

본 연구는 1995년도 한양대학교 교내연구비에 의해 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

상변화와 접촉을 고려한 축대칭 주조 응고공정의 유한요소 해석

구본영*, 금영탁**, 금동화***, 이준기****

Finite Element Analysis of Solidification Processes of Axisymmetric Castings Considering Phase Change and Contact

B. Y. Ghoo*, Y. T. Keum**, D. H. Kum***, J. K. Lee****

ABSTRACT

The purpose of this research is to develop a FEM program for analyzing solidification processes of axisymmetric casting, considering phase changes and the contact between the metal and mold. Temperature recovery method is employed for considering the phase changes releasing the latent heat and the coincident node method is used for calculating the amount of heat transfer between the metal and mold. Tangent modulus algorithm is adopted for calculating flow stress and a gap element is employed for modeling the interface between the mold and metal in finding deformed shapes.

In order to verify the developed program, axisymmetric aluminum and steel casting processes are simulated. Temperature distribution, phase front position, and shrinkage and porosity creation are compared with measurements, FIDAP results, and ANSYS results, and good agreements are examined.

Key Words : FEM(유한요소법), Casting(주조), Solidification Processes(응고), Phase Change(상변화), Latent Heat(응고잠열), Contact(접촉)

1. 서론

주조의 응고공정에 수반되는 상변화는 재료의 물성치를 급격히 변화시켜 저렴한 가격의 정밀도 제품을 생산하기 위한 전산설계해석에서 이를 고려하는 것은 정도 있는 해석을 위해서 필수적이다. Weiner와 Boley⁽¹⁾, Carslaw와 Jaeger⁽²⁾, Luikov⁽³⁾는 상변화를 고려하여 온도와 응

력을 결정하는 해석적인 수식화를 제안하였다. 김용환 등^(4,5)은 주조에서 용탕 용입시 열전달과 상변화를 포함한 재료유동을 유한요소법으로 해석하였고, 이진호 등⁽⁶⁾은 수직응고 시스템에서 상변화 중에 생기는 밀도차가 열전달 및 열응력에 미치는 영향에 대해 보고하였다. 상변화를 고려하는 경우에 잠열의 방출을 효과적으로 모델링하기 위하여 엔탈피법⁽⁷⁻⁹⁾, 가상열유동법⁽¹⁰⁾, 온도회복법^(11,12).

* 한양대학교 대학원
 ** 한양대학교 정밀기계공학과
 *** 한국과학기술연구원
 **** Ohio State University

계면선두추적법^(13,14) 등과 같은 방법들이 연구되었고, Salcudean 등⁽¹⁵⁾은 이러한 방법들을 상호 비교평가 하였다.

Jeyarajan 등⁽¹⁶⁾과 Henzel 등⁽¹⁷⁾은 등온고법을 이용하여 액상선 온도와 고상선 온도의 위치를 수치해석으로 결정하고 수축공을 예측하였다. Bishop 등⁽¹⁸⁾은 응고결함 예측을 위하여 온도구배법을 개발하였고, Imafuku 등^(19,20)은 응고결함 예측을 위한 수학적인 모델을 개발하였다.

성형공정에서 다이와 소재의 접촉은 필연적이며 소재의 유동양상에 따라서 소재끼리의 자유경계면 접촉이 이루어질 수 있다. 이와 같이 접촉문제는 해석의 필요성과 복잡성으로 지금까지 많은 연구의 대상이 되어 왔다. 하지만 역학적인 물성치가 급격하게 변화하는 경계면에서의 접촉현상을 수학적으로 모델링하는 것은 쉬운 일이 아니다. 접촉의 문제는 마찰을 포함하는 경우와 포함하지 않는 경우로 크게 나누어지는데 후자의 경우가 훨씬 쉽고 간단하다^(21~24).

응고공정을 해석하기 위한 수치해법으로는 주로 유한차분법, 유한요소법, 그리고 경계요소법 등이 사용되고 있다. 차분법은 간편하여 많이 사용되고 있는 방법으로 유승목 등⁽²⁵⁾과 김지준 등⁽²⁶⁾은 이를 이용하여 대형주강품과 자동차용 피스톤 주물의 3차원 응고해석에 관한 연구를 보고하였다. 유한요소법은 대량의 컴퓨터메모리와 긴 계산 시간을 요구하지만 적절한 경계조건으로 실제의 현상과 흡사한 결과를 얻을 수 있어서 많은 연구 사례들이 보고되고 있다^(4,5,12,13,21,28,29).

단순한 형태의 응고해석이나 복잡한 형상의 단순 해석을 위하여 2차원 해석이 활발히 행하여져 왔다. 그러나 정교한 기하학적인 형상을 고려하거나 실제 현상을 잘 표현하기 위해서는 3차원 해석이 필요하나 이 경우 형상데이터의 준비가 쉽지 않고 방만해져 해석에 많은 어려움이 따른다.

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 축대칭 주조의 응고공정을 수식화하고 해석하였다. 상변화 과정 중에 발생하는 잠열의 방출을 고려하기 위하여 온도회복법을 적용하였고 경계면에서의 유효열전달계수를 다양한 1차함수의 형태로 정의하여 열전달계수의 모드를 예측하였다. 또한 주물과 주형의 경계면에서 발생하는 상호 열전달과 접촉은 각각 일치절점법과 경계요소의 도입으로 처리하였다. 끝으로 유한요소 수식화의 타당성을 검증하기 위하여 축대칭 형상의 알루미늄 주조와 강 주조의 응고공정을 개발된 프로그램으로 해석하여 실험치와 상용프로그램 (ANSYS, FIDAP) 해석결과로 비교하였다.

2. 수학적 모델링

2.1 온도장

2.1.1 유한요소 수식화

Fig.1은 해석에 사용된 주조공정에 대한 수학적 모델이다. 통상의 유한요소 수식화 과정을 따른다면, 영역 Ω 에서 미지의 온도 T 는 다음과 같이 형상함수와 각 요소절점의 절대온도의 곱의 합으로 근사화 된다.

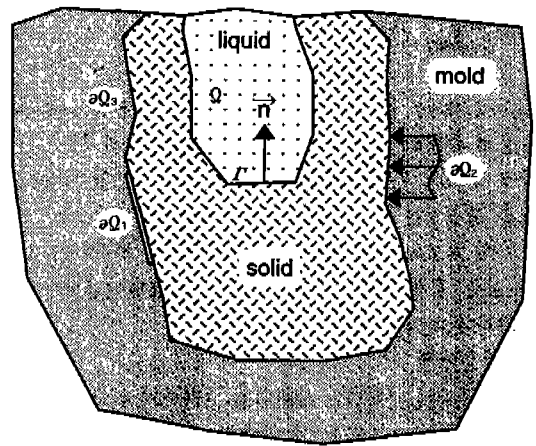


Fig.1 Mathematical model for die casting processes.

