

# 대규모 강체 회전을 포함한 상호 연결된 유연한 보의 동역학적 해석

이 기 수\*

## Dynamic Analysis of Interconnected Flexible Beams Having Large Rigid Body Rotations

Kisu Lee\*

### ABSTRACT

A simple and efficient method is presented for the dynamics of interconnected flexible beams having large rigid body rotations. A simple mass matrix is obtained by interpolating the displacements in the global inertia frame, and the elastic force is also simply computed by using linear finite element technique with the moving frame attached to the beam. For the beams connected by revolute joints, kinematic constraints and relative rotations between the beams are not required and the equations of motions are time integrated by a simple ODE technique. Numerical simulations are conducted to demonstrate the accuracy and efficiency of the present technique.

**Key Words:** interconnected flexible beam (상호 연결된 유연한 보), rigid body rotation (강체 회전), linear finite element technique (선형 유한요소 기법), revolute joint (회전 조인트)

### 1. 서 론

로봇 등 각종 기계의 주요 동작 부분은 유연한 보가 상호 연결되어 있는 형식을 취하고 있다. 이들 기계는 점차 고속화되는 추세에 있으므로 상호 연결된 유연한 보에 대한 동역학적 해석은 중요한 과제가 된다. 그러나 이경우 유연한 보들의 동역학적 해석을 위하여는 탄성 변형과 강체 회전 운동이 서로 연계되어 있으며 또한 여러개의 보들이 조인트에서 서로 연결되어 있으므로 전체 방정식은 대단히 복잡한 비선형 방정식이 되며, 일반적으로 미

분방정식과 대수방정식을 동시에 풀어야 한다. 그런데 보의 강체 운동과 탄성 변형을 분리하여 근사적인 방정식을 사용하면<sup>(1)</sup> 비교적 해법은 단순해지나 강체 운동과 탄성 변형의 연성으로 인한 오차를 피할수 없다. 또한 물체에 부착되어 움직이는 좌표계를 사용하여 탄성 변형을 구한 후 고정된 관성 좌표계에서 운동방정식을 유도하면<sup>(2-4)</sup> 코리올리스 가속도 및 원심력으로 인하여 일반적으로 질량 행렬 및 힘 벡터가 대단히 복잡해진다. 또한 강체 운동 및 탄성 변형을 모두 관성좌표계에서 표시하면<sup>(5-7)</sup> 일반적으로 비선형 대변형 이론이 사용되어야 하며 강성도 행렬

\* 전북대학교 기계공학과

및 탄성력 계산이 대단히 복잡해진다. 또한 위의 거의 모든 경우에 대수 구속조건을 가진 다물체 동역학 문제를 풀기 위하여 특수한 시간 적분법을 사용하여야 하며, 질량 행렬 또는 강성도 행렬은 해 및 시간의 함수가 되고, 방대한 비선형 방정식을 뉴턴 램슨 반복계산법에 의하여 푸는 과정이 일반적으로 요구된다.

본 논문에서는 유연한 보들이 서로 조인트에서 연결되어 대규모 강체 운동 및 탄성변형을 하는 경우의 문제를 해석하기 위한 단순하고 효율적인 해법을 제시한다. 본 논문에서 질량 행렬은 관성좌표계에서 변위를 내삽(interpolation) 하여 얻어지므로 대단히 단순한 상수 행렬이 되며, 또한 탄성력도 보의 지정된 점들에 부착되어 움직이는 좌표계에 의하여 간단한 강성도 행렬 및 소변형 이론을 이용하여 간단히 계산된다. 그리고 유한 요소의 각 절점에서는 관성좌표계에서 측정된 절대 변위가 사용되므로, 보가 회전 조인트에 의하여 연결되어 있는 경우, 연결된 보들 사이에 조인트에서의 기구학적 구속조건이 불필요하다. 따라서 일반적인 상미분 방정식 (ordinary differential equation)을 풀기위한 단순한 형태의 시간 적분법만이 필요하며 비선형 방정식을 풀기위한 뉴턴 램슨 반복계산법은 필요하지 않다.

