로 중앙에 집중하중 P 가 작용하는 경우에 대하여 적용하면 해석은 각변을 10개의 요소로 등분할하고 대칭성은 고려하지 않았다. 계산에 사용된 재료상수 Poisson's ratio $\nu = 0.3$, 굽힘강성 $D = 1000$ 으로 하였다. 판 중앙에 집중하중 P 를 받는 사각형 평판의 최대휨이 엄밀해⁽¹⁵⁾와 비교를 Table 1에 표시한다. Fig. 5에는 중앙에 집중하중 P 를 받는 주변고정 사각형 평판의 x 축상의 휨 및 고정단의 굽힘 모멘트를 표시한다. 이들의 결과로부터 본해석 결과는 다른 解와 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다.

일반적인 재료에 있어서 포아송비 ν 의 변동범위가 작은것을 고려하여 $\nu_1 = \nu_i = 1.8$ 로 고정하였고(평면변형률은 $\nu_1 = \nu_i = 0.3$, 평면응력은 $\nu_1 = \nu_i = 0.43$ 에 상당) 폭($2W$) = 60, 높이($2L$) = 200인 평판이 인장응력을 받는 경우 대칭성을 고려하여 판의 1/4 ($W = 30$,

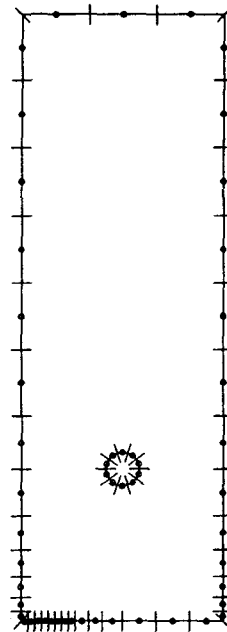


Fig. 6 Symmetric circular inclusion and crack modeling segment

$L/2 = 100$)을 평면응력상태하에서 총요소수를 53요소로 분할 하였다. Fig. 6은 요소분할을 표시한 것이다.

응력확대계수값은 경계요소법에 의한 직접解만을 사용하여 절점밀도가 낮아도 변위법과 응력법을 접속하는 것에 의하여 각각 단독으로 사용하는것보다 상당히 정도가 좋은 K 를 외삽하여 얻는 접속외삽법(hybrid extrapolation method)⁽¹⁶⁾을 사용하였으며 응력확대계수를 $F_I = K_I / \sigma_o \sqrt{\pi a}$ 으로 무차원화 하였다.

Fig. 7 - Fig.10 은 함유물의 종류와 함유물의 반경변

화에 따른 균열선단에 미치는 영향을 조사하기 위하여 $c = d = 10\text{mm}$, $W = 30\text{mm}$ 에서 함유물의 반경을 $R = 2, 4, 6, 8\text{mm}$ 로 변화 하였을때 균열길이에 대한 응력확대계수를 전단계수비에 따라 표시한 것이다. Fig. 7에서 함유물의 반경 $R = 2\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 원공상태와 모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 및 모재와 강성이 같은 $G = 1.0$ 의 경우 균열이 진전됨에 의하여 응력확대계수는 함유물의 영향을 별로 받지 않으며 서서히 증가하고 있다. 그러나 모재보다 강성이 큰 함유물 $G = 2.0$ 일때 균열이 진전됨에 의하여 응력확대계수가 감소함을 나타내고 있다. 이것은 강성이 큰 함유물의 내면경계가 균열선단에 영향을 미치는 것으로 판단된다.

Fig. 8은 함유물의 반경 $R = 4\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 원공상태에서는 균열이 진전됨에 의하여 응력확대 계수는 큰값으로 일정한 값을 유지하다가 $a/c = 0.8$ 인 원공위치 거리 가까이 진전되었을때 응력확대계수가 감소하고 있다.

이는 원공위치 거리 이후에는 원공에 의한 영향을 받지 않음을 나타낸다. 모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 및 모재와 강성이 같은 $G = 1.0$ 의 경우 Fig. 7과 같은 경향을 나타내며 모재보다 강성이 큰 $G = 2.0$ 의 경우도 Fig. 7과 같은 경향을 나타내고 있다.