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^n T_i(t) N_i(x) \quad (1)$$

여기서, n 은 개개의 요소당 절점의 개수, $N_i(x)$ 는 형상함수, $T_i(t)$ 는 절대온도를 의미한다. Green-Gauss 정리와 약형식을 적용하면 다음과 같은 행렬형태의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$C(T)\dot{T} + (K_k(T) + K_h(T))T = Q_q + Q_2 + Q_3 \quad (2)$$

여기서, C 와 K_k 는 각각 $n \times n$ 의 열용량 행렬과 열전도를 행렬을 나타내고 K_h 는 대류경계조건의 영향을 나타내는 행렬이다. Q_q 는 내부 열생성 벡터를 나타내며, Q_2, Q_3 는 각각 경계 $\partial\Omega_2, \partial\Omega_3$ 로부터의 열유속 벡터를 나타낸다. 식(2)의 행렬과 벡터들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 C &= \int_{\Omega} \rho c N^T N dV, \\
 K_k &= \int_{\Omega} k \nabla N^T \cdot \nabla N dV, \\
 K_h &= \int_{\partial\Omega_3} h N^T N ds \\
 Q_q &= \int_{\Omega} N^T Q dV, \\
 Q_2 &= \int_{\partial\Omega_2} N^T (q_n + q_c + q_r) ds, \\
 Q_3 &= \int_{\partial\Omega_3} N^T h T_{mold} ds
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

여기서, k 는 열전도계수이고 h 는 유효열전달계수이다. 주물과 주형의 경계면에서의 열전달은 시간과 위치의 함수로 알려진 유효열전달계수로 결정되며 이 값은 응고속도를 결정하는 중요한 인자이다. 유효열전달계수는 응고 초기에 최고치를 갖고 이후에 점차적으로 하강하여 일정한 값을 갖게 된다. 본 연구에서도 유효열전달계수 h 를 시간과 위치의 함수로 모델링하였다.

2.1.2 잠열

응고공정에 나타나는 상변화를 고려하기 위하여 수학적으로 잠열을 고려했고, 이 잠열이 응고공정에 미치는 영향을 해석에 포함시키기 위한 방법으로 해석 중에 새롭게 메쉬를 생성할 필요가 없는 온도회복법을 이용하였다. 먼저 잠열의 효과를 고려하지 않은 온도분포 T' 를 구하고, 실제의 온도 T 는 다음과 같은 식을 이용하여 구한다⁽²⁸⁾.

$$\int_{T_s}^T \rho c dT + \int_{T_s}^T \rho L \left(\frac{\partial f_s}{\partial T} \right) dT = \int_{T_s}^T \rho c dT
 \tag{5}$$

여기서, f_s 는 고상율이다. 고액공존역에서 체적 요소를 고려할 때, 시간단계 $t + \Delta t$ 에서 액상선온도 이하에 있는 요소의 에너지 방출량은 다음과 같다.

$$Q = \int_{T_s}^{T^{t+\Delta t}} \rho c V dT
 \tag{6}$$

여기서, $T^{t+\Delta t}$ 는 잠열을 고려하지 않은 시간단계 $t + \Delta t$ 에서의 온도이며, V 는 그 요소의 체적이다. 식(6)을 수치적분하는 과정에서 열물성치는 시간단계 t 에서의 것을 이용한다.

상변화를 수반한 응고과정 중의 잠열의 방출이 균일하다면, 응고영역에서의 에너지 평형으로부터 수정된 실제 온도 $T_{act}^{t+\Delta t}$ 는 다음과 같다⁽²⁸⁾.

$$Q = \int_{T_s}^{T_{act}^{t+\Delta t}} [\rho c + L \frac{\rho}{T_i - T_s}] V dT
 \tag{7}$$

$$T_{act}^{t+\Delta t} = T_i + \frac{(Q/V)(T_i - T_s)}{[c'(T_i - T_s) + L]\rho}
 \tag{8}$$

여기서, L' 은 응고과정 중의 잠열이며, T_i 과 T_s 는 각각 액상과 고상의 온도이다.

이 과정을 응고가 완료될 때까지 계속적으로 반복한다. 마지막 응고단계는 식(6)에서 Q 로 정의된 에너지 방출량과 다음과 같은 상변화 중의 총 에너지의 방출량을 비교함으로써 결정할 수 있다.

$$Q_T = \int_{T_s}^{T_i} [\rho c + \frac{L\rho}{(T_i - T_s)}] V dT
 \tag{9}$$

Q_T 보다 크게 되는 어떤 시간 t' 에서 그 요소는 응고되었다고 생각하고 그때의 온도는 다음과 같이 수정된다.

$$T_{act}^{t'} = T_s + \frac{(Q + Q_T)/V}{(\rho c)_s}
 \tag{10}$$

여기서, $(\rho c)_s$ 는 고상선 온도에서의 열용량이다.

2.1.3 응고결함

수축결함은 응고수축에 의한 체적감소를 보충하기 위한 용탕보급이 불충분한 경우에 생기게 된다. 이를 방지하기 위하여 압탕을 설치하여 최종 응고부가 압탕이 되도록 지향성 응고를 시켜야만 한다. 응고수축결함은 주로 최종 응고부에서 발생하게 되는데 이를 판정하기 위하여 modulus법, 등온도곡선법, 온도구배법, 유동 conductance법, 고상률 구배법, 수정온도 구배법, 압력구배법, 급탕거리법, 직접 시뮬레이션법 등이 수치해석법으로 이용된다⁽³⁴⁾.

일반적으로 기공의 예측은 수축공을 예측하는 것보다 어렵다. Imafuku^(19,20)는 기공은 마지막으로 응고가 되는 영역에 생기는 경향이 있으며 응고말기에 온도구배가 작아짐에 따라 기공은 증가하는 경향이 있음을 알아냈고, Niyama⁽²⁷⁾가 유도한 응고말기의 G/\sqrt{R} 과 연관이 있

음을 발견하게 되었고 이로부터 보다 작은 온도구배로부터 기공이 형성됨을 유도하였다. 여기서, G 는 온도구배, R 는 냉각율을 각각 나타낸다. 본 연구에서는 요소가 고상이 되면 G/\sqrt{R} 을 계산하여 기공의 분포를 예측하였다.

수축공 예측의 수식화는 Imafuku 등^(19,20)의 철계주물에서의 수축기공 예측에 관한 연구에 기초를 두었다. 먼저, 온도의 함수로 표현된 잠열의 방출과 고상율이 도입된다. 철의 고상율은 Fe-C 다이아그램으로부터 얻을 수 있다. Fig.2는 덴드라이트 구조를 보여주고 있다. 여기서 고상율은 0(액상선 온도)에서 1(고상선 온도)까지 변화한다. 용탕은 고상율이 증가함에 따라 액체처럼 흐르는 것이 점점 어려워지기 때문에 고상율이 임계고상율보다 작은 영역에서는 액체처럼 중력에 의해 아래쪽으로 흐르게 되고 고상율이 임계고상율보다 큰 영역에서는 덴드라이트 구조 사이를 흐를 수 없게 된다. 그 때 수축기공의 체적 ΔV_V 가 시간단계 t 의 고립된 비고상영역에서 다음과 같은 식에 의해 결정되어진다⁽²⁸⁾.