## 2. 기본 방정식 구성

본 논문의 목적은 조인트에서 상호 연결되어 운동하는 유연한 보의 동역학적 해석을 위한 효율적인 해법을 제시하는 것이다. 본 논문에서는 유한요소법에 의하여 보의 방정식을 유도하고, Euler-Bernoulli 보 이론을 사용하며, 보의 탄성 변형은 강체 운동량에 비하여 비교적 적고, 또한 보들은 서로 회전 조인트 (revolute joint)에 의하여 연결되어 있다고 가정한다. 보의 탄성변형이 강체운동으로 인한 변위보다 상당히 작고 또한 보 요소의 길이가 작은 경우 보 요소 내부에서의 탄성 회전으로 인한 관성 효과는 무시될 수 있다. 따라서 운동방정식의 가속도 항 유도시, 요소 내부의 절대 변위는  $C_0$  연속인 함수를 이용하여 내삽할 수 있으며, 결국 절점의 변위는 관성좌표계에서의 절대 변위를 이용하여 표시할 수 있다 (즉 보 요소의 길이가 작은 경우 보 요소의 회전운동은 보 요소의 강체 회전 운동과 유사하게 됨). 이러한 방법에 의하여, 일반적인 다물체 동역학의 경우와는 달리, 회전 조인트에 의하여 연결된 모든 보는 그 조인트에서 단 하나의 절대 변위 만을 공유하게 되며 따라서 기구학적 구속조건이 불

필요하다. 예로써, Fig. 1의 보 J-1, J, J+1은 회전 조인트에서 단 하나의 절점과 변위 만이 필요하다. 또한 본 논문에서는 각 절점에서 절대 변위만이 사용되므로, Fig. 2와 같은 2절점 요소의 경우, 그 내부에서의 절대 변위는 다음과 같이 내삽된다.

$$q_x = (1 - \xi/e) (q_x)_{i'} + \xi/e (q_x)_{(i+1)'} \quad (1)$$

$$q_y = (1 - \xi/e) (q_y)_{i'} + \xi/e (q_y)_{(i+1)'}$$

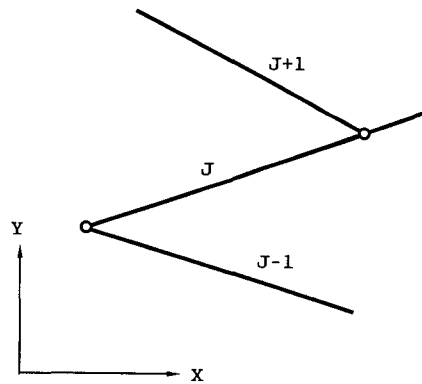


Fig. 1 A typical model consisting of interconnected flexible beams.

위에서  $i'$ 와  $(i+1)'$ 는 전체 절점 번호 (global node number),  $q_x$ 와  $q_y$ 는 관성좌표계 (X,Y)에서 측정된 요소 내부 점의 절대변위,  $(q_x)_{i'}$ 와  $(q_y)_{i'}$ 는 절점  $i'$ 에서의 절대좌표,  $e$ 는 요소 길이, 그리고  $\xi$ 는 Fig. 2에서 나타난 바와같이 절점  $i'$ 에서 부터의 거리이다. 즉 관성력 계산시 보 요소내의 변위는 봉 (bar)들이 여러개 연결되어 보를 이루고 있는 경우와 같이 내삽되며, 따라서 질량 행렬 및 운동 에너지가 간단히 표시된다. 즉 전체 시스템의

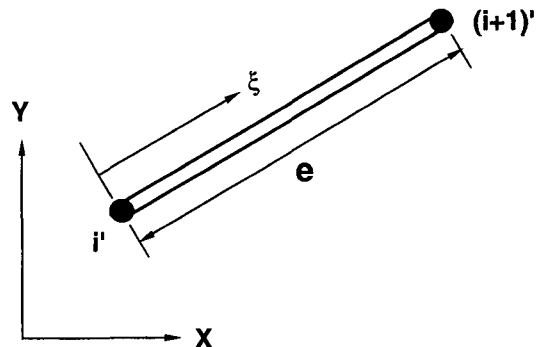


Fig. 2 Two-node element in a beam.