Fig. 9는 함유물의 반경 $R = 6\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 원공상태에서는 원공의 반경증가에 따라 처음부터 높은 응력확대계수값을 나타내며 $a/c = 0.8$ 인 원공위치 거리가 가까이 진전 되었을때 응력확대계수가 급격히 감소하고 있다. 모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 과 모재와 강성이 같은 $G = 1.0$ 의 경우 Fig. 7과 같은 경향으로 응력확대계수가 증가하고 있다. 모재보다 강성이 큰 $G = 2.0$ 의 경우도 Fig. 7과 같은 경향을 나타내며 감소하고 있다.

Fig.10은 함유물의 반경 $R = 8\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 원공상태에서는 Fig. 9와 같은 경향을 나타내고 있으나

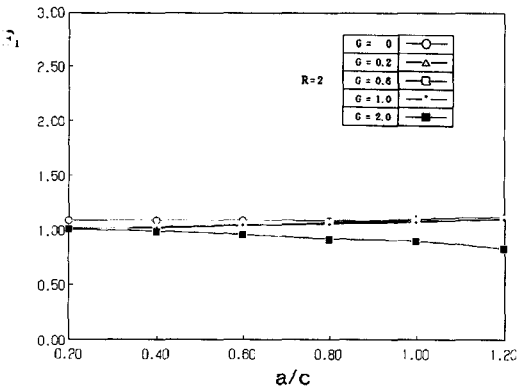


Fig. 7 Crack tip stress intensity factor versus a/c

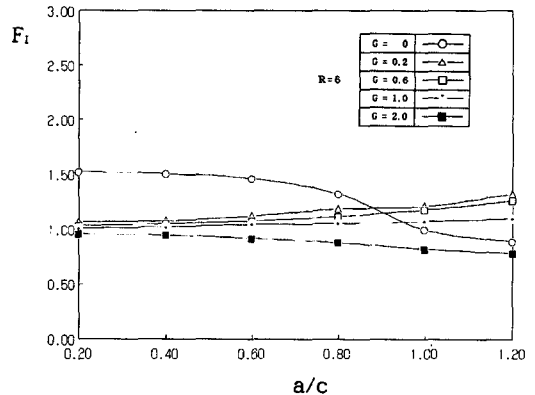


Fig. 9 Crack tip stress intensity factor versus a/c

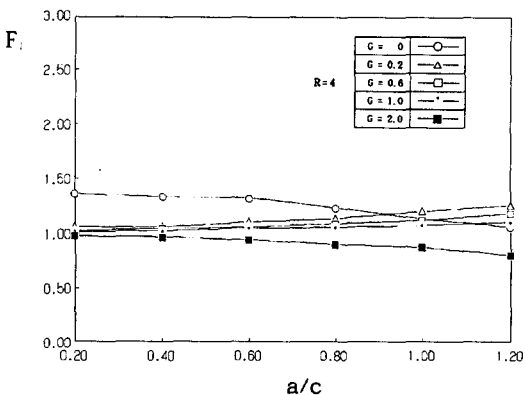


Fig. 8 Crack tip stress intensity factor versus a/c

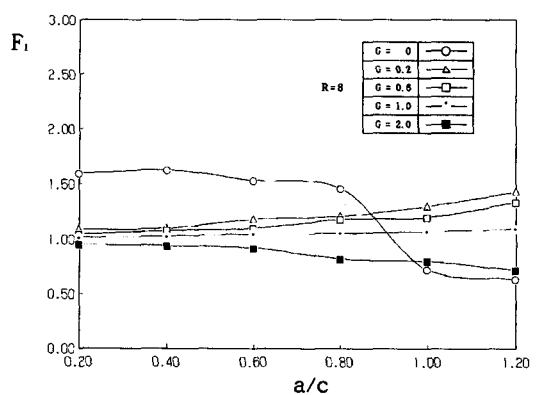


Fig. 10 Crack tip stress intensity factor versus a/c

$a/c = 0.8$ 에서 급격한 감소는 원공 반경변화에 의한 것으로 판단된다. 따라서 원공 반경 증가에 따라 높은 응력 확대계수를 나타내며 균열이 원공위치 가까이 진전되었을 때 급격한 감소는 원공위치 거리 이후에도 원공의 반경이 증가하면 균열선단 응력확대계수에 영향을 미치는 것을 나타낸다.

