論文 한국정밀공학회지 제14권 제1호 (1997년 1월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 14. No.1. JANUARY. 1997.

복수입력 시간지연 시스템의 유리근사화

황 이 철*, 박 경 택**

Rational Approximation of Multiple Input Delay Systems

I Cheol HWANG*, Kyoung Taik PARK**

ABSTRACT

In this paper, we consider the rational approximation of multiple input delay systems. The method of computing Hankel singular values and vectors is firstly introduced, where explicitly shows the structure of the corresponding Hankel singular vectors. Secondly, rational approximants are obtained from output normal realizations, which are constructed by Hankel singular values and vectors. As a result, it is shown that rational approximants by output normal realization preserve intrinsic properties of time delay systems than Padé approximants.

Key Words :Hankel Operator(한켈작용소), Hankel Singular Value(한켈특이치), Schmidt Pair (슈미터쌍), Gramian(그라미안), Semi Separable Kernel Function(준분리핵함수), Transcendental Equation(초월방정식), Output Normal Realization(출력정규실현), Rational Approximation (유리근사화).

1. 서 론

안정한 다이나믹 시스템을 입출력 함수의 선형작용소로 기술한다면, 시스템의 근사화는 함수공간 상에서 정의되는 작용소의 최적근사화 문제로 간주할 수 있다. 시스템을 하나의 작용소로 간주하여 오차노음을 최소화하는 문제로서 특이치분해나 최소2승법 등이 오래 전부터 연구되어 왔으나, 그들은 시스템을 근사화하는데 있어 최적이라고 평가하기가 어려웠다. 왜냐하면 시스템 차수와 작용소 랭크 사이의 관계를 명확하게 기술할 수 없었기 때문이다. 그러나 시스템을 과거입력과 미래출력에 대한작용소 즉 한켈작용소로 기술할 경우, 한켈작용소의 랭크(치역의 차원)가 시스템의 차수와 일치하므로 함수공간상에서 시스템의 최적근사화 이론은 쉽게 전개될 수 있다[1,2]. 더욱이 한켈작용소는 모델링오차나 외란 등의 불확실성을 고려하는 현대 강인제어 기법 가운데 가장 중심적인

* 부산대학교 공과대학 기계공학부
** 한국기계연구원 자동화연구부

역할을 하는 H^∞최적제어에 있어서도 중요한 역할을 한다. H^∞최적제어를 Nehari 및 Sarason 정리를 이용하여 해를 도출할 경우, 달성가능한 성능의 하한치는 어떤 한켈작용소의 최대특이치와 같으며, 최적보상기는 그에 상응하는 최대특이벡터에 의하여 설계된다[3].

본 연구에서는 한켈작용소의 특이치와 특이벡터들을 이용하여 입력에 복수의 시간지연을 가지는 시스템에 관한 유리근사화 문제를 고려한다. 이러한 문제는 무한차원시스템의 유리근사화 문제로 일반화되어 많은 연구가 수행되어 왔으며[4,5], 현재까지 최적의근사법으로 잘 알려져 있다. 특히 문헌[5]에서는 큰 값의 순서로 추출한 유한개의 한켈특이치와 그들에 상응하는 한켈특이벡터들을 이용하여 출력정규실현 혹은 평형실현 등을 구성하여 한켈노옴 최적근사화를 수행하고 아울러 근사오차를 정량적으로 해석하였다. 문헌[5]에서 제안된 근사법을 이용하여 시스템을 최적근사화할 경우, 주어진 시스템의 한켈특이치와 그에 상응하는 한켈특이벡터의 해석적인 계산이 필수적임을 알 수 있다. 일반적으로 시스템이 유한차원일 경우 그들은 선형대수의 문제 즉 그라미안의 고유치문제로 간단히 계산되지만, 무한차원일 경우 그들을 해석적으로 계산한다는 것은 매우 어려운 일이다. 지금까지 해석적으로 계산가능한 무한차원시스템의 클래스는 입력 시간지연 시스템으로 극히 제한되어 있는 상황이다.

무한차원시스템의 H^∞감도 최적제어에 있어서 한켈특이치가 계산가능한 클래스는, 가중함수가 유리함수이고 제어대상이 이너-아우터(inner-outer) 분해가 가능한 경우에 한정되어 있다[6]. 그 결과는 단일입력 시간지연 시스템에 대한 결과의 확장[7]으로서 해밀턴행렬(Hamiltonian)을 포함하는 초월방정식의 해로서 주어진다.

무한차원시스템의 최적근사화에 있어서 한켈특이치가 초월방정식의 해로서 계산가능한 클래스는 역시 입력 시간지연 시스템에 한정되어 있다.

단일입력 시간지연 시스템에 대한 한켈특이치의 계산법은, Glover[8] 등이 한켈작용소의 슈미터쌍을 특징화함으로서 해밀턴행렬을 포함하는 초월방정식을 처음으로 유도하였다. 그리고 Hwang과 Ohta[9,10,11] 등은 복수입력 시간지연 시스템의 한켈특이치에 대한 계산법을 유도하였다. 그 결과들에서는 그라미안의 준-분리성이 중요한 역할을 하며, 특히 무한차원성을 가지는 시간지연 시스템의 한켈특이치가 왜 초월방정식으로 계산될 수 있는 가를 명확히 밝혔다. 문헌[11]에서는 선형변환행렬을 이용할 경우 문헌의 결과[8]가 복수입력 시간지연 시스템에도 확장할 수 있다는 것을 명확히 밝혔다.

