論文 한국정밀공학회지 제14권 제4호 (1997년 4월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 14. No. 4. April. 1997.

견실한 비선형 마찰보상 이산제어 - 이론

강 민 식*, 김 창 재*

Robust Digital Nonlinear Friction Compensation - Theory

M.S. Kang*, C.J. Kim*

ABSTRACT

This paper suggests a new non-linear friction compensation for digital control systems. This control adopts a hysteresis nonlinear element which can introduce the phase lead of the control system to compensate the phase delay comes from the inherent time delay of a digital control. A proper Lyapunov function is selected and the Lyapunov direct method is used to prove the asymptotic stability of the suggested control.

Key Words : stick-slip friction (정지-미끄럼 마찰), limit cycle (리미트 싸이클), nonlinear friction compensation (비선형 마찰보상), hysteresis control(히스테리시스 제어), phase plane(위상평면), phase lead/ lag (위상 앞섬/지연)

1. 서 론

마찰은 상대운동을 하는 기계요소 상호간에 작용하는 저항력으로, 브레이크와 같이 절대적으로 필요한 경우도 있지만 정밀 위치제어 시스템에서는 그 영향의 최소화가 요구되고 있다. 마찰은 일반적으로 정지마찰과 운동마찰로 구분되며, 운동마찰은 쿨롱마찰과 점성마찰의 합으로 모형화 한다. 마찰의 모형화는 많은 연구가 진행되어왔는데[1,2], 대부분 고속구간에서는 잘 정의되어있으나, 저속구간에서, 특히 정지-미끄럼 (stick-slip) 현상이 발생하는 영역에서는 아직 정확한 모델이 없다. 위치제어시 기준위치에서는 영속도 근방이므로 정지-미끄럼현상은 제어성능을 저하시키는 요인이 된다. 이러한 정지-미끄럼 마찰계의 위치제어에 관한 많은 연구가 진행되어 왔으며[3,4,5], 특히, Southward의 비선형 마찰보상제어 [5]는 1-자유도계의 위치제어시 정상상태 오차와 정지-미끄럼 현상을 제거하여 위상평면 원점의 Asymptotic 안정성을 보장한다. 이 방법은 정량적으로 고정된 마찰 대신 마찰의 범위를 설정하고 범위의 한계치를 이용하므로 다른 모형기준 제어방법에 비해 견실하고 적용이 용이하다. Southward의 방법은 연속계에서 제안된 방법으로 시간지연계나 이산제어계에 적용할 경우 Limit Cycle을 유발하게 된다. 본 논문에서는 Southward 제어기에 대한 소개와 이산제어계에 적용시 발생하는 불안정성을 해석하고, 이 불안정성을 해결 할 수 있는 견실한 제어기 설계방법을 제안한다. 이산제어에서 Southward 제어의 Limit

* 국방과학연구소 1-1-4

Cycle 발생과 견실제어기의 안정성은 Lyapunov Direct 방법을 이용하여 증명한다. 이 결과는 실제 구동장치에 적용하여 확인하였으며, 그 구체적 내용은 후속 논문에 수록할 예정이다[6].

2. 마찰 모델

관성량 J를 갖는 회전체의 운동방정식은

$$J\ddot{\theta} = -T_d + T_c \qquad (1)$$
$$\omega = \dot{\theta}$$

식(1)에서 θ는 회전각, ω는 회전속도, T_d는 마찰력, T_c는 제어입력을 나타낸다. 마찰력 T_d는 정지마찰력, $T_{stick}(T_c)$와 운동마찰력, $T_{slip}(\omega)$의 합이며 다음식으로 표현된다.

$$T_d = T_{slip}(\omega)[\lambda(\omega)] + T_{stick}(T_c)[1-\lambda(\omega)] \qquad (2.1)$$

$$\lambda(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

정지/미끄럼 마찰력은 다음과 같이 정의된다.

$$T_{stick}(T_c) = \begin{cases} T_s^+ & 0 < T_s^+ < T_c \\ T_c & T_s^- \le T_c \le T_s^+ \\ T_s^- & T_c < T_s^- < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

$$T_{slip}(\omega) = T_d^+(\omega)\mu(\omega) + T_d^-(\omega)\mu(-\omega) \qquad (4.1)$$

$$\mu(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (4.2)$$

여기서, T_s^+, T_s^-는 정지마찰력의 극한값이며, T_d^+와 T_d^-는 각각 양과 음의 속도에서의 미끄럼 마찰력으로 비대칭으로 가정한다. $\mu(\cdot)$는 우연속(right-continuous) Heavyside 계단함수이다. 일반적으로 미끄럼 마찰력은 쿨롱마찰과 점성마찰로 모형화 할 수 있는데 정확한 계수를 알기 어렵고, 또한 위치에 따라 변할 수 있는 값이므로 Fig.1과 같이 각 속도영역에서 두개의 직선으로 이루어진 영역내에 존재한다고 가정한다[5].

$$b_0\omega \le T_d^+(\omega) \le T_0^+ + b_1\omega, \quad \forall\omega > 0$$
$$T_0^- + b_1\omega \le T_d^-(\omega) \le b_0\omega, \quad \forall\omega < 0 \qquad (5)$$