운동 에너지  $T$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

위에서  $M$ 은 전체 질량 행렬,  $\dot{\mathbf{q}}$ 는 전체 절점에서의 절대 속도를 나타낸다. 위와 같이 운동 에너지를 표시하면 보 내부의 굽힘으로 인한 운동이 완전히 표시되지는 않으나 보의 요소 수가 증가하면 충분히 정확한 결과가 얻어진다.

보의 탄성력을 계산하기 위하여는, 관성 효과 계산과는 달리, 보 내부에서 탄성 변형으로 인한 기울기 변화를 정확히 계산해야 하며  $C_1$ 연속의 Hermitian 내삽 함수를 이용하여 유한요소 방정식을 작성하여야 한다 (즉 가속도 항 계산시에는 보 단면의 탄성 회전으로 인한 관성 효과가 본 논문의 관성력  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$ 보다 대단히 작으므로 무시하였으나, 탄성력 계산시에는 단면의 탄성 회전 효과가 절대적이 됨). 본 논문에서는 이와같은 목적을 위하여, 각 보마다 2개의 지정된 점에 고정되어 보와 같이 움직이는 좌표계에서 탄성 변형을 측정한다. 즉, Fig. 3의 경우 보  $J$ 의 양 끝 점에 좌표계가 부착되어 보와 같이 움직인다.

각 보에서의 탄성 변형은 각 보에 부착되어 움직이는 좌표계에서 측정되며, 편의상 각 보의 절점들에 지방 절점 번호를 부여한다. 예로써 Fig. 3에 보  $J$ 의 경우의 지방 절점 번호가 표시되어 있다. 이 경우 보 절점들의 절대 변위  $\mathbf{q}$ 가 주어져 있다면, 지방 절점 번호  $i$ 에서의 탄성 변형  $(w_x)_i$  와  $(w_y)_i$ 는 좌표 변환에 의하여 계산된다. 또한 보  $J$ 의 어떤 절점에서의 탄성 변형에 의한 기울기는 인접한 3 절점에서의 탄성 변형이 다음과 같이 2차식으로 표시된다고 가정하여 계산할 수 있다.

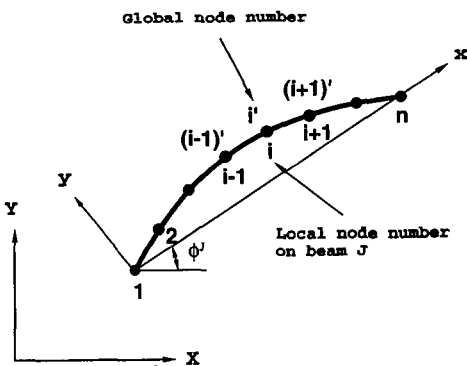


Fig. 3 Moving frame  $(x,y)$  attached on the two end points in beam  $J$ , the local node number in beam  $J$ , and the global node number in beam  $J$

$$w_y^J = ax^2 + bx + c \quad (3)$$

위에서 첨자  $J$ 는 보  $J$ 를 가리키고 첨자  $y$ 는  $y$  방향 변위를 가리킨다. Fig. 3에 있는 보의 절점  $i$ 에서의 탄성 변형 기울기는 식 (3)의 상수  $a, b, c$ 가 결정되면 계산된다. 그런데 식 (3)의 상수  $a, b, c$ 는 절점  $i$ 가 보의 끝에 있는 점이 아니라면, 절점  $i-1, i, i+1$ 에서의 횡방향 탄성 변형을 이용하여 계산된다. 또한 절점  $i$ 가 보의 끝점인 경우는 끝 3 절점의 변위를 이용하여 (예로써  $i$ 가 1이면 절점 1, 2, 3에서의 변위를 이용한다) 상수  $a, b, c$ 가 결정된다. 이와같은 방법에 의하여 보  $J$ 의 절점  $i$ 에서의 탄성 변형으로 인한 기울기  $\theta_i^J$ 는 다음식을 이용하여 계산된다.

$$\theta_i^J = \left( \frac{dw_y^J}{dx} \right)_{x_i} = 2ax_i + b \quad (4)$$

위에서  $x_i$ 는 절점  $i$ 에서의  $x$  좌표이다. 예로써, 만약 보의 각 절점들이 등간격  $e$ 만큼 떨어져 있으며 절점  $i$ 가 보의 끝 점이 아니라면, 식 (3)과 (4)에 의해서 다음 식이 성립된다.