본 논문에서는 먼저 복수입력 시간지연 시스템의 한켈특이치와 특이벡터에 관한 상기의 결과[9]를 간략히 소개한다. 특히 기존의 결과에 포함된 수치적분을 형식적으로 제거하는 방법에 대해서 고찰하고, 기존의 결과에서 명확히 제시되지 않았던 한켈특이벡터의 구조를 밝힌다. 그리고 한켈특이치 및 특이벡터로 구성되는 출력정규실현 혹은 평형실현[5]을 이용하여 유리근사화를 수행하고, 간단한 수치예제를 통하여 그 특성을 고찰한다. 결과적으로 출력정규실현에 의한 유리근사화가 Padé 근사화보다, 고주파역에서는 양호한 게인특성을 보이지만 저주파역에서는 그 반대의 경향을 보이고, 또한 임펄스응답에서 시간지연 시스템이 가지는 본래의 성질을 효과적으로 근사화하고 있음을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 입력에 유리비의 2점 시간지연을 포함하는 시스템에 상응하는 한켈작용소와 그라미안이 각각 계산되고, 그라미안의 준-분리성이 명확히 설명된다. 제 3장에서는 그라미안의 고유치문제로부터 한켈특이치와 특이벡터를 계산하는 초월방정식을 유도하고 그 의미가 설명된다. 제 4장에서는 시스템의 출력정규실현에 기초한 유리근사화를 간단히 소개하며, 간단한 수치예제를 통해 본 연구의 결과를 제 5장에서 고찰한다. 마지막으로 본 논문의 결과가 가지는 의미와 공학적인 유용성을 제 6장에서 간략히 요약한다.

2. 한켈작용소 및 그라미안

일반성 상실없이 전개의 단순화를 위하여 입력에 2점 시간지연을 포함하는 시불변 선형시스템을 고려한다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{2} B_j u(t - L_j)$$
$$y(t) \quad = Cx(t) \tag{2.1}$$

여기서 L_1, $L_2(L_1 \le L_2)$는 시간지연을 나타내는 양의 상수이고, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^p$는 각각 상태변수, 제어입력, 관측출력을, 그리고 $A \in R^{n\times m}$, $B \in R^{n\times m}$, $C \in R^{p\times n}$ (R은 실수의 집합)는 각각 시스템 계수들이다.

전개의 단순화를 위하여 (2.1)에 다음의 가정을 설정한다 : (i) A의 모든 고유치의 실수부는 음의 값을 가지며,

L_1 과 L_2 는 유리비를 가진다.

(2.1)의 임펄스응답 $h(t)$는 다음과 같다.

$$h(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le L_1\\ Ce^{A(t-L_1)}B_1, & L_1<t\le L_2\\ \sum_{j=1}^{2}Ce^{A(t-L_j)}B_j, & L_2<t\end{cases} \tag{2.2}$$

이때 (2.1)에 상응하는 한켈적분작용소 Γ_h 의 정의 및 성질은 보조정리 2.1과 같이 요약된다.

[보조정리 2.1[12]] 한켈적분작용소 $\Gamma_h : L_2(-\infty,0)\to L_2(0,\infty)$는 과거입력과 미래출력의 입,출력 사상으로서, (2.2)의 $h(t)$에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$(\Gamma_h f)(t)=\int_{-\infty}^{0}h(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

이때 $h(t)\in L_1(0,\infty)\cap L_2(0,\infty)$ 를 만족하므로 Γ_h 는 $L_2(0,\infty)$ 상에서 잘 정의되고, 컴팩터이며 $\|\Gamma_h\|\le\|h(t)\|_1$ 을 만족하는 유계작용소이다. 여기서 $L_1(0,\infty)$ 및 $L_2(0,\infty)$는 각각 $(0,\infty)$에서 절대 그리고 2승 적분가능한 Lebesgue 함수공간을 나타내며, $\|\cdot\|$ 과 $\|\cdot\|_1$은 각각 작용소 노옴과 L_1 노옴을 나타낸다.

그리고 (2.1)에 상응하는 가제어그라미안 $\mathcal{P}$ 및 가관측그라미안 $\mathcal{Q}$ 는 각각 상태공간 $\mathcal{X}=R^n\times L_2[0,L_2]$ 상의 적분작용소가 되며 그들의 구체적인 계산결과는 보조정리 2.2와 같이 요약된다. 먼저 기호의 단순화를 위하여 다음을 정의한다. 시간지연의 최대치를 $L_2=L$,

$$E(j)=e^{A(L-L_j)},\ E^*(j)=e^{A^*(L-L_j)} \tag{2.4}$$

$$F_{j1}(t)=G_{j2}^*(t)=B_j^*Qe^{At},\ F_{j2}(t)=G_{j1}^*(t)=B_j^*e^{-A^*t} \tag{2.5}$$

($*$ 는 작용소의 공액전치(transposed conjugate)를 의미하며, 특히 작용소가 실수체에서의 행렬일 경우는 전치(transpose)를 나타낸다.)

[보조정리 2.2[9]] 복수입력 시간지연 시스템 (2.1)의 가제어 및 가관측그라미안은 각각 $\mathcal{X}$에서 잘 정의되고 다음과 같다.

$$\mathcal{P}=\begin{bmatrix}\overline{P} & T_1^*\\ T_1 & I\end{bmatrix};\quad \mathcal{Q}=\begin{bmatrix}Q & K_1^*\\ K_1 & K\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

여기서 $z\in R^n$ 와 $f\in L_2[0,L]$ 에 대하여 각각의 요소들은 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{P}z=(P_{11}+E(1)P_{12}+P_{21}E^*(1)+P_{22})z \tag{2.7}$$

$$(T_1z)(t)=\sum_{j=1}^{2}\begin{cases}F_{j2}(t)E^*(j), & t\in[0,L-L_j]\\ 0, & t\in[L-L_j,L]\end{cases} \tag{2.8}$$

$$(K_1z)(t)=\sum_{j=1}^{2}\begin{cases}0, & t\in[0,L-L_j]\\ F_{j1}(t)E(j)z, & t\in[L-L_j,L]\end{cases} \tag{2.9}$$

$$(Kf)(t)=(\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}K_{jl}f)(t) \tag{2.10}$$

$$(K_{jl}f)(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,L-L_j],\\ F_{j1(t)}E(j)\int_0^{\min(t_j,L_l)}G_{l1}(\tau)f(\tau_l)d\tau & \\ +F_{j2}(t)E^*(j)\int_{\min(t_j,L_l)}^{L_l}G_{l2}(\tau)f(\tau_l)d\tau, & t\in[L-L_j,L].\end{cases} \tag{2.11}$$

(2.7)의 $P_{jl}(j,l=1,2)$ 과 (2.6)의 Q 는 각각 다음의 선형행렬방정식을 만족하는 유일해이며,

$$AP_{jl}+P_{jl}A^*+B_jB_l^*=0$$
$$A^*Q+QA+C^*C=0 \tag{2.12}$$

$E(j)$ 와 $F_{jl},G_{jl}(j,l=1,2)$ 은 각각 (2.4), (2.5)에서 정의된다. (2.11)에서 $t_j=t+L_j-L$, $\tau_l=\tau+L-L_l$ 을 나타낸다.