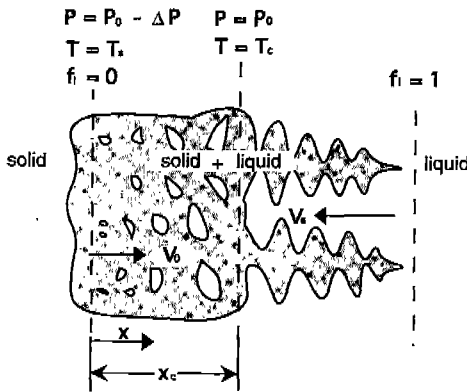


Fig. 2 Porosity formation.

$$\Delta V_V = \int_V \beta \frac{\rho_s}{\rho_l} [f_s^*|_{t-t} (1 - V_V^*|_{t-t}) - f_s^*|_{t-t-\Delta t} (1 - V_V^*|_{t-t-\Delta t})] dV \quad (11)$$

여기서, $V_V^*|_{t-t}$ 는 시간단계 t 에서의 단위체적당 수축공체적, $-f_s^*|_{t-t}$ 는 시간단계 t 에서의 고상율, β 는 응고로 인한 체적의 수축률, ρ_l 은 액상의 질량, 그리고 ρ_s 는 고상의 질량을 각각 나타낸다.

2.2 응력장

2.2.1 유한요소 수식화

응력장에서 모델을 구성하는 단계에서 가장 기본적인 가정은 다음과 같이 스트레인 텐서가 탄성, 소성, 그리고 열에 의한 스트레인의 합으로 표현된다는 것이다.

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^t \quad (12)$$

여기서, ϵ 는 총변형률, ϵ^e 는 탄성변형률, ϵ^p 는 소성변형률, ϵ^t 는 열변형률을 각각 나타낸다. 그리고, 비등온 상태에서의 항복과 힘의 함수는 다음과 같이 가정되어진다.

$$F_{n+1} = F(\sigma_{n+1}, Y_{n+1}) \quad (13)$$

여기서, Y 는 온도와 소성변형에 영향을 받는 단순인장 하에서의 항복응력이다. 그리고 하첨자 $n+1$ 은 시간단계이다. 식(13)에 von Mises의 항복조건과 등방성 가공경화 법칙을 적용하면 항복함수는

$$F_{n+1} = \frac{1}{2}(s \cdot s)_{n+1} - \frac{1}{3}(Y_{n+1})^2 \quad (14)$$

같이 가정될 수 있다. 여기서, s 는 편차응력텐서, $Y = Y(\bar{\epsilon}^p, T)$ 는 단축인장에서의 항복응력, $\bar{\epsilon}^p$ 는 유효소성응력, 그리고, T 는 온도를 각각 나타낸다. 항복함수 F 는 탄성영역에서는 음의 값을 갖고 소성영역에서는 영(zero)의 값을 갖는다. 그리고 $\bar{\sigma} \geq \sigma_0$ 인 경우에 유효응력-변형률 관계는

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 + E_T(\bar{\epsilon} - \frac{\sigma_0}{E}) \quad (15)$$

$$\bar{\epsilon}^p = \bar{\epsilon} - \frac{\bar{\sigma}}{E} \quad (16)$$

로 쓸 수 있다. 이때 $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$ 는 각각 유효응력과 유효변형률을 나타낸다. 소성변형이 일어나는 동안에는 Y 는 $\bar{\sigma}$ 와 등가이므로 식(15), 식(16)로부터 현상태의 항복응력 Y_{n+1} 은

$$Y_{n+1} = (H\bar{\epsilon}^p)_{n+1} + (\sigma_0)_{n+1} \quad (17)$$

이며 H_{n+1} 은 $H_{n+1} = \frac{(E_T)_{n+1}}{1 - (E_T/E)_{n+1}}$ 로 정의된다.

응력증분을 계산하기 위한 최종적인 형태의 식은 다음과 같이 주어지게 된다.

$$d\sigma_{n+1} = D^{ep}_{n+1}d\epsilon_{n+1} + dG_{n+1}\epsilon^n + d\Phi_{n+1} \quad (18)$$

여기서,

$$D^{ep}_{n+1} = (D - \frac{aa^T}{A + a \cdot S})_{n+1} \quad (19)$$

$$= D_{n+1} - D^p_{n+1}$$

$$dG_{n+1} = (I - \frac{aS^T}{A + a \cdot S})_{n+1}dD_{n+1} \quad (20)$$

$$= (I - W)_{n+1}dD_{n+1}$$

$$d\Phi_{n+1} = \frac{xa}{A + a \cdot S} \quad (21)$$

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}[(Y \frac{\partial Y}{\partial T} dT)_{n+1} + \sigma_0 - \bar{\sigma}_A] \quad (22)$$

$$a_{n+1} = (DS)_{n+1} \quad (23)$$

로 정의되며, I 는 단위행렬이다.

영역 Ω 에서 가상일의 원리는

$$\int_{\Omega} \delta u \cdot b \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u \cdot t \, d\Gamma = \int_{\Omega} \delta \epsilon \cdot s \, d\Omega \quad (24)$$

이며, δu 는 가상변위 벡터, b 는 체적력 벡터, t 는 경계 Γ 에서의 표면력, $\delta \epsilon$ 는 가상변위에 의해 생기는 가상변형률, σ 는 응력, 그리고 Γ 는 영역 Ω 에서 표면력이 주어진 경계를 나타낸다. 이때 시스템 방정식은 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$K_{n+1}(a_{n+1} - a_n) = f_{n+1} \quad (25)$$

여기서, K_{n+1} 과 f_{n+1} 은 다음과 같이 정의된다.

$$K_{n+1} = \int_{\Omega} B^T D^{ep}_{n+1} B \, d\Omega \quad (26)$$

$$f_{n+1} = \int_{\Omega} N^T b_{n+1} \, d\Omega + \int_{\Omega} N^T t_{n+1} \, d\Omega \quad (27)$$

$$- \int_{\Omega} B^T \sigma_n \, d\Omega + \int_{\Omega} B^T D^{ep}_{n+1} d\epsilon^n \, d\Omega$$

$$- \int_{\Omega} B^T (dG_{n+1}\epsilon^n + d\Phi_{n+1}) \, d\Omega$$

여기서, N 은 형상함수이고 B 는 변형률-변위의 연산자이다.