$$\theta_i^J = \frac{(w_y^J)_{i+1} - (w_y^J)_{i-1}}{2e} \quad (5)$$

보  $J$ 의 탄성 에너지  $V^J$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$V^J = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^J)^T \mathbf{K}^J \mathbf{u}^J \quad (6)$$

위에서  $K^J$ 는 보  $J$ 의 강성도 행렬로서 Euler-Bernoulli 보 및 Hermitian 내삽 이론을 이용한 선형 유한요소 기본 이론에 의하여 간단히 계산되며,  $\mathbf{u}^J$ 는 보  $J$ 와 더불어 움직이는 좌표계에서 측정된 탄성 변위 및 기울기로 구성되어 있다. 예로써, 만약 절점  $i$ 가 보의 끝 점이 아니고 절점들 사이의 간격이  $e$ 라면  $\mathbf{u}^J$ 의 절점  $i$ 에서의 성분  $\mathbf{u}_i^J$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_i^J = \begin{bmatrix} (w_x^J)_i \\ (w_y^J)_i \\ \frac{(w_y^J)_{i+1} - (w_y^J)_{i-1}}{2e} \end{bmatrix} \quad (7)$$

그리고 전체 시스템의 운동 방정식은 라그랑지 방정식  
에 의하여 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_{i'}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_{i'}} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial q_{i'}} = f_{i'} \quad (8)$$

위에서  $i'$ 는 절점 번호 (즉 전체 보의 절점 번호),  $f_{i'}$ 는  
절점  $i'$ 에 작용하는 외력, 그리고  $N$ 은 시스템 전체의 보  
의 숫자이다. 그런데 탄성 에너지에 관하여는 다음식이  
성립된다.

$$\frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial q_{i'}} = \sum_j \frac{\partial u_j^j}{\partial q_{i'}} \frac{\partial \mathcal{V}^j}{\partial u_j^j} = \sum_j \frac{\partial u_j^j}{\partial q_{i'}} \sum_k K_{jk}^j u_k^j \quad (9)$$

위에서  $j$ 와  $k$ 는 보  $J$  내부의 지방 절점 번호를 가리킨  
다. 그러면 식 (2), (7), 및 (9)에 의하여 식 (8)은 다음  
과 같이 변환된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \sum_{j=1}^N \mathbf{R}^j \mathbf{K}^j \mathbf{u}^j(\mathbf{q}) = \mathbf{f} \quad (10)$$

위에서 행렬  $\mathbf{R}^j (\mathbf{R}^j = \partial \mathbf{u}^j / \partial \mathbf{q}^j)$ 은 관성 좌표계와 보  
 $J$ 의 지방좌표계 사이의 좌표 변환 및 탄성 변형의 기울기  
에 관한 식 (예로써 식 (5))을 사용하여 계산된다. 예로  
써, 보  $J$ 에 고정된 지방 좌표계와 관성 좌표계 사이의 각  
도가  $\phi^j$ 이고 Fig. 3에 표시된 것처럼 지방 절점 번호  $i$   
가 전체 절점 번호  $i'$ 에 해당된다면 움직이는 좌표계에서  
측정한 변위와 관성 좌표계에서 측정한 절대 변위 사이  
에 다음식이 성립된다.

$$\begin{bmatrix} (w_x^j)_i \\ (w_y^j)_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi^j & \sin \phi^j \\ -\sin \phi^j & \cos \phi^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (q_x)_{i'} \\ (q_y)_{i'} \end{bmatrix} \quad (11)$$

또한 만약 절점  $i$ 가 보의 끝 점이 아니고 절점들 사이의  
간격이  $e$ 라면 식 (5) 및 (11)에 의하여 다음 식이 얻어지  
다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_i^j}{\partial (q_x)_{(i+1)'}} \\ \frac{\partial \theta_i^j}{\partial (q_y)_{(i+1)'}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2e} \begin{bmatrix} -\sin \phi^j \\ \cos \phi^j \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_i^j}{\partial (q_x)_{(i-1)'}} \\ \frac{\partial \theta_i^j}{\partial (q_y)_{(i-1)'}} \end{bmatrix} = \frac{-1}{2e} \begin{bmatrix} -\sin \phi^j \\ \cos \phi^j \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_i^j}{\partial (q_x)_{i'}} \\ \frac{\partial \theta_i^j}{\partial (q_y)_{i'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