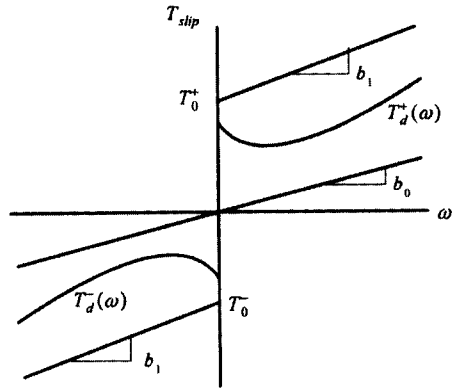

Fig. 1. Slip friction model

식(5)에서 $b_1 \ge b_0 > 0$, $T_s^+ > T_0^+ > 0$, $T_s^- < T_0^- < 0$ 라고 가정하자.

3. Southward 비선형 마찰보상 제어 [5]

앞의 정지-미끄럼 마찰계에 다음과 같은 선형 비례-미분제어기를 적용하면

$$T_c = -K_p\theta - K_d\omega \qquad (6)$$

여기서 $K_p(>0)$와 $K_d(>0)$는 각각 비례, 미분제어기 게인이다. 폐회로의 운동방정식은

$$J\ddot{\theta} + K_d\omega + K_p\theta = -T_d \qquad (7)$$

이 응답은 안정하게 정상상태에 도달되며, 정상상태에서는 비례제어입력과 정지마찰력이 힘의 평형을 이루는 상태이므로 다음 조건을 만족하게 된다.

$$K_p\theta = -T_{stick}(T_c) \qquad (8)$$

따라서 정상상태의 응답은 평형범위 (equilibrium region), E_{PD}내에 존재하게된다[4,5].

$$E_{PD} = \{(\theta,\omega)|\omega = 0,\ \theta_L \le \theta \le \theta_H\} \qquad (9)$$

여기서

$$\theta_L = -\left(\frac{T_s^+}{K_p}\right) < 0, \quad \theta_H = -\left(\frac{T_s^-}{K_p}\right) > 0 \qquad (10)$$

비례-적분-미분제어기를 적용할 경우 정지마찰력이 쿨롱 마찰력 보다 클 경우 정지-미끄럼 현상이 발생한다[4]. Southward의 비선형 마찰보상 제어기는 비례-미분제어의 정상상태 오차나, 비례-적분-미분제어의 정지-미끄럼 현상을 제거하여 위상평면의 원점 $(\theta = 0,\ \omega = 0)$을 안정하게 하며 특히, 식(5)로 정의되는 미끄럼 마찰에 대해 안정성을 보장하는 견실한 제어방법이다. 이 제어기는 다음 식으로 주어진다[5].

$$T_c = -K_d\omega - T_n \tag{11}$$

식(11)의 우변 마지막 항은 비선형 마찰보상력으로 Fig.2와 같이 정의되며 정리하면

$$T_n = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & 0 < \theta \le \tilde{\theta}_H \\ 0 & \theta = 0 \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \le \theta < 0 \\ K_P\theta & otherwise \end{cases} \tag{12}$$

$\tilde{\theta}_L$와 $\tilde{\theta}_H$는 Fig.2와 같이 비선형 제어범위의 경계위치를 나타내며 그 절대크기는 각각 θ_L와 θ_H의 절대 크기보다 큰 값으로 택한다. 또한 마찰보상력 $\tilde{T}_s^+$ $\tilde{T}_s^-$의 절대 크기는 각각 정지마찰력 T_s^+ T_s^-의 절대 크기보다 크게 취하므로 정지-미끄럼현상이 발생하지 않으며, 응답은 원점을 향해 연속적으로 이동한다. 이 방법은 위상평면 원점의 Asymptotic안정성을 보장한다[5].

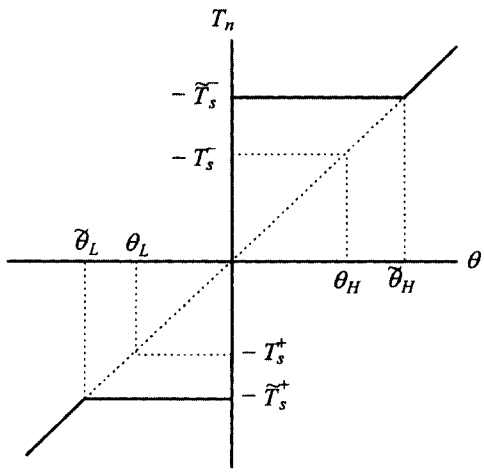

Fig. 2 Nonlinear friction compensation force of the Southward control

식(11),(12)의 Southword 비선형 마찰보상제어를 연속시간 속도제어 루프와 이산위치제어로 구현시 폐회로 안정성을 해석해 보자.