보조정리 2.2에서 가관측그라미안 $\mathcal{Q}$의(2,2)요소, 즉 (2.10)에서 주어진 K는 준-분리 형태의 핵함수를 가지는 적분작용소라는 사실이 잘 알려져 있다[9]. 이러한 성질은 동형작용소(isometric operator)를 이용하여 K를 벡터화하면 쉽게 확인할 수 있다. 본 논문에서는 전개의 단

순화를 위하여 시간지연의 크기가 $2L_1 = L$ 인 경우를 고려하여 문헌[9]의 결과를 간략히 소개하기로 한다. 먼저 $L_2[0,L]$ 에서 $L_2^2[0,L_1]$공간 상으로의 전단사 사상인 동형작용소 Ξ 를 $f \in L_2[0,L]$에 대하여 정의한다.

$$(\Xi f)(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f(t+L_1) \end{pmatrix} \in L_2^2[0,L_1],\ 0 \le t \le L_1 \quad (2.13)$$

여기서 $L_2^2[0,L_1]$ 은 $L[0,L_1]\times L[0,L_1]$의 Cartesian product 공간을 나타낸다. 이때 K 의 벡터화는 다음 식으로부터 얻어지며,

$$\tilde{K} = \Xi K \Xi^{-1} \quad (2.14)$$

$\tilde{K}$ 가 준-분리 형태의 핵함수를 가지는 적분작용소임은 보조정리 2.3에서 확인된다. 이 결과는 문헌[9]의 결과와 동일하지만 준-분리 핵함수의 구조를 명확히 표현하고 있음에 그 차이가 있다고 하겠다.

[보조정리 2.3] (2.14)의 $\tilde{K}$는 $L_2^2[0,L_1]$ 에서 $L_2^2[0,L_1]$ 공간 상으로의 적분작용소로서,

$$(\tilde{K}\tilde{f})(t) = \int_0^{L_1} \tilde{K}(t;\tau)\tilde{f}(\tau)d\tau \quad (2.15)$$

준-분리 형태의 핵함수 $\tilde{K}$ 를 가진다.

$$\tilde{K}(t;\tau) = \begin{cases} \tilde{H}_1(t)(I+\gamma)\tilde{H}_2(\tau), & 0 \le \tau \le t \le L_1 \\ \tilde{H}_1(t)\ \gamma\ \tilde{H}_2(\tau), & 0 \le t < \tau \le L_1 \end{cases} \quad (2.16)$$

여기서 $\tilde{H}_1$ 와 $\tilde{H}_2$는 각각

$$\tilde{H}_1(t) = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1(t) & \tilde{F}_2(t) \end{bmatrix};\ \tilde{H}_2(t) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1(t) \\ -\tilde{G}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\tilde{F}_j(t) = \begin{bmatrix} F_{2j}(t) & 0 \\ F_{1j}(t) & F_{2j}(t) \end{bmatrix};\ \tilde{G}_j(t) = \begin{bmatrix} G_{2j}(t) & G_{1j}(t) \\ 0 & G_{2j}(t) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

그리고 γ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\gamma = \begin{bmatrix} J_1 E_{11} & -E_{21}E_{11}^* \\ 0 & J_1 E_{21} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$E_{11} = \begin{bmatrix} I \\ e^{AL_1} \end{bmatrix},\ E_{21} = \begin{bmatrix} I \\ e^{-A^*L_1} \end{bmatrix},\ J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

상기의 보조정리 2.3에서 주어진 (2.15)의 $\tilde{K}$ 는 볼테라(Volterra) 작용소와 유한랭크(finite rank)를 가지는 작용소의 합으로서 표현된다. 즉 $z \in R^n, \tilde{f} \in L_2^2[0,L_1]$ 에 대하여

$$\tilde{K} = \underbrace{\tilde{H}}_{\text{볼테라작용소}} + \underbrace{\tilde{K}_\gamma \tilde{K}_\tau^*}_{\text{유한랭크작용소}} \quad (2.21)$$

$$(\tilde{H}\tilde{f})(t) = \tilde{H}_1(t)\int_0^t \tilde{H}_2(t)\tilde{f}(\tau)d\tau,\ t \in [0,L_1] \quad (2.22)$$

$$(\tilde{K}_\gamma z)(t) = \tilde{H}_1(t)\gamma\ z,\ \tilde{K}_\tau^*\tilde{f} = \int_0^{L_1} \tilde{H}_2(\tau)\tilde{f}(\tau)d\tau \quad (2.23)$$

이때 $\tilde{K}$ 의 고유치는 초월방정식의 해로서 계산될 수 있음이 잘 알려져 있다[9].

그리고 (2.13)의 Ξ 를 이용하여 $\mathcal{P}$ 와 $\mathcal{Q}$를 벡터화 하면 다음과 같다.

$$\tilde{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} \bar{P} & \tilde{T}_1^* \\ \tilde{T}_1 & I \end{bmatrix},\ \tilde{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} Q & \tilde{K}_1^* \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

여기서 $\bar{P},Q,\tilde{K}$는 보조정리 2.3에서 주어지며, $\tilde{T}_1,\tilde{K}_1$ 는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$(\tilde{T}_1 z)(t) = \tilde{F}_p(t)E_p z \quad (2.25)$$

$$E_p = e^{AL_1}E_{11},\ \tilde{F}_p(t) = \begin{bmatrix} F_{12}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{K}_1 z)(t) = \tilde{H}_1(t)E_{11}\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

상기의 식에서 각 요소들은 보조정리 2.3에서 주어진 것과 동일하다.