모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 의 경우는 균열이 진전됨에 의하여 함유물 내면경계의 영향으로 응력확대계수가 증가함을 나타내며 모재와 동일한 강성인 $G = 1.0$ 의 경우 균열이 진전됨에 의하여 미소하게 증가하고 있으며 그 경향은 함유물의 반경변화에 관계없이 일정한 값을 나타내고 있다.

모재보다 강성이 큰 $G = 2.0$ 의 경우 균열이 진전됨에 의하여 함유물의 내면경계가 응력확대계수를 감소시키고 있으며 함유물의 반경변화에 의하여 그 기울기도 크다.

Fig.11 - Fig.14는 유한폭의 영향이 균열선단에 미치는 영향을 조사하기 위하여 $c = d = 10\text{mm}$, $W = 30\text{mm}$ 에서 함유물의 반경을 $R = 2, 4, 6, 8\text{mm}$ 로 변화 하였을 때 균열길이에 대한 응력확대계수를 전단계수비에 따라 표시한 것이다. Fig.11은 함유물의 반경 $R = 2\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 원공상태에서는 $a/w = 0.3$ ($a = 9\text{mm}$)까지 응력확대계수는 증가하며 그 이후 $a/w = 0.4$ ($a = 12\text{mm}$)부터 다시증가 하고 있다. 이것은 원공위치 거리까지 응력확대계수는 원공의 영향으로 증가하다가 이후 원공의 영향을 받지 않으므로 감소하며 또한 균열이 점점 진전됨에 의하여 판폭의 영향으로 다시 증가 된다고 생각 된다.

모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 의 함유물의 경우 균열이 진전됨에 의하여 판폭의 영향으로 응력확대계수가 증가하고 있다. 모재와 동일한 강성인 $G = 1.0$ 의 경