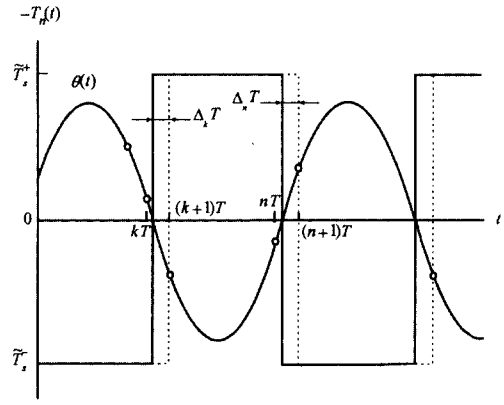

Fig. 3 Nonlinear Compensation force of the Southward control in continuous and digital controls (solid: continuous, dotted: digital)

선형제어구간 $\theta_l \equiv \left\{\theta \middle| \theta < \tilde{\theta}_L,\ \tilde{\theta}_H < \theta\right\}$에서는 폐회로가 안정하도록 비례-미분제어기를 설계했다고 가정하고, 비선형 제어구간 $\theta_n \equiv \left\{\theta \middle| \tilde{\theta}_L < \theta < \tilde{\theta}_H\right\}$에 국한하여 안정성을 고찰하자. Fig.3에서와 같이 비선형 제어구간 θ_n내에 조화함수로 나타낼 수 있는 임의의 응답이 있을때 Southward의 비선형 마찰보상력은 식(12)로 부터 실선과 같이 Bang Bang 형태로 나타나게 된다. 만일 이 제어를 이산제어계에 적용할 경우 비선형 마찰보상력은 이산제어의 샘플-홀드 (sample-and-hold) 특성에 따라 점선과 같이 나타나므로, 연속시간계에서와 비교 시간지연을 갖게된다. Fig.3에서 T는 이산제어에서의 샘플링 구간이며 $(k+1)T$,.. nT, $(n+1)T$는 샘플링 순간을 나타낸다. 이와 같은 시간지연의 크기는 응답특성과 샘플링 간격에 따라 달라지나, 항상 샘플링 간격보다 작다. Fig.3과 같은 현상의 정성적 특성은 Fig.4의 비선형 제어특성으로 변환할 수 있다. Fig.4에서 $\varepsilon_H(>0)$와 $\varepsilon_L(<0)$은 Fig.3에서 응답이 $\theta = 0$점을 지난 직후 샘플된 물체의 위치에 해당하며 정량적으로 일정한 값은 아니지만 시간지연 때문에 항상 존재한다.

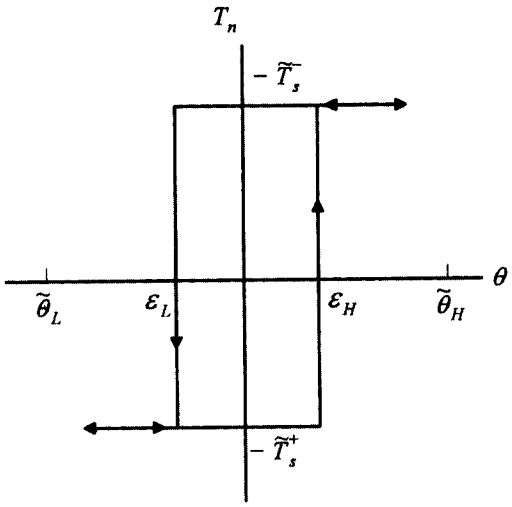

Fig. 4 Equivalent compensation force of the Southward control in digital control

불안정성 해석에는 정성적인 특성만 고려하면 되므로 Fig.4를 이용하여 폐회로의 불안정성을 해석하자.

Fig.4의 비선형 마찰보상 제어입력 T_n은 비선형 제어구간 θ_n에서 다음과 같이 정의된다.

$$i)\ \omega \geq 0 \text{ 일때 } T_n = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & \varepsilon_H < \theta < \tilde{\theta}_H \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L < \theta \leq \varepsilon_H \end{cases} \quad (13.1)$$

$$ii)\ \omega \leq 0 \text{ 일때 } T_n = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & \varepsilon_H < \theta < \tilde{\theta}_H \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L < \theta \leq \varepsilon_L \end{cases} \quad (13.2)$$

$\omega = 0$일때 T_n는 $\omega = 0$가 되기 직전과 직후의 속도 부호에 따라 식(13.1) 이나 (13.2)를 따른다. 식(13)의 제어를 적용하면 식(1)의 운동방정식 우항은 미끄럼 마찰과 Fig.4의 제어입력 특성에서 발생되는 불연속면 (surface of discontinuity) S_1이 존재한다.

$$S_1 = [(\theta,\omega) \in R^2 \mid \{\omega = 0\} \cup \{\theta = \varepsilon_H,\ \omega > 0\} \cup \{\theta = \varepsilon_L, \omega < 0\}] \quad (14)$$

불안정성 해석

정리 1 : 식(1)로 주어진 제어계를 식 (13)과 같이 제어하면 위상평면 원점은 불안정하다.