따라서 그라미안 $\tilde{\mathcal{P}}\tilde{\mathcal{Q}}$ 가 준-분리 핵함수를 가지는 적분작용소로서 볼테라 작용소와 유한랭크 작용소의 합으로 표현된다.

$$\tilde{\mathcal{P}}\tilde{\mathcal{Q}} = \underbrace{\tilde{X}}_{\text{볼테라작용소}} + \underbrace{\tilde{Y}\tilde{Z}^*}_{\text{유한랭크작용소}} \tag{2.27}$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{T}_1^*\tilde{H} \\ 0 & \tilde{H} \end{bmatrix};\ \tilde{Z} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_1 & \tilde{K}_\tau \end{bmatrix};\tag{2.28}$$

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \bar{P}Q + \tilde{T}_1^*\tilde{K}_1 & \bar{P} & \tilde{T}_1^*\tilde{K}_\gamma \\ \tilde{T}_1 Q + \tilde{K}_1 & \tilde{T}_1 & \tilde{K}_\gamma \end{bmatrix}$$

이러한 그라미안의 준-분리성을 이용하여, 문헌[9]에서는 $(I-\lambda^{-1}\tilde{P}\tilde{Q})^{-1}$ 가 존재하지 않기 위한 필요충분조건으로부터 초월방정식을 유도함으로서 고유치 λ 를 계산하였다. 그러나 그 결과들은 수치적분이 포함된 관계로 상당히 복잡한 형태로 주어져 있으며, 특히 고유벡터의 구체적인 구조가 명확히 제시되지 않았다. 따라서 다음 장에서는 문헌[11]의 결과를 이용하여 수치적분에 대한 해결책을 제안하고 그라미안의 고유벡터에 대한 구조를 밝힌다. 결과적으로 그라미안의 고유치와 그에 상응하는 고유벡터에 의해서 (2.1)의 한켈특이치 및 특이벡터가 명확히 계산되어질 것이다.

3. 한켈특이치 및 특이벡터

입력 시간지연 시스템 (2.1)에 상응하는 한켈작용소의 특이치와 특이벡터는 그라미안의 고유치와 고유벡터에 의해서 계산될 수 있다. 이를 위하여 다음의 시변인 동차 선형 상미분방정식을 정의한다.

$$\frac{d}{dt}\tilde{U}(t;\mu) = \mu\tilde{S}(t)\tilde{U}(t;\mu),\ t\in[0,\ L_1] \tag{3.1}$$

$\tilde{S}(t)$ 는 $5n\times 5n$ 크기의 2승 Lebesgue 적분가능한 연속함수로서 다음과 같다.

$$\tilde{S}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1\tilde{F}_1 & \tilde{G}_1\tilde{F}_2 & \begin{bmatrix} G_{21}F_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ -\tilde{G}_2\tilde{F}_1 & -\tilde{G}_2\tilde{F}_2 & \begin{bmatrix} G_{22}F_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

여기서 $\tilde{F}_j, \tilde{G}_j (j=1,2)$ 는 각각 (2.18)에서 주어진다.

초기조건 $\tilde{U}(0;\mu) = I$ 에 상응하는 (3.1)의 기본해 $\tilde{U}(t;\mu)$ 의 존재성은 보장되며 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$\tilde{U}(t;\mu) = I + \int_0^t \tilde{S}(\tau)\tilde{U}(\tau;\mu)d\tau,\ t\in[0,L_1] \tag{3.3}$$

이것을 (3.2)의 분해에 따라 표현하면 다음과 같다.

$$\tilde{U}(t;\mu) = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11}(t;\mu)\cdots\tilde{U}_{15}(t;\mu) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \tilde{U}_{51}(t;\mu)\cdots\tilde{U}_{55}(t;\mu) \end{bmatrix}$$

이때 $\tilde{\mathcal{P}}\tilde{\mathcal{Q}}$ 의 고유치는 정리 3.1로부터 얻어진다.

[정리 3.1] $\tilde{\mathcal{P}}\tilde{\mathcal{Q}}$ 를 (2.27)에서 주어진 가제어 및 가관측그라미안의 곱이라 하자. 이때 다음 조건을 만족하는 $\lambda(=\mu^{-1}\neq 0)$가 $\tilde{\mathcal{P}}\tilde{\mathcal{Q}}$ 의 고유치이다.

$$\det(\tilde{E}_1\tilde{U}(L_1;\mu) - \tilde{E}_2) = 0 \tag{3.4}$$

그리고 (2.1)의 한켈특이치는 $\sigma_i = \lambda_i^{1/2}, i = 1.2,\cdots$ 에 의해서 결정된다. (3.4)의 각 계수들은 다음과 같다.

$$\tilde{E}_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\tilde{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & e^{-AL_1} & 0 & 0 & 0 \\ I-\mu(\bar{P}Q+\tilde{M}_1+\tilde{J}_1)-\mu\tilde{J}_2 & -\mu(\tilde{J}_3+\bar{P})-\mu\tilde{J}_4 & -\mu\tilde{J}_5 \\ 0 & e^{A^*L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$\tilde{M}_1 = e^{AL_1}\int_0^{L_1} G_{11}(\tau)F_{21}(\tau)d\tau \tag{3.7}$$

$$\tilde{J}_k = e^{AL_1}\int_0^{L_1} G_{11}(\tau)\{F_{21}(\tau)\tilde{U}_{1k}(\tau;\mu)+F_{22}(\tau)\tilde{U}_{3k}(\tau;\mu)\}d\tau \tag{3.8}$$

정리 3.1에 대한 증명은, $\bar{P}\bar{Q}$ 의 고유치문제에서 그라미안의 준-분리성을 이용하면 쉽게 완성된다. 구체적인 증명은 생략하고 여기서는 정리 3.1이 포함하고 있는 수치적분에 관하여 고찰하기로 한다. 기존의 결과[9]에 의하면 기본해 $\tilde{U}(t;\mu)$ 의 차수가 $(4n\times 4n)$ 이었지만 상기의 정리에서는 $(5n\times 5n)$ 가 되었다. 이러한 사실로부터 (3.1)에서 정의된 동차 선형 상미분방정식의 차수를 증가시키면 수치적분을 형식적으로 없앨 수 있음을 알 수 있다. 즉 그라미안의 준-분리성과 적분작용소의 시불변 성질을 이용하여 그라미안을 기술한다면 상기 정리에 포함된 수치적분을 형식적으로 없앨 수 있음을 의미하고 있다.[11] 그리고 고유치에 상응하는 고유벡터를 통하여 한켈특이벡터가 계산될 수 있다는 사실에 주의하자.