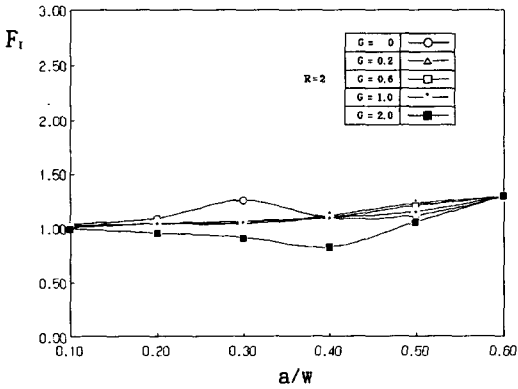


Fig. 11 Crack tip stress intensity factor versus a/w

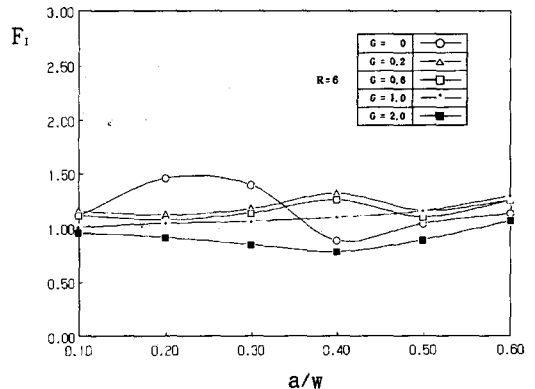


Fig. 13 Crack tip stress intensity factor versus a/w

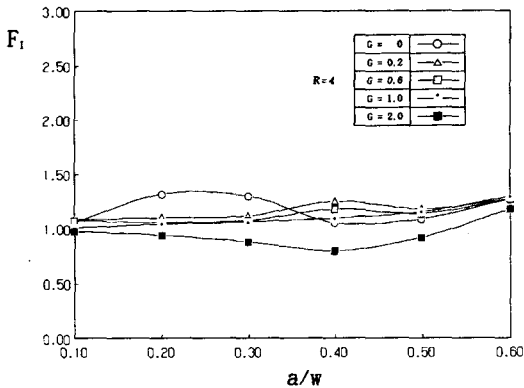


Fig. 12 Crack tip stress intensity factor versus a/w

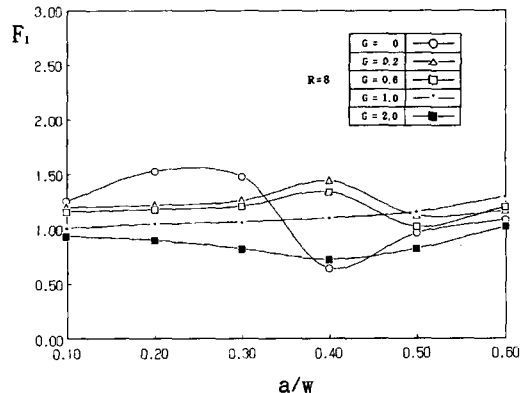


Fig. 14 Crack tip stress intensity factor versus a/w

우 $G = 0.2, 0.6$ 과 동일한 경향을 나타내고 있다. 모재보다 강성이 큰 $G = 2.0$ 의 함유물의 경우 함유물의 내면경계로 응력확대계수가 $a/w = 0.4$ ($a = 12\text{mm}$)까지 감소하다가 그 이후 유한폭의 영향으로 증가하고 있다.

Fig.12는 함유물의 반경 $R = 4\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 원공상태에서는 Fig.11과 같은 경향을 나타내고 있으며 모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 의 함유물의 경우 균열이 진전됨에 의하여 응력확대계수가 증가하다가 $a/w = 0.4$ ($a = 12\text{mm}$)에서 pick를 나타내면서 증가하고 있다. 이것은 함유물 내면경계에 있어서 응력상태를 살펴보면 하중에 대하여 함유물은 압축응력이 균열에는 인장응력이 작용하는 상태이므로 압축응력과 인장응력이 상호작용으로 응력확대계수가 pick를 나타내며 증가하는 것으로 판단된다.

모재와 동일한 강성인 $G = 1.0$ 의 경우는 Fig.11과 동일한 경향을 나타낸다. 또한 모재보다 강성이 큰 $G = 2.0$ 인 함유물도 Fig.11과 동일한 경향을 나타낸다.

Fig.13은 함유물의 반경 $R = 6\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 원공상태에서는 Fig.12와 같은 경향을 나타내고 있으며 응력확대계수의 변동폭이 큰 것은 원공의 반경 변화에 따른 유한폭의 영향이라고 생각된다.

모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 의 경우도 Fig.12와 동일한 경향을 나타내며 응력확대계수의 변화폭이 큰 것은 함유물의 반경변화에 따른 응력들의 상호작용 영향이 크게 되기 때문이라고 생각된다.

모재와 동일한 강성인 $G = 1.0$ 의 경우 Fig.11과 같이 동일한 경향을 나타낸다. 모재보다 강성 큰 $G = 2.0$ 의 경우도 Fig.11과 동일한 경향을 나타낸다. Fig.14는 함유물의 반경 $R = 8\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 원공상태에서는 Fig.13과 같은 경향을 나타내고 있으며 원공의 반경 변화와 유한폭의 변화에 의하여 응력확대계수의 큰 변동을 나타내고 있으며 원공의 반경증가에 따른 응력집중 현상이 유한폭의 변화에도 불구하고 균열선단응력들과 상호작용으로 균열이 점점 진전되어도 응력확대계수는 감소된다. 모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 의 경우도 Fig.13과 같은 경향을 나타내며 함유물의 반경증가에 따라 응력확대계수의 변화폭도 크게 되는 것을 나타내고 있다. 모재와 동일한 강성인 $G = 1.0$ 의 경우 Fig.11과 동일한 경향을 나타내며 함유물의 반경변화와 유한폭변화에 관계없이 일정한 값을 표시하고 있다. 모재보다 강성이 큰 $G = 2.0$ 의 경우도 Fig.11과 동일한 경향을 나타