증명 : 위상평면 원점의 불안정성을 증명하기 위해 위상평면의 원점을 포함하는 비선형구간인 θ_n에서만 정의된 Lyapunov 함수를 선정하자.

$$V(\theta,\omega) = (1/2)J\omega^2 + g(\theta),\ \theta \in \theta_n \quad (15)$$

여기서 $$g(\theta) = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- \theta & 0 \leq \theta < \tilde{\theta}_H \\ -\tilde{T}_s^+ \theta & \tilde{\theta}_L < \theta \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

식(15)와 (16)에서 이 Lyapunov 함수는 θ_n 영역에서 양의 한정이고 θ 와 ω 에 대해 연속이다. 이 Lyapunov 함수를 불연속면 S_1를 제외한 전 영역에서 시간미분을 구하면

$$\begin{aligned} \dot{V}(\theta,\omega) &= \omega(T_c - T_d) + g'(\theta)\omega \\ &= -K_d\omega^2 - \omega T_{slip}\lambda(\omega) + \omega\{g'(\omega) - T_n\}, \\ &\quad \forall\theta \in \theta_n,\ \theta \notin S_1 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $$g'(\theta) = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & 0 < \theta < \tilde{\theta}_H \\ \textit{undefined} & \theta = 0 \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L < \theta < \tilde{\theta}_H \end{cases} \quad (18)$$

이 Lyapunov 함수의 시간미분이 위상평면 원점을 포함하는 임의의 영역에서 양한정이면 위상평면 원점은 불안정하다[7].

식(13), (18)을 식(17)에 대입하여 정리하면

$$i)\omega \geq 0 \text{ 일때 } \dot{V}(\theta,\omega) = \begin{cases} \omega\{-K_d\omega - T_d^+(\omega) - \tilde{T}_s^- + \tilde{T}_s^+\} & 0 < \theta \leq \varepsilon_H \\ \textit{undefined} & \theta = 0 \\ -\omega\{K_d\omega + T_d^+(\omega)\} & \textit{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

식(19)에서 $0 < \theta \leq \varepsilon_H$ 인 경우 다음 식(20)으로 정의되는 속도 ω^+가 양의 값을 갖게되면 $\dot{V}(\theta,\omega)$는 속도 범위 $0 < \omega < \omega^+$ 에서 양의 한정이 된다.

$$\omega^+ = \frac{1}{K_d}\left[\left\{\tilde{T}_s^+ - T_d^+(\omega)\right\} - \tilde{T}_s^-\right] \quad (20)$$

식 (20)의 우항은 마찰모델의 관계로부터 양의 값을 갖

는 범위가 존재하므로 양의 ω^+가 존재한다. $\theta = 0$일때의 미분은 Dini-derivates[5] $D^*V(\theta,\omega)$를 적용하면 $D^*V(\theta,\omega)$는 다음 영역 P^+에서 양의 한정이 된다.

$$P^+ = \left\{(\theta,\omega)\in R^2 \middle| 0 \le \theta < \varepsilon_H,\ 0 \le \omega < \omega^+\right\} \quad (21)$$

$$\text{ii)}\omega \le 0 \text{일때}\ \dot{V}(\theta,\omega) = \begin{cases} \omega\{-K_d\omega - T_d^-(\omega) + \tilde{T}_s^- - \tilde{T}_s^+\} & \varepsilon_L \le \theta < 0 \\ undefined & \theta = 0 \\ -\omega\{K_d\omega + T_d^-(\omega)\} & otherwise \end{cases} \quad (22)$$

식(22)에서 $\varepsilon_L \le \theta < 0$인 경우 다음 식(23)으로 정의되는 속도 ω^-가 음의 값을 갖게되면 $\dot{V}(\theta,\omega)$는 속도 범위 $\omega^- < \omega \le 0$에서 양의 한정이 된다.

$$\omega^- = -\frac{1}{K_d}\left[\{T_d^-(\omega) - \tilde{T}_s^-\} + \tilde{T}_s^+\right] \quad (23)$$

식(23)의 우항은 식(20)에서와 같이 마찰모델의 관계에서 음의 값을 갖는 범위가 존재하므로 음의 ω^-가 존재한다. $\theta = 0$일때의 $D^*V(\theta,\omega)$는 다음 영역 P^-에서 양의 한정이 된다.

$$P^- = \{(\theta,\omega)\in R^2 | \varepsilon_L < \theta \le 0,\ \omega^- < \omega \le 0\} \quad (24)$$

이상의 결과를 종합하면 양한정인 Lyapunov 함수, 식(15)는 식(25)로 주어지는 위상평면 $P = P^+ + P^-$에서 그 시간미분이 양의 한정이므로

$$P = \{(\theta,\omega)\in R^2 | \varepsilon_L \le \theta \le \varepsilon_H,\ \omega^- < \omega < \omega^+\} \quad (25)$$

위상평면 원점은 불안정하다. Q.E.D.

위의 증명으로부터 Southward의 비선형 마찰보상제어는 이산시간 제어에서 위상평면 원점의 불안정성을 유발함을 알 수 있다. 그러나 위의 불안정성은 비선형 제어구간 내에 한정된 것이며, 선형제어구간에서는 비례-미분제어로 안정하므로 결국 폐회로 응답은 안정한 Limit Cycle을 보이게 된다.