Ohta[11] 등은 다음의 선형변환 행렬함수 $\tilde{T}(t)$ 를 이용하면 문헌[8]의 결과가 복수의 시간지연을 갖는 시스템에도 확장가능하다는 것을 보였다.

$$\tilde{T}(t) = \begin{bmatrix} e^{At} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{At} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sigma}Qe^{At} & 0 & \frac{1}{\sigma}e^{-A^*t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma}Qe^{At} & 0 & \frac{1}{\sigma}e^{-A^*t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma}e^{-A^*(t+L_1)} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

즉 복수입력 시간지연 시스템의 한켈특이치와 특이벡터들이 한켈작용소의 슈미터쌍을 특징화하는 것으로 계산될 수 있음을 의미한다. 따라서 본 논문에서는 문헌[8]과 같은 방법으로 유도한 한켈특이치 및 특이벡터의 계산결과를 간단히 요약하기로 한다. 먼저 시불변인 동차 선형 상미분방정식을 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{d}{dt}\tilde{V}(t;\sigma) = \tilde{R}(\sigma)\tilde{V}(t;\sigma), \quad 0 \le t \le L_1 \tag{3.10}$$

여기서 $\tilde{R}(\sigma)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\tilde{R}(\sigma) = \begin{bmatrix} A & 0 & \sigma^{-1}(B_1B_1^*+B_2B_2^*) & \sigma^{-1}B_1B_2^* & \sigma^{-1}B_2B_1^* \\ 0 & A & \sigma^{-1}B_2B_1^* & \sigma^{-1}B_2B_2^* & 0 \\ -\sigma^{-1}C^*C & 0 & -A^* & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^{-1}C^*C & 0 & -A^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A^* \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

(3.11)의 분해에 따라 초기조건 $\tilde{V}(t;\sigma)=I$ 을 만족하는 (3.10)의 기본해 $\tilde{V}(t;\sigma)=\exp\tilde{R}(\sigma)$를 다음과 같이 표현한다.

$$\tilde{V}(t;\sigma) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11}(t;\sigma) & \cdots & \tilde{V}_{15}(t;\sigma) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{V}_{51}(t;\sigma) & \cdots & \tilde{V}_{55}(t;\sigma) \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le L_1 \tag{3.12}$$

이때 (2.1)의 한켈특이치와 특이벡터는 정리 3.2에 의해서 계산된다.

[정리 3.2] Γ_h를 (2.3)에서 정의된 (2.1)에 상응하는 한켈적분작용소라고 하면, Γ_h 의 특이치 $\sigma(\Gamma_h)$는 다음의 초월방정식을 만족하는 값이다.

$$\det(\tilde{N}_1\tilde{V}(L_1;\sigma)-\tilde{N}_2)=0 \tag{3.13}$$

여기서 $\tilde{N}_1$ 과 $\tilde{N}_1$ 는 다음과 같다.

$$\tilde{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^{-1}Q & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$\tilde{N}_2 = \begin{bmatrix} I-\sigma^{-1}\tilde{Y}_1 & -\sigma^{-1}\tilde{Y}_2 & -\sigma^{-1}(\bar{P}+\tilde{Y}_3) & -\sigma^{-1}\tilde{Y}_4 & -\sigma^{-1}\tilde{Y}_5 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-A^*L_1} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

상기에서 $\bar{P}$, Q 는 각각 (2.7), (2.12)에서 주어지며, $\tilde{Y}_k, k=1,2,\cdots,5$ 는 각각 다음과 같다.

$$\tilde{Y}_k = \int_0^{L_1} e^{A(L_1-\tau)} B_1 B_2^* \tilde{V}_{3k}(\tau;\sigma) d\tau \tag{3.16}$$

상기의 정리 3.2에서 계산된 σ 에 상응하는 한켈작용소의 슈미터쌍 (f,g)(한켈특이벡터)는 다음을 만족하며

$$(\Gamma_h f)(t) = \sigma g(t), \quad (\Gamma_h^* g)(t) = \sigma f(t) \tag{3.17}$$

그 구체적인 표현은 다음과 같다.

(i) $0 \le t \le L_1$ 일 경우,

$$\begin{aligned} \sigma g(t) &= Cx_1(t), \\ \sigma f(L_1 - t) &= B_1^* z_1(t) + B_2^* z_2(t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

(ii) $L_1 < t \le L_2$ 일 경우,

$$\begin{aligned} \sigma g(t) &= Cx_2(t), \\ \sigma f(L_2 + L_1 - t) &= B_1^* e^{A^*(L_2-t)} z_1(0) + B_2^* z_1(t) \end{aligned} \tag{3.19}$$

(iii) $L_2 < t$ 일 경우,

$$\begin{aligned} \sigma g(t) &= Ce^{A(t-L_2)} x_2(L_1), \\ \sigma f(t) &= B_1^* e^{A^*(t-L_1)} z_1(0) + B_2^* e^{A^*(t-L_2)} z_1(0) \end{aligned} \tag{3.20}$$

(3.18)-(3.20)의 각 상태변수 $\zeta(t) = [(x_1)(t)\ x_2(t)\ z_1(t)\ z_2(t)\ p_2(t)]'$ 는 다음의 경계조건을

$$\tilde{N}_2 \zeta(0) = \tilde{N}_1 \zeta(L_1) \tag{3.21}$$

만족하는 시불변 동차 선형 상미분방정식의 일반해로서 주어진다.

$$\frac{d}{dt}\zeta(t) = \tilde{R}(\sigma)\zeta(t), \quad 0 \le t \le L_1 \tag{3.22}$$

(3.21)에서 $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_2$는 각각 (3.14), (3.15)에서주어진다.

한켈특이치 및 특이벡터를 계산함에 있어 정리 3.1과 3.2은 동일한 결과를 주지만 정리 3.1에서는 시변 동차 상미분방정식의 기본해를 계산해야 하는 어려움이 따른다. 그래서 본 연구에서는 정리 3.2의 결과를 이용하여 그들의 값을 계산한다. 수치 알고리즘을 요약하면 다음과 같다.