절점  $i$ 가 보의 끝에 위치하여도 유사한 방법에 의하여  
기울기가 구해진다. 본 논문에서 외력  $\mathbf{f}$ 는 코리올리스 가  
속도 및 원심력이 포함되지 않는 실제의 외력이므로 간단  
히 계산된다. 절점에서의 절대 변위  $\mathbf{q}$ 가 주어지면 탄성  
변형  $\mathbf{u}$  및 변환 행렬  $\mathbf{R}$ 은 위에서 설명한 바와 같이 쉽게  
계산되므로, 운동 방정식 (10)은 잘 알려진 상미분 방정  
식 해법 (예로써 참고문헌 8)에 의하여 시간 적분하여 해  
를 구할 수 있다. 특히 본 논문의 경우 질량 행렬  $\mathbf{M}$ 과 강  
성도 행렬  $\mathbf{K}$ 는 불변의 상수 행렬이고 운동 방정식에 구속  
조건이 포함되지 않으므로 빠른 속도의 계산이 가능하다  
(단, 만약 보와 보 사이의 조인트가 회전 조인트가 아니  
고  $\Phi(\mathbf{q}, t) = 0$  형태의 임의의 기구학적 구속 조건이 요  
구되는 조인트인 경우 운동 방정식은  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{u}(\mathbf{q}) + \Phi_{,i} \lambda = 0$  형태가 되며 이러한 경우의 해법은 참고문헌  
9-11 등에서 자세히 설명되어 있다).

### 3. 예제 계산

Fig. 4와 같이 2개의 링크로 구성된 모델을 생각한다.  
초기  $t=0$ 인 시점에서 각도  $\Psi_1$ 과  $\Psi_2$ 는 각각  $0^\circ$ 와  $15^\circ$   
이며 초기 속도는 모두 0이고 중력에 의하여 운동한다.  
보의 길이는 1m, 질량은 5kg이고 굽힘 강성도는  
 $EI=10^3 \text{Nm}^2$ 이다. 본 모델은 참고문헌 3에서 사용된 것  
인데, 거기에서는  $C_1$  연속의 형상 함수를 이용한 유한요  
소법을 사용하였고 보와 보 사이의 상대 회전각을 고려한  
방정식을 사용하였다. 또한 참고문헌 3의 경우 보의 길이  
방향 변형은 고려하지 않았다. 실제로 대부분의 기계에서  
보의 길이 방향 강성도  $EA$ 는 굽힘 강성도  $EI$ 보다 훨씬  
크므로, 본 논문에서는 보의 길이 방향 강성도  $EA$ 는 굽  
힘 강성도  $EI$ 의 2500 배의 크기를 가진다고 가정하여 계  
산을 수행한다 ( $EA$ 가  $EI$ 보다 훨씬 큰 경우에도 계산 결  
과에 미치는 영향은 거의 없다). 그리고 각 보와 더불어

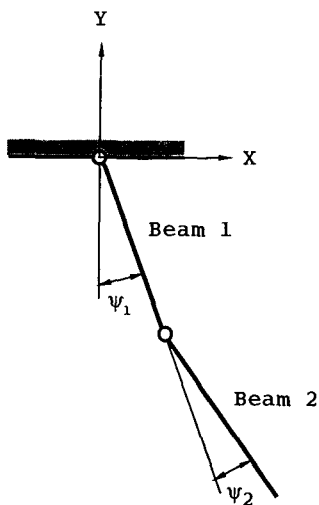


Fig. 4 Flexible two-link manipulator.