2.2.2 경계요소

서로 접하는 대부분의 시스템은 경계면에서 접촉과 마찰을 수반한다. 접촉과 마찰 등의 거동으로 경계면을 따라서 슬립 또는 개방 등의 현상이 일어난다. 개방은 두개의 인접한 경계의 분리를 의미하고, 슬립은 전단력이 조인트의 전단강도를 초과하는 경우에 조인트 표면에서의 상대운동을 의미한다. 이 연구에서는 이러한 불연속성을 고려하기 위하여 경계면 사이에 경계요소를 사용하였다.

Fig. 3과 같은 경계요소에서 조인트 사이의 변위를 선형이라 가정하면 그 변위는 다음과 같이 주어진다.

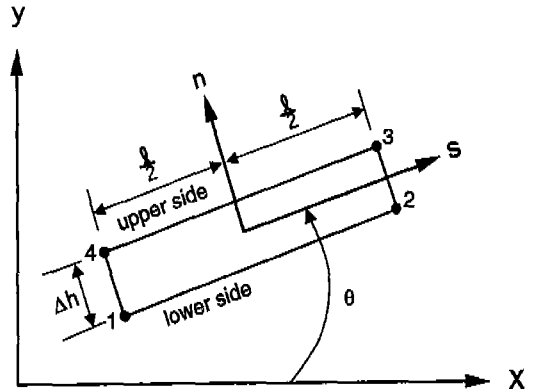


Fig.3 Geometry of interface element.

$$u = b_1 + b_2 * s \quad (28)$$

$$v = b_3 + b_4 * s \quad (29)$$

$b_1 \sim b_4$ 의 상수들은 재료의 절점변위의 형태로 결정된다. 상부와 하부의 변위는 다음과 같이 쓰여진다.

$$u_{up} = \frac{1}{2}(u_3 + u_4) + \frac{s}{l}(u_3 - u_4) \quad (30)$$

$$v_{up} = \frac{1}{2}(v_3 + v_4) + \frac{s}{l}(v_3 - v_4) \quad (31)$$

$$u_{dn} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{s}{l}(u_2 - u_1) \quad (32)$$

$$v_{dn} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{s}{l}(v_2 - v_1) \quad (33)$$

여기서, 상부는 up , 하부는 dn 의 하첨자로 표시하였다. 두 면의 상대변위는 조인트의 중심에서 다음과 같이 표현된다.

$$W_j = \begin{pmatrix} u_{up} - u_{dn} \\ v_{up} - v_{dn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta v_0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

식(30)~식(33)을 식(34)에 대입하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$W_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A & 0 \\ 0 & -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A \end{bmatrix} \{u_1 \ v_1 \dots u_4 \ v_4\}^T \quad (35)$$

여기서, $A = 1 - \frac{2s}{l}$, $B = 1 + \frac{2s}{l}$ 이다. 식(34)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_j = \frac{1}{2} N q \quad (36)$$

변위 W 를 통하여 작용하는 단위길이당 힘 P 는 단위 길이당 조인트 요소의 강성 k 와는

$$P = kW \quad (37)$$

와 같은 관련을 갖고 이 때 P 와 k 는 다음과 같다.

$$P = \begin{pmatrix} P_s \\ P_n \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$k = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (39)$$

여기서, k_n 과 k_s 는 접선 및 법선 방향의 강성이다. 저장된 총에너지는 다음과 같고

$$E = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} W_j P \ ds = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} q^T N^T k N q \ ds \quad (40)$$

이것으로부터 s 방향으로 향하는 조인트 요소의 강성행렬은 다음과 같은 식(41)이 된다.

$$K' = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} N^T k N \ ds \quad (41)$$

경계요소의 전체좌표계에서의 강성행렬은 변환에 의해 다음과 같은 식으로 구하여진다.

$$K = R K' R^T \quad (42)$$

여기서, R 은 s - n 축과 x - y 축의 변환행렬로 정의된다.

3. 유한요소 프로그램

축대칭 주조 응고공정의 시뮬레이션은 Fig.4와 같은 과정들을 거치게 된다. 시뮬레이션은 전처리 과정, 해석과정, 그리고 후처리 과정 등의 3단계로 이루어지며 온도장을 해석한 후 그 결과를 응력장 해석을 위한 데이터로 이용한다.

개발된 프로그램은 주물과 주형의 접촉 경계면에서의 경계조건을 시간과 위치의 함수로 처리할 수 있으며, 주물과 주형사이의 냉각수, 분말이나 패드를 통한 열전달을 해석할 수 있다. 온도회복법을 통하여 상변화 과정 중의

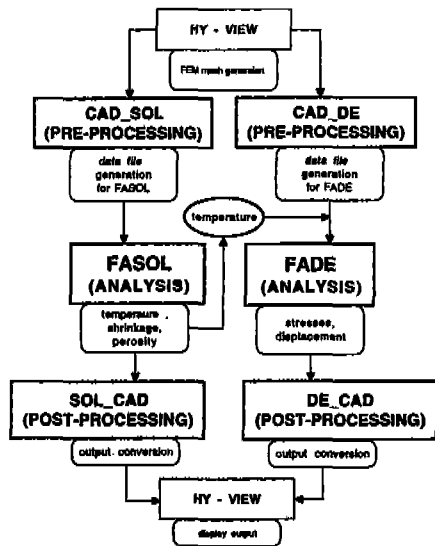


Fig.4 Analysis system for analyzing solidification and deformation of axisymmetric casting processes.

잠열의 방출 효과를 고려할 수 있고, 수축공과 기공의 형상을 예측할 수 있다. 한편, 과도온도분포는 변형해석을 위하여 응력장의 입력데이터로 사용되어진다.

응고공정의 컴퓨터 해석과정은 고상율의 값이 임계고상율의 값보다 작은 경우에는 다음 시간단계의 온도해석을 진행하고, 고상율이 임계고상율의 값과 같은 경우에는 온도구배를 계산한다. 이와 같은 과정은 고상율이 임계고상율의 값보다 커질 때까지 계속된다. 만약 고상율의 값이 1과 같으면 G/\sqrt{R} 을 계산하고 그 값을 응고시간, 온도구배 등과 함께 출력한다. 이러한 과정을 모든 요소의 응고가 완료될 때까지 반복한다. 탄소성해석을 위하여 von Mises 항복조건과 Prandtl-Reuss의 구성방정식을 적용하였다. 물질의 온도 의존성으로 인한 비선형 문제의 해석을 위하여 적은 반복으로도 해의 수렴성이 좋은 접선계수 알고리즘을 적용하였고 접촉경계를 실제적으로 모델링하기 위하여 경계요소를 도입하였다.

전형적인 열 및 기계복합시스템을 해석하기 위해서는, 먼저 과도온도분포 해석을 한 후에 온도 프로파일을 받아서 응력장을 해석한다. 이 때 상변화 영역 근처에서는 온도변화가 심하고 또한 액상에서 고상으로 변하면서 물성치가 크게 바뀌기 때문에 일반적으로 작은 시간간격으로 계산을 수행해야 한다.