[수치 알고리즘]

Step 1 (2.1)의 시스템 계수들을 이용하여(3.11)의 $\tilde{R}(\sigma)$ 을 구성하고, (2.7)과 (2.12)의 $\bar{P}$, Q, 그리고 (3.14), (3.15)의 $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_2$,를 구성한다.

Step 2 (2.1)의 H^∞노음을 사용하여 한켈특이치의 상한 $(\sigma_{\max})$ 을 결정한다.

Step 3 $\sigma = \sigma_{\max} - \delta$ 로 선정한 뒤 (3.13)의 초월방정식 부호를 조사한다. 여기서 δ 는 충분히 작은 양의 값으로 한다. 초월방정식의 부호가 바뀌면 그때의 한켈특이치를 σ_l, 한단계 전의 값을 σ_u 로 선정한다.

Step 4 $\sigma = (\sigma_u + \sigma_l)/2$ 로 설정하여 이분법(bisection method)을 통해 한켈특이치를 계산한다. 이때 $|\sigma_u - \sigma_l| < 10^{-8}$ 만족하면 하나의 한켈특이치가 결정된다.

Step 5 Step 3과 Step 4의 과정을 반복 수행하여 원하는 수만큼의 한켈특이치를 얻는다. 각각의 한켈특이치에 상응하는 한켈특이벡터를 (3.18)-(3.20)에 따라 계산한다.

다음 장에서는 상기에서 얻은 한켈특이치와 특이벡터를 이용하여 (2.1)의 입력 시간지연 시스템에 대한 출력정

규실현을 구성하고, 그 결과를 이용하여 유리근사화를 수행한다.

4. 출력정규실현에 의한 유리근사화

이 장에서는 한켈특이치와 특이벡터를 이용한 무한차원 시스템의 출력정규실현 혹은 평형실현을 간단히 소개하고, 그 결과에 기초하여 (2.1)에 대하여 유리근사화를 수행하기로 한다.

다음과 같이 입,출력사상으로 기술되는 무한차원시스템을 고려한다.

$$y(t) = \int_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{4.1}$$

여기서 $u \in L_2(0,\infty)$와 $y \in L_2(0,\infty)$는 각각 입력 및 출력을, $h(t)$는 임펄스응답을 나타낸다. $h(t)$가 다음 조건을 만족하면

$$h(t) \in L_1(0,\infty) \cap L_2(0,\infty) \tag{4.2}$$

(4.1)의 무한차원시스템에 대한 출력정규실현 혹은 평형실현이 잘 정의된다[5]. 먼저 입력 및 출력정규실현, 평형실현에 대한 정의를 간단히 소개하면 다음과 같다.

[**정의 4.1**[1]](4.1)에 대한 가제어그라미안 P 및 가관측그라미안 Q들이 다음의 조건 (i)을 만족할 때, (C,A,B)를 평형실현, 조건 (ii)를 만족할 때 입력정규실현 그리고 (iii)을 만족할 때 출력정규실현이라고 한다.

$$\text{(i)}P = Q > 0 \quad \text{(ii)}P = I, Q > 0 \quad \text{(iii)}P > 0, Q = I$$

상기의 정의에서 (C,A,B)는 (2.2)의 그들과 다르다는 것에 주의하자. 이때 입력 시간지연 시스템의 출력정규실현 및 평형실현은 다음의 보조정리 4.1과 같이 주어진다.

[**보조정리 4.1**[5]] (4.1)의 무한차원시스템에 상응하는 한켈작용소 Γ_h의 특이치를 σ_i, σ_i에 상응하는 슈미터쌍을 $(f_i,\ g_i)$라고 하면 (4.1)의 출력정규실현 (C,A,B)는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}(A)_{ij} &= \int_0^\infty g_i^*(\tau)\{\frac{d}{dt}g_j(\tau)\}d\tau = \frac{\sigma_i}{\sigma_j}\int_0^\infty \{\frac{d}{dt}f_i^*(\tau)\}f_j(\tau)d\tau \\ B &= \left[\sigma_1 f_1(0),\ \sigma_2 f_2(0),\ \cdots,\ \sigma_i f_i(0),\ \cdots\right]^* \\ C &= \left[g_1(0),\ g_2(0),\ \cdots,\ g_i(0),\ \cdots\right]\end{aligned} \tag{4.3}$$

그리고 (4.3)의 결과와 다음의 대각행렬 Σ를 이용하면

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_i, \cdots) \tag{4.4}$$

평형실현은 다음과 같이 주어진다.

$$(C\Sigma^{\frac{1}{2}}, \Sigma^{-\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}}, \Sigma^{-\frac{1}{2}}B) \tag{4.5}$$

여기서 슈미터쌍은 정규직교계를 구성하고 있음에 주의하자. 즉

$$< f_i, f_j > = < g_i, g_j > = \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{4.6}$$

이때 무한차원시스템 (4.1)의 유리전달함수는 다음과 같이 주어진다.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{4.7}$$

따라서 임의의 n차원 유리전달함수에 의해 (4.1)의 유리근사화가 수행된다.

$$G_n = C_n(sI - A_n)^{-1}B_n \tag{4.8}$$

여기서 각 계수들은 (4.3)에서 $i, j = 1,...,n$으로 했을

때의 값들이다. 문헌[5]에서는 $n \to \infty$ 일 때 (4.8)이 (4.7)에 수렴하는 성질과 근사오차를 정량적으로 평가하고, 큰값의 n에 대한 근사함수를 구성하여 한켈노음 최적근사화를 수행하였다. 자세한 내용은 문헌을 참고하기 바란다.

따라서 복수입력 시간지연 시스템 (2.1)의 임펄스응답이 조건 (4.2)를 만족하고 있으므로, 보조정리 4.1을 이용하여 유리근사화를 수행할 수 있음을 알 수 있다. 다음 장에서는 (2.1)의 간단한 수치예제에 대하여 (4.8) 형태의 유리근사함수를 구성하여 그들이 가지는 주파수역 및 시간역 특성을 고찰하기로 한다.