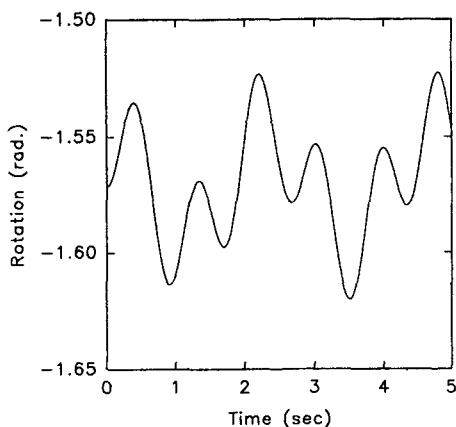


Fig. 5 Relative rotation of beam 1

움직이는 지방 좌표계의 x 축은 각 보의 양쪽 끝 점에 고정되어 있다고 생각하며, 운동 방정식 (10)은 4차의 Runge Kutta 방법을 이용하여 시간 적분하고 시간 간격  $\Delta t$ 는  $2.5 \times 10^{-4}$  sec로 한다.

위의 자료를 사용하여 계산을 수행한 결과, 2 보 사이의 상대 회전각 및 보 2의 끝 점의 위치의 변화가 Figs. 5-8에 나와 있는데 참고문헌 3의 결과와 잘 일치하고 있다. 또한 각 보의 탄성 변형량 역시 Figs. 9-12에 보인 바와 같이 참고문헌 3의 결과와 잘 일치하고 있다. 그런데 참고문헌 3과 같은 정의를 사용하기 위하여,  $\phi^1$  과  $\phi^2$  가 Fig. 3에서 정의된 각도인 경우, 보 2의 상대 회전각은  $\phi^2 - \phi^1$ 로 계산하였다. 또한 Figs. 9-12에서 굽힘

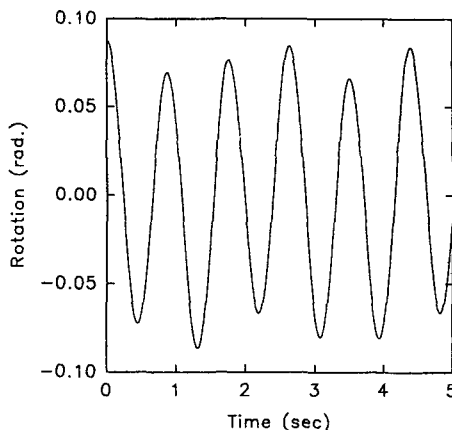


Fig. 6 Relative rotation of beam 2

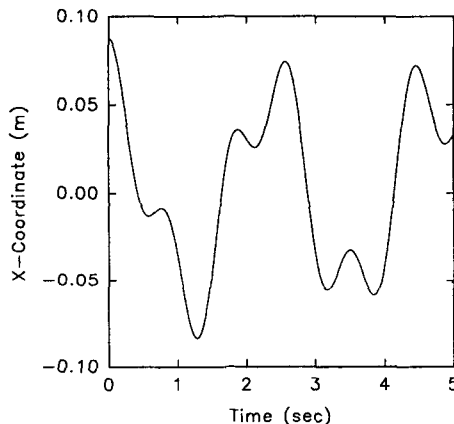


Fig. 7 X coordinate at the tip of beam 2

변위와 굽힘 기울기는 보의 맨 아랫 점의 보의 맨 윗 점에 대한 상대 변위 및 기울기를 뜻한다. 즉 Fig. 3과 같은 지방 절점 번호 및 식 (4)의 탄성 회전 각을 사용하는 경우 보 J에서의 굽힘 변위 및 굽힘 기울기는 각각  $-\theta_n^J L^J$  및  $\theta_n^J - \theta_1^J$ 로 정의된다 (여기에서  $L^J$ 는 보 J의 길이).

본 계산의 정확도를 점검하기 위하여 에너지 보존 법칙을 사용하여 매 계산 시점에서 그 결과를 점검하였다. 총 에너지는 다음과 같이 정의되는데

$$\text{Total Energy} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (\mathbf{u}^j)^T \mathbf{K}^j \mathbf{u}^j + \text{Gravitational Energy}$$