4. 히스테리시스 비선형 마찰보상제어

이산제어에서 Southward 제어의 불안정성을 해결하는 견실한 제어기 설계방법 제시를 위해 우선 히스테리시스 마찰보상제어기를 제안코저 한다. 이 제어기의 형태는 식(11)과 동일하지만 단, 비선형 마찰보상기는 Fig.5와 식(12)로 정의한다.

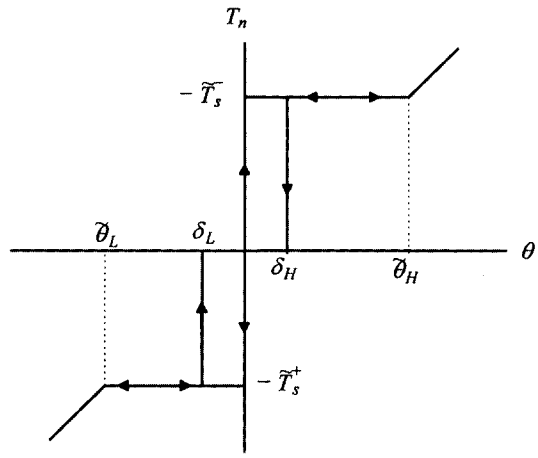

Fig. 5. Compensation force of the hysteresis control

i) $\omega > 0$ 일때

$$T_n = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & 0 < \theta \le \tilde{\theta}_H \\ 0 & \delta_L \le \theta \le 0 \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \le \theta < \delta_L \\ K_P\theta & otherwise \end{cases} \quad (26.1)$$

ii) $\omega < 0$ 일때

$$T_n = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & \delta_H < \theta \le \tilde{\theta}_H \\ 0 & 0 \le \theta \le \delta_H \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \le \theta < 0 \\ K_P\theta & otherwise \end{cases} \quad (26.2)$$

iii) $\omega = 0$ 일때

$$T_n = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & \delta_H < \theta \le \tilde{\theta}_H \\ 0 & \delta_L \le \theta \le \delta_H \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \le \theta < \delta_L \\ K_P\theta & otherwise \end{cases} \quad (26.3)$$

여기서 $\delta_H < \bar{\theta}_H$, $\bar{\theta}_L < \delta_L$로 가정한다. 이 제어기에 의한 비선형 마찰보상력은 Fig.3에서 $kT \le t < (k+1)T$, $nT \le t < (n+1)T$ 구간에서는 항상 '영'이므로 실선으로 나타낸 Southward의 비선형 마찰 보상력에 비해 위상앞섬 (phase lead)을 갖게된다.

4.1 위상평면 응답

이 히스테리시스 제어의 위상평면 응답을 보자. 식(1)의 운동방정식 우항은 미끄럼 마찰과 Fig.5의 마찰보상 입력에서 발생하는 불연속 때문에 다음의 불연속면를 갖는다.

$$S_2 = \left[(\theta,\omega) \in R^2 \middle| \begin{matrix} \{\theta\omega = 0\} \cup \\ \{\theta = \delta_H, \omega < 0\} \cup \{\theta = \delta_L,\ \omega > 0\} \end{matrix} \right] \quad (27)$$

따라서 위상평면은 Fig.6과 같이 불연속면을 포함하지 않는 6개의 개방영역 (open region)으로 구분할 수 있다. 각 개방영역에서 식(1)의 우항이 연속이고 Lipschitz 조건을 만족하므로 운동방정식은 초기조건에 따른 고유의 연속응답이 존재하며, 불연속면 S_2이외의 영역에서는 미분연속의 특성을 갖는다.

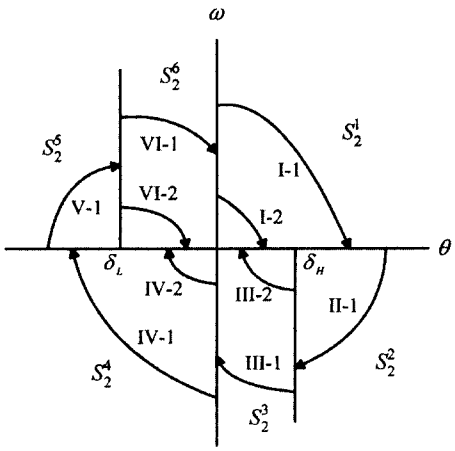

Fig. 6. Phase plane response of the hysteresis control

위상평면 각 영역에서 응답특성을 구해보자.

1) S_2^1에서의 응답

이 영역에서 운동방정식은

$$J\ddot{\theta} + K_d\omega = \tilde{T}_s^- - T_d^+(\omega) \le \tilde{T}_s^- - b_0\omega \quad (28)$$

따라서

$$J\ddot{\theta} + (K_d + b_0)\omega \le \tilde{T}_s^- \le 0 \quad (29)$$

식(29)는 속도의 단순감소를 의미하므로 궤적은 Fig.6의 I-1 또는 I-2의 형태를 갖는다. 궤적 I-1과 I-2는 속도 $\omega(t)|_{t=t^*} = 0$일때의 위치 $\theta(t^*)$에 따라 구분한 것으로 궤적 I-1은 $\theta(t^*) > \delta_H$, 궤적 I-2는 $0 \le \theta(t^*) \le \delta_H$ 인 경우이다. 궤적 I-1은 θ-축을 통과하여 S_2^2 영역으로 천이되며, 궤적 I-2 는 식(26.3)으로부터 제어입력 $T_c(t^*) = 0$이 되므로 $\theta(t^*)$ 에서 정지하게 된다. 따라서 이 영역에서 구간 $\{(\theta,\omega) | 0 \le \theta \le \delta_H, \omega = 0\}$는 평형구간이 될 수 있다.