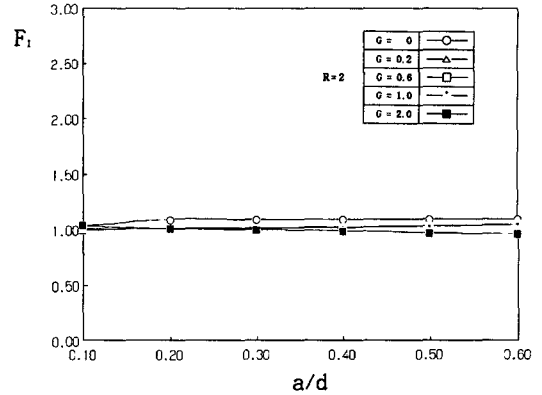


Fig. 15 Crack tip stress intensity factor versus a/d

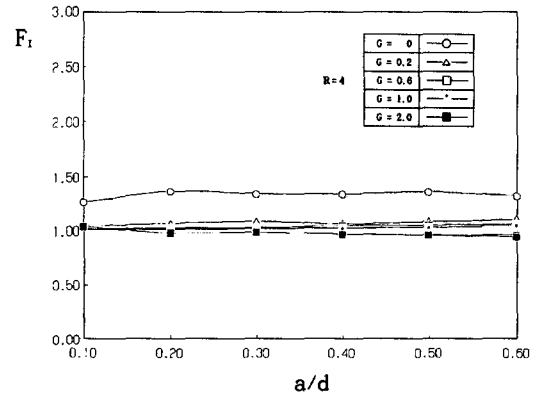


Fig. 16 Crack tip stress intensity factor versus a/d

내며 함유물의 반경변화에 의하여 응력확대계수의 감소폭도 크다.

Fig.15 - Fig.18은 함유물의 거리변화에 따른 균열선단에 미치는 영향을 조사하기 위하여 $c = d = 10\text{mm}$, $W = 10\text{mm}$ 에서 함유물의 반경을 $R = 2, 4, 6, 8\text{mm}$ 로 변화하였을때 균열길이에 대한 응력확대계수를 전단계수비에 따라 표시한 것이다.

Fig.15는 함유물의 반경 $R = 2\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 원공과 모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 및 모재와 강성이 같은 $G = 1.0$ 의 경우 균열이 진전됨에 따라 응력확대계수가 서서히 증가하고 있으며 모재보다 강성이 큰 $G = 2.0$ 의 경우 미소하게 응력확대계수가 감소하고 있다.

Fig.16은 $R = 4\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 원공에서 원공의 반경증가에 따라 다른 함유물보다 큰폭으로 서서히 증가하고 있다.

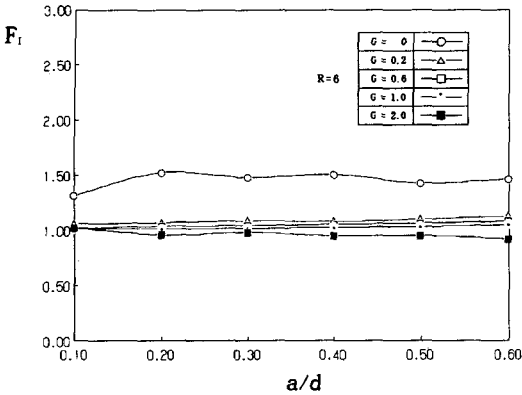


Fig. 17 Crack tip stress intensity factor versus a/d

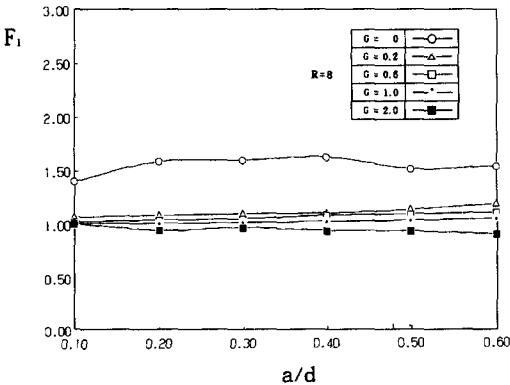


Fig. 18 Crack tip stress intensity factor versus a/d

모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 의 경우 Fig.15와 같은 경향을 나타내고 있으며 모재와 동일한 강성인 $G = 1.0$ 의 경우도 Fig.15와 동일한 경향을 나타내고 있다.

Fig.17, Fig.18은 $R = 6, 8\text{mm}$ 일때 $G = 0$ 인 경우 Fig.16과 같은 경향을 나타내며 반경증가에 따른 다른 함유물보다 응력확대계수가 큰 폭의 차이를 나타낸다. 모재보다 강성이 작은 $G = 0.2, 0.6$ 과 모재와 동일한 강성인 $G = 1.0$ 의 경우 Fig.15와 동일한 경향을 나타내며 함유물의 반경변화에 관계없이 동일한 경향을 나타낸다.