각 계산 시점의 총 에너지와 초기 총 에너지의 차이는 항상 초기 총 에너지의 0.03% 이내를 유지하였다. 위에

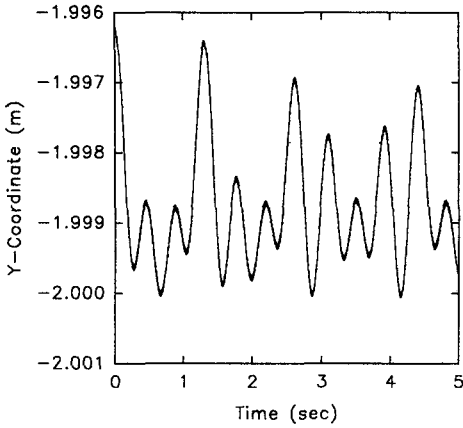


Fig. 8 Y coordinate at the tip of beam 2

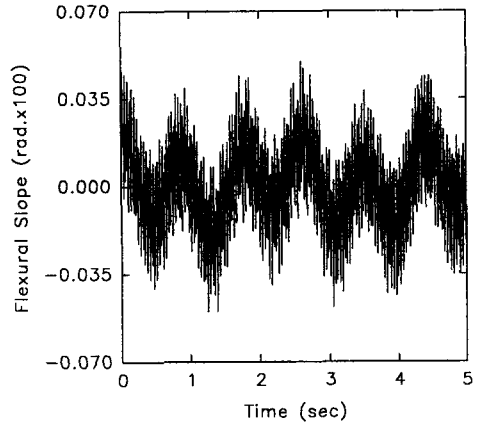


Fig. 10 Flexural slope at the tip of beam 1

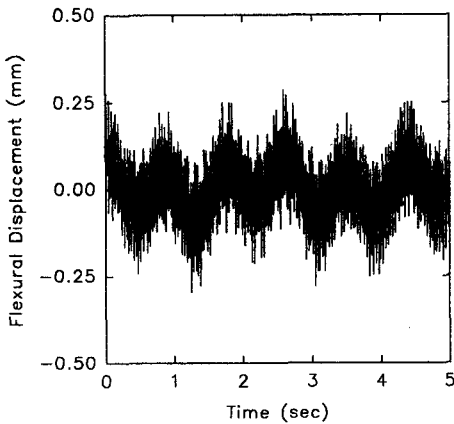


Fig. 9 Flexural displacement at the tip of beam 1

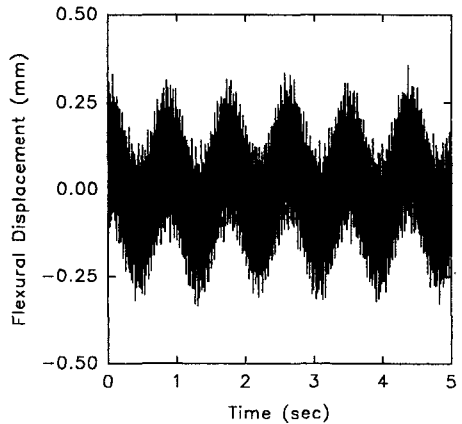


Fig. 11 Flexural displacement at the tip of beam 2

서 중력 에너지는 2개의 보가 움직이지 않고 일직선으로 정적인 평형 상태에 있을 때의 값을 0으로 하였다. 시간에 따른 각각의 에너지변화가 Fig. 13에 나와 있으며, 자세한 변화는 Fig. 14에 나와 있다. 본 계산에서는 Pentium (100 MHz, 16 MB Ram) 개인용 전산기를 사용하였으며 계산에는 약 15 sec가 소요되었다.

#### 4. 결 론

상호 연결되어 움직이는 보의 운동을 대규모 강제 운동 및 탄성 변형을 동시에 고려하여 간단하고 효율적인 방법에 의하여 해석하였다. 각 요소에서 절대 변위를 내삽하여 사용하므로 질량 행렬이 대단히 간단하고, 또한 탄성력은 보와 더불어 움직이는 지방 좌표계 및 단순한 강성