4. 수치 해석

4.1 알루미늄 주조

본 연구에서 개발된 상변화와 접촉을 고려한 유한요소 프로그램의 효율성 및 정확성을 검증하기 위하여, 축대칭 알루미늄 주조의 응고실험 결과와 상용프로그램인 ANSYS와 FIDAP의 해석결과를 본 연구의 전산시뮬레이션 결과와 비교하였다.

Fig.5는 본 해석을 위하여 설정된 모델의 기하학적인 형상이다. 주형은 높이가 10.5cm이고, 지름과 높이가 8cm인 원통형 주물을 주조할 수 있도록 설계되어 있다.

Fig.6은 주형과 주물의 온도를 측정하기 위한 실험장치의 개략도이다. 실험장치는 온도측정을 위한 열전대와 열전대의 위치를 고정시키는 클램프, 열전대에서 측정된 전압차이를 온도로 변환시켜 주는 인터페이스 카드 및 개인용 컴퓨터로 이루어졌다. 최종적으로 응고가 완료될 것으로 예상되는 주물 상단 중앙부로부터 아래로 18mm 떨어진 A점과, A점에서 아래로 22mm 떨어진 B점에 열전대를 고정시켜 주물의 온도를 측정하였다. 또한 주형의 온

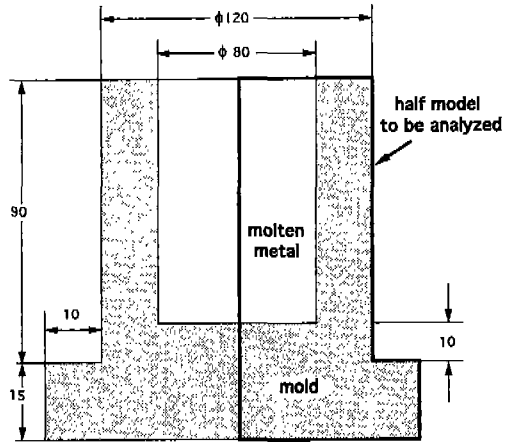


Fig.5 Geometry for an axisymmetric aluminum casting.

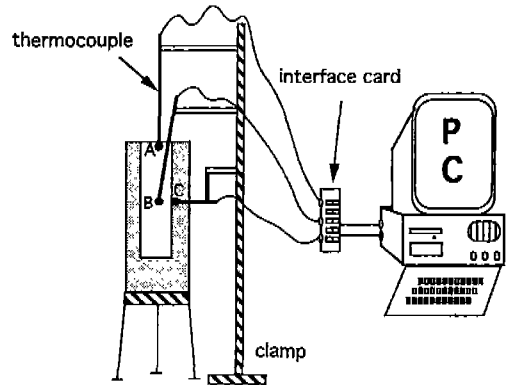


Fig.6 Experimental setup.

도를 측정하기 위하여 B점과 같은 높이에서 주물로부터 2mm 떨어진 곳까지 드릴로 구멍을 낸 다음 그곳(C점)에 열전대를 고정시켰다. 온도측정을 위한 열전대의 위치는 Fig.7에 각각 나타내었다. 그리고 온도측정을 위한 열전대로 인하여 변형형상이 영향을 받을 것이므로, 정상적인 변형형상을 측정하기 위하여 열전대를 제거한 후에 동일한 초기조건과 경계조건으로 실험을 다시 수행하였다.

축대칭 형상이므로 후측 절반의 형상만을 해석하였으며 해석을 위하여 주물은 231개의 절점과 200개의 선형 사각형 요소, 주형은 328개의 절점과 279개의 선형 사각형 요소로 분할하였다(Fig.8 참조). 주형의 온도를 상온으로 하여 주물을 냉각시키는 경우에, 열전대의 응답성이 주물의 냉각속도보다 느려 올바른 온도분포를 얻을 수 없었

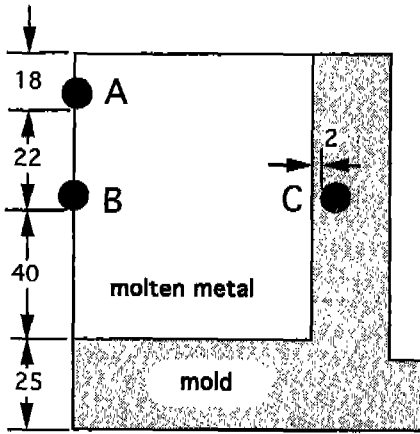


Fig.7 Locations for measuring temperature.

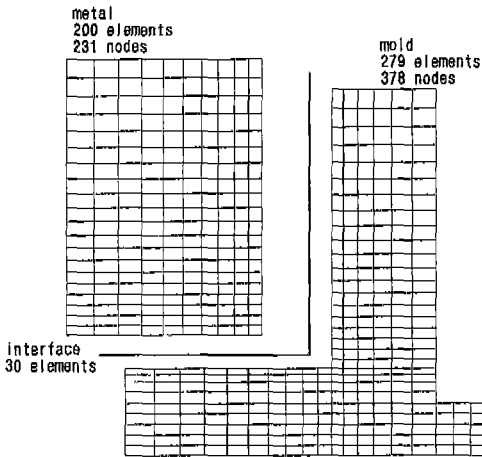


Fig.8 FEM model for an axisymmetric aluminum casting.

다. 따라서 주형을 미리 300℃까지 예열하여 주물이 서서히 냉각되도록 초기조건을 정하였다. 주물/주형이 접한 부분의 주물의 온도는 677.5℃, 주물의 내부는 700℃, 주형/주물이 접한 부분의 주형의 온도는 350℃, 주형의 내부는 300℃로 균일하다고 가정하였으며, 주물과 주형의 경계면은 상호접촉을 고려하기 위하여 경계요소로 모델링하였다. 그리고 주물과 주형의 물성치와 해석조건들은 Table 1, Table 2, Table 3, Table 4, 그리고 Table 5에 각각 나타내었다.