2) S_2^2에서의 응답

이 영역에서 운동방정식은

$$J\ddot{\theta} + K_d\omega = \tilde{T}_s^- - T_d^-(\omega) \le \tilde{T}_s^- - T_0^- - b_1\omega \quad (30)$$

따라서

$$J\ddot{\theta} + (K_d + b_1)\omega \le \tilde{T}_s^- - T_0^- \le \tilde{T}_s^- - T_s^- < 0 \quad (31)$$

식(31)은 음의 속도로 이동하는 물체에 음의 외부력이 작용하므로 속도는 단순감소한다. 따라서 궤적은 Fig.6의 궤적 II-1과 같이 시계방향으로 불연속 $\{(\theta,\omega) | \theta = \delta_H, \omega < 0\}$을 통과 S_2^3영역으로 천이된다.

3) S_2^3에서의 응답

이 영역에서는 비선형 마찰보상 제어입력이 영이므로 운동방정식은

$$J\ddot{\theta} + K_d\omega = -T_d^-(\omega) \ge -b_0\omega \quad (32)$$

따라서

$$J\ddot{\theta} + (K_d + b_0)\omega \ge 0 \quad (33)$$

식(33)의 응답은 Fig.6의 III-1또는 III-2로 구분된다. 궤적 III-1은 응답이 S_2^3영역을 벗어나기 직전 음의 속도를 갖는 경우이고, 궤적 III-2는 응답이 S_2^3영역 내에서 속도가 영에 도달된 경우이다. 궤적 III-1은 S_2^4영역으로 천이되며, 궤적 III-2는 궤적 I-2와 같이 속도가 $\omega(t) = 0$ 일 경우 식(26.3)에 따라 제어입력이 영이므로 θ-축과 만난 점에서 정지하게 된다. 따라서 이 영역

에서 구간 $\{(\theta,\omega)|0 \le \theta \le \delta_H, \omega = 0\}$ 는 평형구간이 될 수 있다.

위의 위상평면 응답특성 해석을 적용하면, S_2^4, S_2^5, S_2^6 에서의 응답특성이 Fig.6과 같이 됨을 증명할 수 있다. Fig.6에서 응답 IV-1, V-1, VI-1은 불연속면을 통과하여 다른 개방영역으로 진행하며, 응답 IV-2와 VI-2는 $\{(\theta,\omega)|\delta_L \le \theta \le 0, \omega = 0\}$ 구간과 만나게 되며 이 지점에서 식(26.3)에 따라 제어입력이 '영'이 되어 정지하게 된다.

이상의 위상평면 응답특성으로부터 궤적은 하나의 개방영역에서 불연속면을 통과하여 다른 개방영역으로 천이되며, 항상 시계방향으로 진행한다. 특히, 궤적이 구간 $\{(\theta,\omega)|\delta_L \le \theta \le \delta_H, \omega = 0\}$ 과 교차하는 점에서는 정지하므로 이 구간은 평형구간임을 알 수 있다.

이런 특성을 갖는 제어방법을 적용했을 때 안정성을 해석하자.

4.2 안정성 해석

정리2 : 식(1)로 주어진 제어계를 식(11), (26)과 같이 제어하면 위상평면상에서 구간 S_δ 는 Asymptotic 안정하다.

$$S_\delta = \{(\theta,\omega) \in R^2 | \delta_L \le \theta \le \delta_H, \ \omega = 0\} \tag{34}$$

증명 : 다음과 같은 Lyapunov 함수를 선정하자.

$$V(\theta,\omega) = (1/2)J\omega^2 + g(\theta) \tag{35}$$

여기서 $g(\theta)$ 는 Fig.7과 같이 정의되며, 다음 식으로 표현된다.

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}K_P\left(\theta^2 + \tilde{\theta}_H^2 - 2\tilde{\theta}_H\delta_H\right) & \tilde{\theta}_H < \theta \\ K_P\tilde{\theta}_H(\theta - \delta_H) & \delta_H < \theta \le \tilde{\theta}_H \\ 0 & \delta_L \le \theta \le \delta_H \\ K_P\tilde{\theta}_L(\theta - \delta_L) & \tilde{\theta}_L \le \theta < \delta_L \\ \frac{1}{2}K_P\left(\theta^2 + \tilde{\theta}_L^2 - 2\tilde{\theta}_L\delta_L\right) & \theta < \tilde{\theta}_L \end{cases} \tag{36}$$