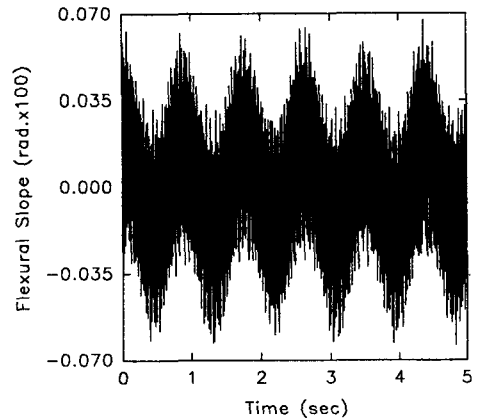


Fig. 12 Flexural slope at the tip of beam 2

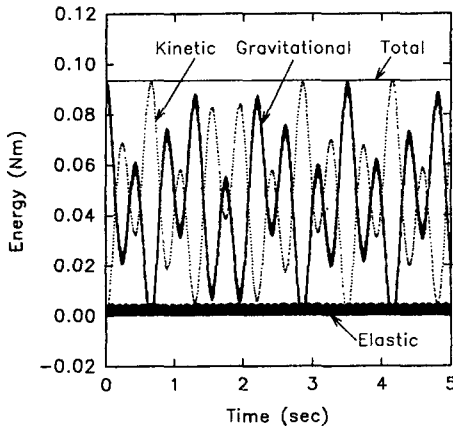


Fig. 13 Variations of the kinetic, gravitational, and elastic energies

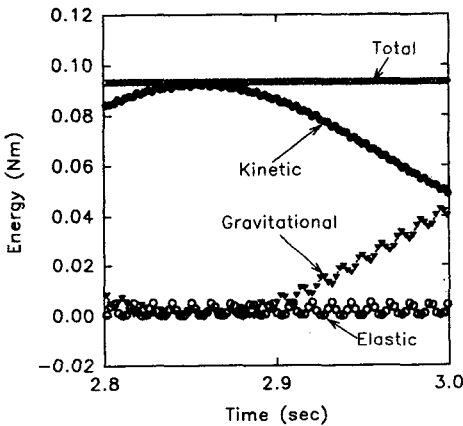


Fig. 14 Details of the variations of the kinetic, gravitational, and elastic energies

도 행렬에 의하여 간단히 계산되므로 대단히 편리한 전체 운동 방정식이 얻어진다. 특히 보가 회전 조인트에 의하여 서로 연결되어 있는 경우, 일반적으로 사용되는 기구학적 구속 방정식, 라그랑지 승수 및 보 사이의 상대 회전 각 등의 복잡한 계산이 불필요하다. 그리고 예제 계산에 의하여 본 계산의 정밀도 및 효율성을 점검하였다.

참고 문헌

- Sunda, W. and Dubowsky, S., "The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Flexible Spatial and Co-planar Linkage Systems," ASME J. Mech. Design, Vol. 103, pp. 643-651, 1981.
- Agrawal, O.P. and Shabana, A.A., "Dynamic Analysis of Multibody Systems Using Component Modes," Comput. Struct., Vol. 21, pp. 1303-1312, 1985.
- Usoro, P.B., Nadira, R. and Mahil, S.S., "A Finite Element/Lagrange Approach to Modeling Light Weight Flexible Manipulators," ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 108, pp. 198-205, 1986.
- Yoo, W.S. and Haug, E.J., "Dynamics of Flexible Mechanical Systems Using Vibration and Static Correction Modes," ASME J. Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 108, pp. 315-322, 1986.
- Simo, J.C. and Vu-Quoc, L., "On the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions-the Planar Case: Part I and II," ASME J. Appl. Mech, Vol. 53, pp. 849-863, 1986.
- Cardona, M. and Geradin, M., "A Beam Finite Element Nonlinear Theory with Finite Rotations," Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 26, pp. 2403-2438, 1988.
- Avello, A, De Jalon, J.G., and Bayo, E., "Dynamics of Flexible Multibody Systems Using Cartesian Coordinates and Large Displacement Theory," Inter. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 32, pp. 1543-1563, 1991.
- Hairer, H., Norsett, S.P., and Wanner, G., "Solving Ordinary Differential Equations I." Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
- Amirouche, F.M.L., Computational Methods in Multibody Dynamics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1992.
- De Jalon, J.G. and Bayo, E., Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems, Springer-Verlag, New York, 1994.
- Lee, K., "An Accelerated Iterative Method for the Dynamics of Constrained Multibody Systems," Computational Mechanics, Vol. 12, pp. 27-38, 1993.