5. 수치예제

이 장에서는 간단한 수치예제를 통하여 유리근사화의 결과를 고찰하기로 한다.

$$G(s) = \frac{1}{s+1}e^{-0.5s} + \frac{1}{s+1}e^{-s} \qquad (5.1)$$

(5.1)의 차분-미분 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= -x(t) + u(t-0.5) + u(t-1) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \qquad (5.2)$$

지금부터 보조정리 (4.1)에서 주어진 출력정규실현을 이용하여 (5.1)에 대한 유리근사화를 수행하고, 그 결과를 주파수 및 시간역 특성을 통해 Padé근사와 비교, 고찰하기로 한다. Fig. 1과 Fig. 2는 각각 출력정규실현과 Padé 근사화에 의한 근사함수의 게인 Bode 선도를, Fig. 3은 근사오차의 주파수응답을 나타낸다. 여기서 고려한 근사함수의 차수는 각각 3, 5, 7, 9이며, Padé 근사화에 의한 근사함수의 차수는 $1/(s+1)$의 차수와 $e^{-0.5s}$ 또는 e^{-s}에 대한 Padé 근사함수의 차수에 대한 합으로 결정된다.

Fig. 1과 2에서 출력정규실현에 의한 근사화는 Padé 근사화보다 저주파역에서 다소 불일치한 특성을 나타내고 있으며, 특히 고주파역에서 상당히 작은 게인특성을 보이고 있음을 알 수 있다.

Fig. 3에서 이러한 게인특성이 설명되고 있다. 즉 입력

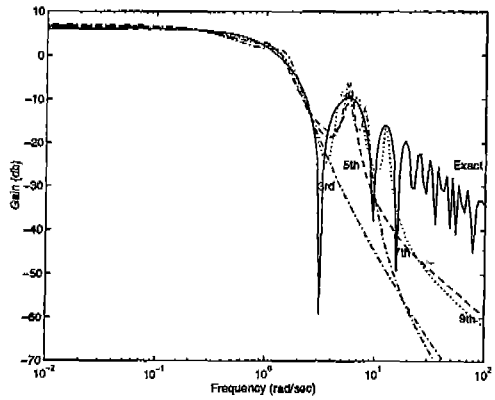

Fig. 1 Gain response of truncated output normal realizations

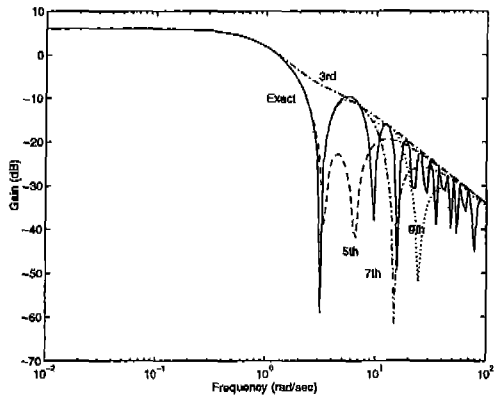

Fig. 2 Gain response of Padé approximations

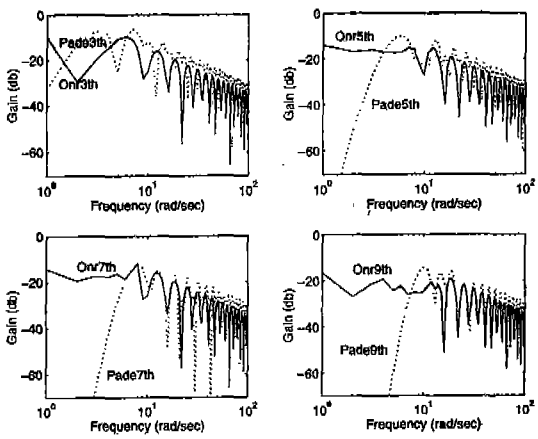

Fig. 3 Gain response of approximation errors

시간지연 시스템을 출력정규실현에 의한 유리근사화에 기초하여 H^∞강인 제어기를 설계할 때 고주파역에서의 불확실성에 대한 부담이 줄어들 것이라는 것을 예측할 수 있다고 하겠다. 그리고 저주파역에서 보이는 근사오차는 제어시스템의 정상상태 오차를 야기시킬 것으로 간주되지만, 이러한 문제는 제어기에 적분요소를 첨가시킴으로서 해결할 수 있으므로 그다지 심각한 문제는 아닐 것으로 사료된다. Fig. 4와 5는 각각 두 결과의 위상 Bode 선도를 나타내고 있다.

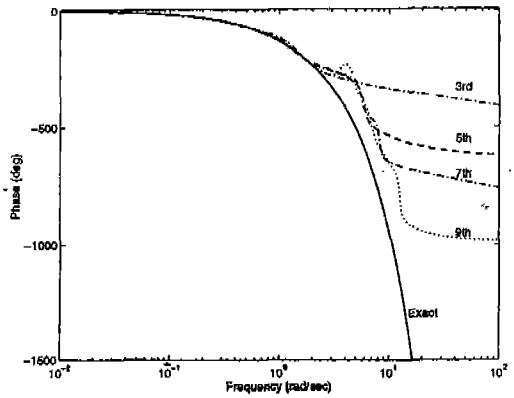

Fig. 4 Phase response of truncated output normal realizations

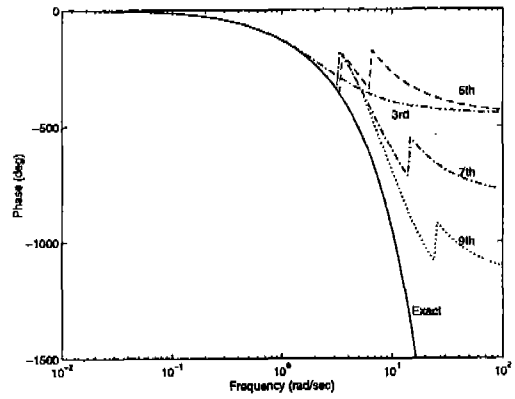

Fig. 5 Phase response of Padé approximations

Fig. 4와 Fig. 5의 위상선도에서, 저주파역에서는 모두 양호한 결과를 나타내고 있으나, 고주파역에서 상당히 불일치한 근사특성을 보이고 있다. 시간지연 시스템의 위상특성이 주파수의 함수로 주어진다는 것을 고려할 때 고주파역에서 위상이 일치하는 근사함수를 구성한다는 것은 상당히 어려운 일로 여겨진다. 그리고 Padé 근사화의 게인선도(Fig. 2)에서와 같이 위상이 불일치하는 고주파역에서 게인을 무리하게 일치시키는 것도 다소 무리가 있을 것로 판단된다. 그러나 제어대상의 주파수 특성이 결정되면 근사함수의 차수를 증가시킴으로서 양호한 근사함수가 구해질 수 있다는 사실을 알 수 있다. 마지막으로, Fig. 6과 7은 각각 출력정규실현 및 Padé 근사화에 대한 임펄스응답을 나타낸다.