본 연구에서는 실험과 시뮬레이션으로 구한 온도의 오차를 최소화하도록 열전달계수의 모드를 결정하는 방법⁽²⁸⁾을

Table 1 Thermal properties of aluminum metal for an axisymmetric aluminum casting^(29,30).

initial temperature [℃]	700.0
thermal conductivity [W/m℃]	197.45*exp[5.25e-4T]
heat capacity [J/kg℃]	1030.3 + 0.4T (T<660)
	801.27 + 0.46T (T≥660)
density [kg/m ³]	2530.0 (T<660)
	2350.0 (T≥660)
latent heat [J/kg]	394000.0
thermal expansion rate [α/℃]	(22.1+3.6e-2T+7.6e-6T ² -8.4e-9T ³)*10 ⁻⁶

Table 2 Thermal properties of steel mold for an axisymmetric aluminum casting⁽²⁵⁾.

temperature [℃]	conductivity [J/m ² sec℃]	heat capacity [J/kg℃]	density [kg/m ³]
<200	47.5	506.3	7500.0
300	43.2	577.4	
500	38.7	662.0	
700	34.1	882.8	

Table 3 Simulation condition for an axisymmetric aluminum casting^(28,29,30).

heat transfer coeff. [J/m ² sec℃]	mold - air	23.0
	metal - mold (TYPE 3)	initial : 5500 final : 1100
latent heat [J/kg]		394000.0
critical solid fraction ratio		0.6
initial temperature [℃]	metal / mold	700.0 / 300.0
initial surface temperature [℃]	metal / mold	677.5 / 350.0
liquidus temperature [℃]		660.0
solidus temperature [℃]		660.0
solidification shrinkage ratio [%]		7.1

Table 4 Mechanical properties of aluminum metal for an axisymmetric aluminum casting⁽³⁶⁾.

tensile strength [MPa]	70.0(liquid: 70.0Pa)
elastic modulus [GPa]	70.0(liquid: 70.0Pa)
shear modulus [GPa]	26.0(liquid: 70.0Pa)
poisson's ratio	0.33(liquid: 0.5)

Table 5 Mechanical properties of steel mold for an axisymmetric aluminum casting^(29,30).

tensile strength [MPa]	270.0
elastic modulus [GPa]	210.0
shear modulus [GPa]	80.0
poisson's ratio	0.30

도입하여, 다음과 같이 유효열전달계수를 응고시간을 변수로 하는 3개의 모드로 가정하였다(Fig.9 참조).

TYPE 1: $\bar{h} = 1$

TYPE 2: $\bar{h} = 1 - 0.8t$

TYPE 3: $\bar{h} = 1(0 \leq t \leq 0.3)$
 $\bar{h} = 0.2(0.3 < t \leq 1)$

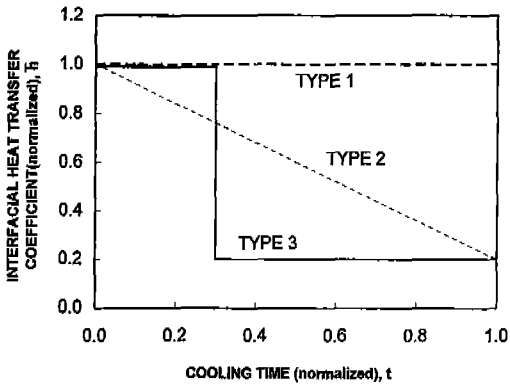


Fig.9 Various models for a effective heat transfer coefficient.

TYPE 1은 응고시간에 관계없이 그 값이 일정한 모드이고 TYPE 2는 응고가 진행되면서 그 값이 일정하게 감소하는 모드이다. 그리고 TYPE 3은 각각 응고 초반과 후반에 값이 일정하게 유지되는 모드이다. Fig.10은 Fig.9에서 보인 3종류의 모드를 사용하여 A점에서의 주물 온도분포를 예측한 것이다. 응고 초기에는 차이가 거의 없지만, 응고가 끝나는 부분에서 각기 다른 양상을 보이고 있다. 이 중에서 TYPE 3이 실험결과와 잘 일치하여 본 연구에서는 TYPE 3의 유효열전달계수 모드로 해석하였다.

Fig.11과 Fig.12는 주물의 냉각곡선에 대하여 본 연구의 유한요소해석결과(FEM), 실험결과(EXPERIMENT), ANSYS 해석결과(ANSYS), 그리고 FIDAP 해석결과(FIDAP)를 상호비교한 것이다. 개발된 프로그램과 ANSYS(Ver.4.4) 해석은 IBM PC(CPU:486 DX-2, RAM:8MB)를 이용하여 약 5분과 약 4시간이

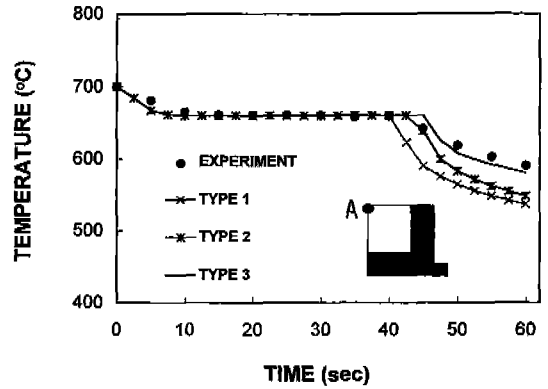


Fig.10 Cooling curves at A by various effective heat transfer models.

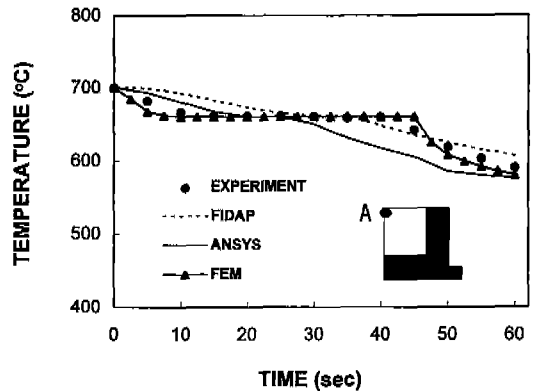


Fig.11 Comparison of cooling curve at A among EXPERIMENT, FIDAP, ANSYS, and FEM.

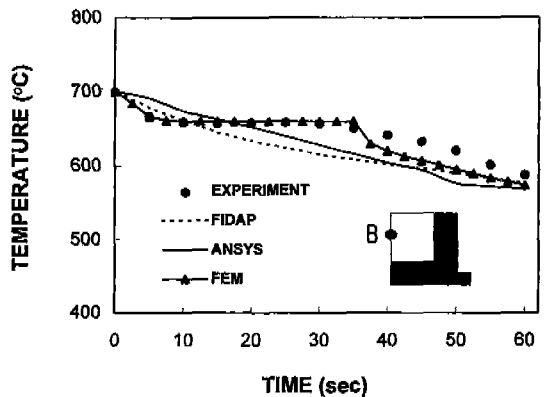


Fig.12 Comparison of cooling curve at B among EXPERIMENT, FIDAP, ANSYS, and FEM.

각각 소요되었으며, FIDAP(Ver.7.0)은 IBM RS6000(RAM:32MB) W/S를 이용하여 약 30분 정도 계산시간이 걸렸다. ANSYS와 FIDAP 해석의 경우에 등가비열법으로 잠열을 처리하였는데 시간증분을 매우 작게(0.01초)하였음에도 불구하고 잠열의 효과를 잘 반영하지 못하였지만, 개발된 프로그램은 잠열의 효과를 잘 반영하여 실험결과와 근사한 결과를 보였다. A점에서는 응고초기와 상변화 이후의 온도가 실험치보다 낮은 것을 제외하면 경향과 크기가 실험치와 잘 일치하고, B점에서도 상변화 이후의 온도가 실험치 보다 낮은 것을 제외하면 경향이 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 온도가 실제의 실험치 보다 낮게 평가된 것은 열전도와 열용량 등의 물성치가 고온에서 정확도가 떨어지고, 또한 충전과정의 유동해석이 결여되어 초기조건으로 주어진 온도장이 불안정한 것으로부터 기인한 것으로 추측된다.