식(35)와 (36)으로 정의된 Lyapunov 함수는 θ 와 ω 에 대해 연속이고, 구간 S_δ 에서는 '영', S_δ 이외의 구간에서는 '양'이므로 S_δ 에 대해 양의 한정이다. 또한 식(27)의 불연속면 S_2를 제외한 전 영역에서의 시간미분은 연속인 특성을 갖는다. 즉,

$$\dot{V}(\theta,\omega) = -K_d\omega^2 - \omega T_{slip}(\omega)\lambda(\omega) + \omega\{g'(\theta) - T_n\}, \quad \forall(\theta,\omega) \notin S_2 \tag{37}$$

여기서

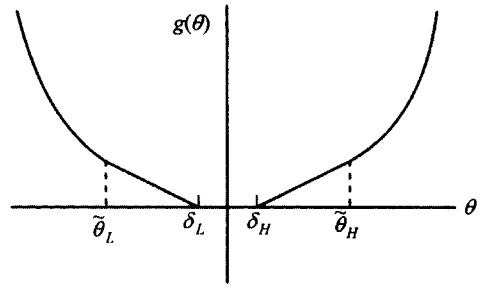

Fig. 7. Definition of the function $g(\theta)$

$$g'(\theta) = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & \delta_H < \theta \le \tilde{\theta}_H \\ undefined & \theta = \delta_H \\ 0 & \delta_L < \theta < \delta_H \\ undefined & \theta = \delta_L \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \le \theta < \delta_L \\ K_p\theta & otherwise \end{cases} \tag{38}$$

식(37)의 시간미분이 영역 S_δ 에 대해 양의 한정이면 S_δ 는 Asymptotic 안정하다[8].

식(37)의 우변 마지막 항은

i) $\omega > 0$ 일때

$$g'(\theta) - T_n = \begin{cases} \tilde{T}_s^- & 0 < \theta < \delta_H \\ undefined & \theta = \delta_H, \ \theta = \delta_L \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{39}$$

따라서

$$g'(\theta) - T_n \le 0, \ \forall\{(\theta,\omega)|(\theta,\omega) \notin S_2, \omega > 0\} \tag{40}$$

ii) $\omega < 0$ 일때

$$g'(\theta) - T_n = \begin{cases} \tilde{T}_s^+ & \delta_L < \theta < 0 \\ undefined & \theta = \delta_H, \ \theta = \delta_L \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{41}$$

따라서

$$g'(\theta) - T_n \geq 0, \ \forall\{(\theta,\omega) | (\theta,\omega) \notin S_2, \omega < 0\} \quad (42)$$

iii) $\omega = 0$ 일때

$$g'(\theta) - T_n = \begin{Bmatrix} undefined & \theta = \delta_L, \ \theta = \delta_H \\ 0 & otherwise \end{Bmatrix} \quad (43)$$

따라서

$$g'(\theta) - T_n = 0, \ \forall\{(\theta,\omega) | (\theta,\omega) \notin S_2, \omega = 0\} \quad (44)$$

식(42), (44)를 식(37)에 대입하면 $\dot{V}(\theta,\omega)$는 불연속면 S_2 를 제외한 전 범위에서 음의 반한정이다. 불연속면에서 $\dot{V}(\theta,\omega)$는 불연속이므로 S_2 외부로 부터 좌,우에서 S_2 에 접근시 $\dot{V}(\theta,\omega)$의 극한값으로 정의되는 Dini-derivates를 이용한다[5]. Dini-derivates는 S_2 를 제외한 영역에서는 $\dot{V}(\theta,\omega)$와 동일하므로 $D^+V(\theta,\omega)$는 전 위상평면에서 음의 반한정이 되어 계는 안정하다. 식(37)에서 $\dot{V}(\theta,\omega) = 0$ 이 되는 조건은 $\omega = 0$일 경우인데, 앞의 위상평면 해석결과 구간 $\{(\theta,\omega) | \theta < \delta_L, \delta_H < \theta, \omega = 0\}$ 에서는 응답이 하나의 개방영역에서 θ-축을 통과하여 다른 개방영역으로 진행하므로 위의 영역은 평형점이 될 수 없으며, 식(34)로 주어지는 S_δ 에서 평형상태에 도달되므로 영역 S_δ 는 Asymptotic 안정한 평형구간이 된다. Q.E.D.

히스테리시스 제어기를 이용한 제어계의 기술함수 (describing function) 해석을 해보면 히스테리시스 제어기가 Southward 제어기에 비해 위상앞섬 (phase lead) 효과가 있음을 확인할 수 있으며, 이 위상앞섬이 계의 위상여유 (phase margin)을 증가시켜 계를 더욱 안정되게 만든다. 단, 이때 δ_H, δ_L 로 정의되는 범위내에 존재하는 정상상태 위치오차가 발생한다[6].