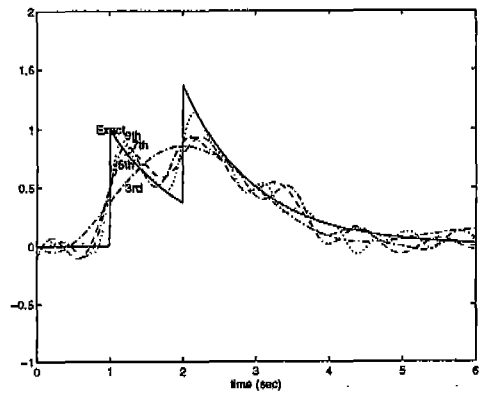

Fig. 6 Impulse response of truncated output normal realizations

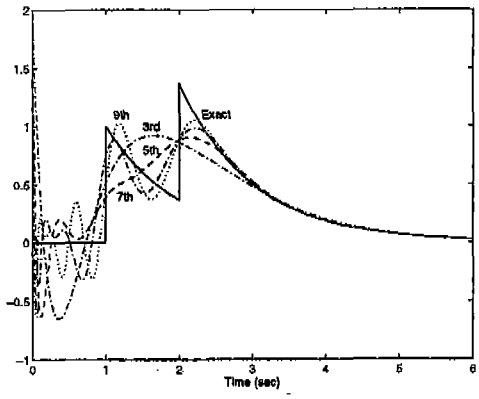

Fig. 7 Impulse response of Padé approximations

Fig. 6과 7에서 출력정규실현에 의한 근사화가 Padé 근사화보다 시간지연이 존재하는 시간구간에서 양호한 시간지연의 특성을 보이고 있음을 알 수 있다. 즉 출력정

규실현에 의한 근사화는 시간지연 시스템이 가지는 본래의 성질을 양호하게 유지하고 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 입력에 복수의 시간지연 요소를 가지는 서불변 선형시스템의 한켈특이치와 특이벡터에 대한 계산법을 소개하고, 한켈특이벡터의 구조를 명확히 하였다. 그리고 기존의 결과에 포함되어 있는 수치적분의 의미를 명확히 함으로서 그 해결방법을 제시하였다. 또한 한켈특이치와 특이벡터를 이용하여 출력정규실현을 구성하고 그에 기초하여 유리근사화를 수행하였다. 결과적으로 출력정규실현에 의한 근사화가 Padé 근사화보다 저주파역에서는 나쁘지만 고주파역에서 양호한 근사결과를 나타내고 있음을 알았다. 시간응답에서는 전자가 시간지연 시스템이 가지는 본래의 특성을 양호하게 유지하고 있음을 알았다. 본 연구의 결과는 복수의 입력채널에 유리비의 시간지연 요소를 포함하는 시스템의 근사화 및 제어기 설계에 응용될 수 있을 것으로 기대한다. 그리고 주어진 시스템의 근사화를 수행하지 않고 설계된 무한차원의 제어기에 대한 근사에도 그 유용성을 가질 것으로 기대한다. 따라서 본 연구의 결과가 제어기 설계에 있어 가지는 유용성을 다각도로 평가하는 것이 하나의 향후 연구테마로 사료되며, 한켈특이치의 계산법을 상태 시간지연 시스템에 확장하는 연구도 지속적으로 수행되어야 할 것으로 생각한다. 끝으로 익명의 심사위원님께 진심으로 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. B. C. Moore, "Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-26, No. 3, pp. 653-670, 1990.
2. K. Glover, "All Optimal Hankel-norm Approximation of Linear Multivariable Systems and Their L^{∞}-error Bounds", Int. J. Control, Vol. 39, No. 6, pp. 1115-1193, 1984.
3. B. A. Francis, "*Course in H^{∞} Control Theory*", Springer-Verlag, Vol. 88, 1987.
4. C. Glader, G. Högnä, P.M Mäkilä and H. T. Toinvonen, "Approximation of Infinite-Dimensional Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol 53, No. 2, pp. 369-390, 1991.
5. K. Glover, R. F. Curtain and J. R. Partington, "Realisation and Approximation of Linear Infinite- Dimensional Systems with Error Bounds", SIAM J. Contr. Optim., Vol. 26, No. 4, pp. 853-898, 1988.
6. M. C. Smith, "Singular Values and Vectors of a Class of Hankel Operators", Sys. & Contr. Letters, Vol. 12, pp. 301-308, 1989.
7. K. Zhou and P. P. Khargonekar, "On The Weighted Sensitivity Minimization Problem for Delay Systems", Sys. & Contr. Letters, Vol. 8, pp. 159-165, 1988.
8. K. Glover, J. Lam and J. R. Partington, "Rational Approximation of a Class of Infinite-Dimensional Systems I: Singular Values of Hankel Operators", Math. Control Signals Systems, Vol. 3, No. 4, pp. 325-344, 1990.
9. I. C. Hwang and Y. Ohta, "Hankel Singular Values of Commensurate Delay Systems", Trans. of Society of Instrument and Control Engineers(SICE), Vol. 32, No. 2, pp. 188-196, 1996.
10. I. C. Hwang and Y. Ohta, "Hankel Singular Values of Non-Commensurate Input Delay Systems", Trans. of Systems, Control and Information (ISCIE), Vol. 9, No. 8, pp. 375-382, 1996.
11. Y. Ohta and I. C. Hwang, "A Study on The Hankel Singular Values of Input Delay Systems", Proc. of the 18th Dynamical System Theory Symposium, pp. 215-220, 1995.
12. J. R. Partington, "*An Introduction to Hankel Operators*", London Mathematical Society Student Texts 13, Cambridge University Press, 1988.