Fig.13은 주형에서의 냉각곡선으로서, 본 해석의 경우에 경향은 일치하지만 전반적인 온도분포가 실험치에 비해 낮은 것을 알 수 있다. 마찬가지로 FIDAP과 ANSYS 해석의 경우에도 온도가 실험치에 비해 낮은 값으로 평가되었다. 이것은 상변화 과정 중에 발생하는 잠열의 방출을 효과적으로 고려하지 못하여 주형과 접한 주물의 온도가 빨리 하강하였기 때문인 것으로 사료된다.

Fig.14는 10초와 40초가 경과되었을 때의 주물의 온도분포이다. 각 등온선의 온도차이는 5℃이고 주형과의 온도차이에 의해 등온선이 점차로 주물의 내부로 이동함을 볼 수 있다. 가장 안쪽에 존재하는 굵은 선이 660℃의 등온선이며 이 선을 따라 고액경계가 형성된다. 따라서

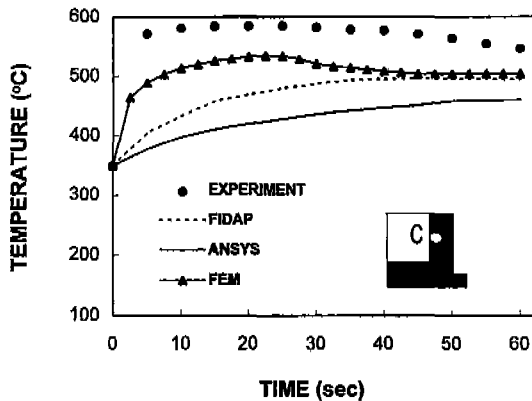
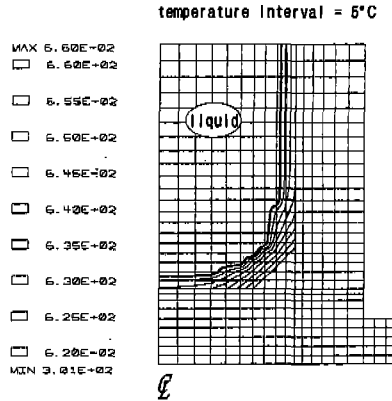
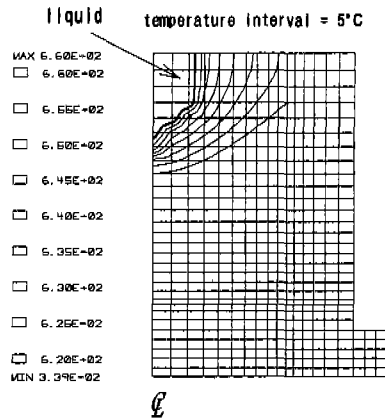


Fig.13 Comparison of cooling curve at C among EXPERIMENT, FIDAP, ANSYS, and FEM.



(a)



(b)

Fig.14 Temperature distributions of the metal (a) at 10 sec. and (b) at 40 sec.

이 선의 안쪽은 액상이고, 바깥 쪽은 이미 고상으로 상변화가 완료되었음을 알 수 있다. 40초가 지난 후에 주물은 응고가 거의 완료되었음을 알 수 있다.

Fig.15는 온도장 해석으로부터 예측한 수축공의 분포도이다. 각각의 요소는 0에서 1까지의 기공분율값을 가지며 1에 가까운 값을 가질수록 수축공의 생성 확률이 높다고 할 수 있다. 따라서 빗금으로 표시된 상단 중앙부의 3개의 요소는 그 값이 0.8 이상이므로 다른 요소에 비해 수축공 생성 확률이 상대적으로 높아 수축공이 발생할 것으로 예측할 수 있다.

Fig.16은 측정된 변형형상(measurement)과 유한요소해석에 의해 예측된 변형형상(FEM)을 상호 비교한 것

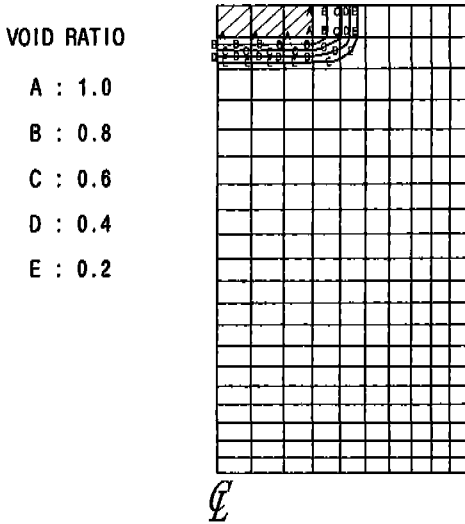


Fig.15 Void fraction contours for predicting shrinkage cavity by FEM.

이다. 주물의 반단면 변형형상을 측정하기 위하여 응고시킨 주물을 반으로 절단하였다. 측정된 변형형상은 굵은 실선으로 표시하였고, 유한요소해석으로 예측한 변형형상은 가는 실선으로 표시하였다. 주물 상부에 생긴 함몰은 상변화에 의한 체적수축, 중력, 온도차이 등에 의해 형성된 수축공으로서, Fig.15의 수축공 분포도에서 수축공 생성확률이 높은 요소로 확인된 요소와 일치하고 있다. Fig.16에서 함몰 최대 깊이는 실험의 경우에 약 18mm로 측정되었고, 유한요소해석의 경우에는 약 16.7mm로 예측되어 차이를 보이고 있지만, 전체적인 수축량과 변형형상이 일치하고 있음을 볼 수 있다.

본 연구에서 도입된 경계요소는, 일치절점법을 이용하는 경우에 발생하는 주물의 수축방향과 같은 방향으로 주형이 인장되는 현상을 방지하여 주물의 수축을 잘 묘사하였다. 이 때 경계요소의 탄성계수 값은 해석에 큰 영향을 미쳤으며, 본 예제에서 사용된 탄성계수 값은 압축인 경우에 주형과 같다고 가정하였고 인장인 경우에는 아주 작은 값으로 가정하였다. 하지만 형상이 복잡하고 정밀한 부품의 구조공정을 해석할 경우에는 이들에 대한 보다 정확한 물성치를 실험으로 확인하는 것이 필요할 것으로 사료된다.