5. 견실한 비선형 마찰보상 이산제어

앞의 히스테리시스 마찰보상기의 위상앞섬 효과를 이용하면 시간지연에서 발생하는 위상지연을 상쇄시킬 수 있으므로 시간지연계나 이산제어에서 안정된 응답을 얻을 수 있다. Fig.7과 같이 이산위치제어 블럭에 히스테리시스 형 비선형 마찰보상기를 적용한 제어 형태를 견실한 비선형 마찰보상기라 칭한다. Fig.3에서 논의 한 바와 같이 Fig.8의 제어기는 Fig.9와 같이 히스테리시스제어기 출력에 시간지연이 있는 제어계로 변환할 수 있다. 이 시간지연의 크기는 제어하는 중 일정치 않고 변화하는 값이지만 항상 존재하며 그 크기는 샘플링 시간간격보다 크지 않다. 따라서 Fig.9는 Fig.8의 이산제어 모델을 정성적 특성을 유지하는 형태로 변환한 연속제어 모델에 해당한다. 단, 시간지연 는 Fig.3에서 $\Delta_k T$ 또는 $\Delta_n T$ 에 해당하는 값으로 그 크기가 일정치는 않지만 이산제어의 특성상 항상 다음의 범위내에 존재한다.

$$0 \leq \tau \leq T \quad (45)$$

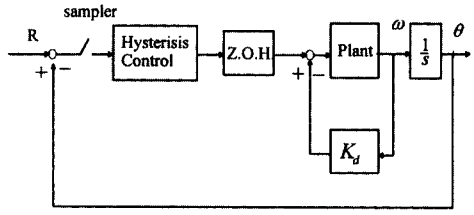

Fig. 8 Block diagram of the robust friction compensation

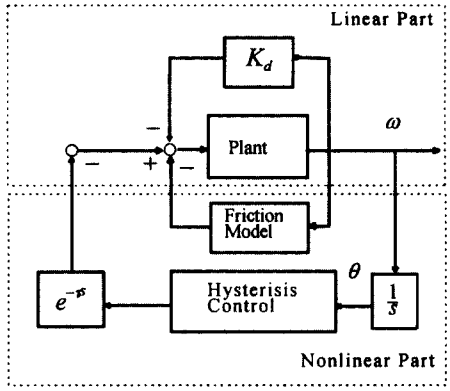

Fig. 9 Continuous time model of the robust friction compensation

시간지연 τ가 영인 경우는 히스테리시스 마찰보상제어와 동일하다. 제어계의 안정성은 Fig.5의 히스테리시스 마찰보상기 파라미터인 δ_H, δ_L 와 시간지연 크기 τ에 따라 결정되며, 주어진 샘플링 시간간격에 대해 계의 안정성을 보장하는 δ_H, δ_L 가 존재한다. δ_H, δ_L 의 설

계는 해석적 방법을 통해 결정하기는 어려우며, 기술함수 해석이나 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 결정할 수 있다. 단, $\tau = T$로 가정하고 설계한 δ_H, δ_L 은 이산제어에서 반드시 안정하다.

6. 결 론

정지-미끄럼 마찰계의 위치제어에서 Southward의 비선형 마찰보상 제어는 위상평면 원점의 Asymptotic 안정성을 보장하지만 시간지연계나 이산제어계에서는 불안정하여 Limit Cycle이 발생한다. 이 불안정성은 제어계의 위상여유를 증가시킬 수 있는 히스테리시스 제어기를 이용한 견실제어에 의해 안정화 시킬 수 있다. 위의 불안정성과 안정성은 적절히 선정한 Lyapunov 함수와 Lyapunov의 안정성 정리를 이용하여 증명되었다. 히스테리시스 제어기의 위상앞섬 효과는 이산제어계의 시간지연에서 오는 위상지연을 보상 할 수 있으므로 정지-미끄럼 마찰계의 견실한 위치제어를 달성할 수 있다. 단, 이 제어기는 설계인자인 δ_H, δ_L 로 규정되는 범위내의 정상상태위치오차를 갖게된다. δ_H, δ_L 를 감소시킬수록 오차범위는 감소하나 위상여유도가 감소하여 불안정한계에 가까워지므로 Limit Cycle이 발생하지 않는 범위 중 작은 값을 선정하는 것이 좋다. 이 제어기는 실제 구동계에 적용하여 앞의 이론과 일치하는 결과를 얻었으며, 구체적 내용은 후속 논문에 수록할 예정이다.

참 고 문 헌

1. Tustin, A., "The Effect of Backlash and of Speed Dependent Friction on the Stability of Closed-loop Systems," IEE Journal, vol. 94, pp. 143-151, 1947.
2. Karnopp, D., " ,Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems," ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 107, pp. 100-103, 1985.
3. Canudas, C., Astrom, K.J., and Braun K., "Adative Friction Compensation in DC-Motor Drives," IEEE Journal of Robotics and Automation, vol. RA-3, no.6, pp.681-685, 1987.
4. Radcliff, C.J. and Southward, S.C.," A Property of Stick-Slip Friction Models Which Promotes Limit Cycle Generation," proc. American Control Conference, ACC, pp.1198-1203, 1990.
5. Southward, S.C., Radcliff, C.J., and Mac-Cluer, "Robust Nonlinear Stick-Slip Friction Compensation," ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 113, pp. 639-645, 1991.
6. 강민식, 송원길, 김창재, " 견실한 비선형 마찰보상 이산제어," 한국정밀공학회 '96년도추계학술대회 논문집, pp. 987-993, 1996.
7. Slotine, J.E. and Li, W., Applied Nonlinear Control, Prentice Hall , pp.117-120, 1991.
8. Bhatia, N.P., and , G.P., Stability Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, p.135, 1970.