모재보다 강성이 큰 $G = 2.0$ 의 경우도 Fig.15와 동일한 경향을 나타내며 균열이 진전됨에 의하여 점점 감소하고 있다.

4. 결론

원형 함유물의 종류, 함유물의 반경변화와 함유물의

거리변화 및 유한폭 영향에 의한 균열선단의 응력에 미치는 영향을 조사하기 위하여 탄성계수가 다른 대칭 4원형 함유물을 갖는 평판에서 하중방향에 수직인 유한길이의 직선균열에 대하여 수치해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 함유물의 반경변화에 의하여 모재보다 강성이 작은 함유물의 경우 균열이 진전됨에 의하여 응력확대계수를 증가 시키며 모재와 동일한 강성인 함유물의 경우 함유물의 반경변화에 관계없이 일정한 값을 나타내며 모재보다 강성이 큰 함유물의 경우 균열이 진전됨에 따라 응력확대계수를 감소시킨다.

(2) 유한폭의 영향으로 모재보다 강성이 작은 함유물의 경우 균열이 진전됨에 의하여 함유물과 균열의 상호작용으로 응력확대계수가 크게 증가하며 모재와 동일한 강성인 경우 함유물의 반경에 관계없이 일정한 값을 나타내며 모재보다 강성이 큰 경우 함유물의 영향으로 응력확대계수가 감소하다가 유한폭의 영향으로 다시 증가한다.

(3) 함유물의 거리변화에 따라서는 모재보다 강성이 작은 함유물의 경우나 모재와 동일한 강성인 경우 균열이 진전됨에 의하여 응력확대계수가 미소하게 증가하고 있으며 모재보다 강성이 큰 함유물의 경우 균열이 진전됨에 따라 서서히 감소하고 있다.

참고 문헌

1. Griffith, A.A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", Phil. Trans. Roy Soc., of London A221, p.163, 1921.
2. Irwin, G. R., "Fracture Hand Buch der Physik", Springer, p.551, 1958.
3. Williams, M.L., "On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack", J. App. Mech., Vol.24, pp.109-114, 1957.
4. Williams, M.L., "The Bending Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack", J. App. Mech., Vol.28, pp.78-82, 1961.
5. England, A.H., "An Arc Crack around a circular Elastic Inclusion", J. App. Mech., Vol.33, pp.637-640, 1962.
6. Tamate, O., "The Effect of A Circular Inclusion on The Stresses Around A Line Crack in A Sheet Under Tension", Int. J. of Fract.

- Mech., Vol.4, Nr.3, pp.257-265, 1968.
7. Toya, M., "A Crack Along the Interface of a Circular Inclusion Embedded in an Infinite Solid", J. Mech. Phys. Solid, Vol.22, pp.325-348, 1974.
 8. Toya, M., "Debonding along the Interface of an Elliptic Rigid Inclusion", Int. J. Fract., Vol.6, pp.989-1002, 1975.
 9. Erdogan, F. and Gupta, G.D., and Ratwani, M., "Interaction Between a Circular Inclusion and an Arbitrarily Oriented Crack", J. App. Mech., pp.1007-1013, 1974.
 10. Erdogan, F. and Gupta, G. D., "The Inclusion Problem with a Crack Crossing the boundary", Int. J. of Fract., Vol.11 No.1, pp.13-27, 1975.
 11. Hsu, Y. C. and Shivakumat, V., "Interaction between an elastic circular inclusion and two Symmetrically placed collinear cracks", Int. J of Fract., Vol.12, No.4, pp.619-630, 1976.
 12. Sheng, C.F. and Wheeler, L., "Crack Path Prediction for a Kinked Crack in the Neighborhood of a Circular Inclusion in an Infinite Medium", J. App. Mech., Vol.48, pp.313-319, 1981.
 13. Brebbia, C. A., Telles, J. F., and Wrobel, L. C., Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
 14. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.
 15. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1959.
 16. 結城, 木顔, 松本, "境界要素法における 應力擴大係數の 決定法", 第一回 境界要素法 シンポジウム, pp.85-90, 1984.