4.2 강 주조

개발된 프로그램의 유용성을 보이기 위하여 보다 복잡한 형상의 합금강 응고공정을 전산해석하고 응고결함의 위치를 실험결과⁽¹⁹⁾와 비교하였다. 해석에 사용된 모델의 기하학적인 형상은 Fig.17에 나타나 있다. 형상이 측대칭이므로 주물의 오른쪽 절반에 대하여 Fig.18과 같이 주물은 341개의 절점과 300개의 선형 사각형 요소로, 주형은 489개의 절점과 420개의 선형 사각형 요소로 모델링하였다. 주물과 주형이 접한 부분의 주물의 온도는 1524.5℃, 주물의 내부는 1530.0℃, 주형/주물이 접한 부분의 주형의 온도는 700.0℃, 주형의 내부는 25.0℃로 균일하다고 가정하였다⁽²⁸⁾. 주형과 주물, 주형과 대기, 주물과 대기는 상호간에 열전달이 생기며 이 때의 유효열전달계수는 567.0/567.0, 23.0, 23.0 (J/sec.m².℃)로 각각 가정하였다. 주물의 재료는 합금강(0.14% C, 0.43% Si, 0.78% Mn, 0.012% P, 0.01% S, 그 외% Fe)이고, 주형의 재료는 chromite sand이다. 계산에 사용되어진 열전도율, 비열, 등의 열물성치는 Table 6, Table 7과 같이 온도에 따라 크기가 변하므로 계산 중에 이들 값이 각각의 온도에 맞게 선형보간하였다. Table 8,

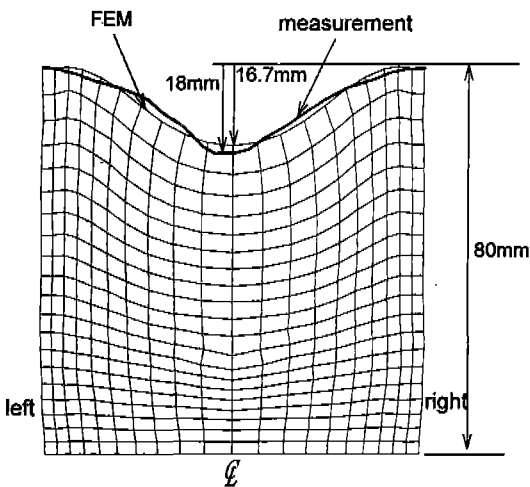


Fig.16 Comparison of metal contraction between FEM prediction and measurement. (FEM prediction of left-half side is reflected from the right-half side with respect to center line)

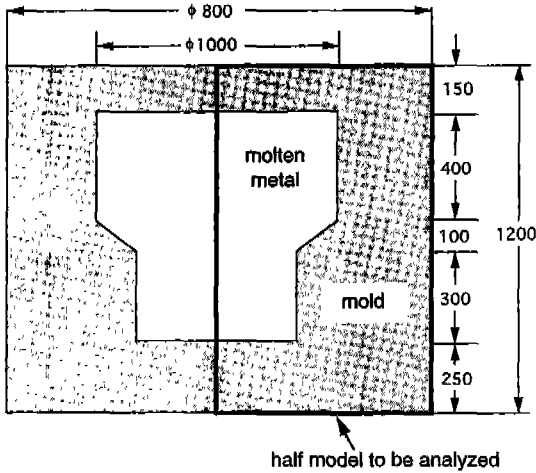


Fig.17 Geometry for an axisymmetric steel casting.

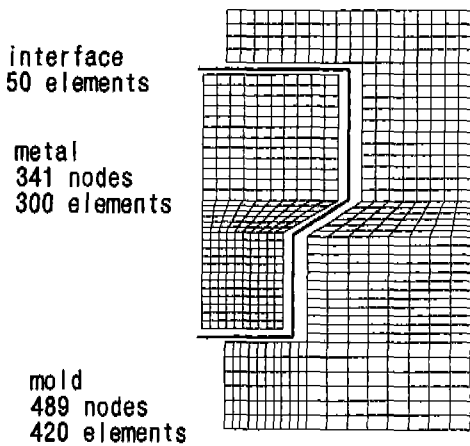


Fig.18 FEM model for an axisymmetric steel casting.

Table 9, 그리고 Table 10에는 주형과 대기 상호간의 열전달계수, 주형과 주물 경계면에서의 열전달계수, 초기 조건으로 주어지는 온도, 액상선 온도, 고상선 온도, 잠열, 인장강도, 탄성계수 등의 해석에 필요한 물성치들이 나타나 있다. 대기의 온도는 27℃로 일정하다고 가정하고, 합금강의 임계고상율은 0.7로 설정하였다. 주물과 주형의 경계면은 경계요소로 모델링하여 상호접촉을 고려하였다.

용탕이 용입되고 20분이 지난 후와 50분이 지난 후의 주물의 온도분포를 Fig.19에 나타내었는데, 주물의 응고

Table 6 Thermal properties of steel metal for an axisymmetric steel casting⁽²⁸⁾.

temperature [°C]	conductivity [J/msec°C]	heat capacity [J/kg°C]	density [kg/m ³]
< 200.0	47.5	506.3	7500.0
300.0	43.2	577.4	
500.0	38.7	682.0	
700.0	34.1	882.8	
900.0	29.6	753.1	
1100.0	30.1	757.3	
1200.0	31.0	803.3	
> 1525.0	41.8	836.8	7000.0

Table 7 Thermal properties of chromite sand mold for an axisymmetric steel casting⁽²⁸⁾.

temperature [°C]	conductivity [J/msec°C]	heat capacity [J/kg°C]	density [kg/m ³]
< 200.0	0.82	711.3	2750.0
300.0	0.77	753.1	
500.0	0.78	785.6	
700.0	0.84	815.9	
900.0	0.94	836.8	
1100.0	1.09	857.7	
1300.0	1.24	866.1	
1400.0	1.31	874.5	

Table 8 Simulation condition for an axisymmetric steel casting⁽²⁸⁾.

heat transfer coeff. [J/m ² sec°C]	solid - air	23.0
	metal - mold	567.0
latent heat [J/kg]	251040.0	
critical solid fraction ratio	0.67	
initial temperature [°C]	metal / mold	1530.0 / 25.0
initial surface temperature [°C]	metal / mold	1524.5 / 700.0
liquidus temperature [°C]	1525.0	
solidus temperature [°C]	1494.0	
solidification shrinkage ratio [x]	3.64	

Table 9 Mechanical properties of steel metal for an axisymmetric steel casting^(29,30).

tensile strength [MPa]	270.0(liquid: 270.0Pa)
elastic modulus [GPa]	210.0(liquid: 210.0Pa)
shear modulus [GPa]	80.0(liquid: 80.0Pa)
poisson's ratio	0.30(liquid: 0.5)

Table 10 Mechanical properties of sand mold for an axisymmetric steel casting⁽³⁷⁾.

tensile strength [Pa]	8640
elastic modulus [MPa]	7.7
shear modulus [MPa]	2.7
poisson's ratio	0.21

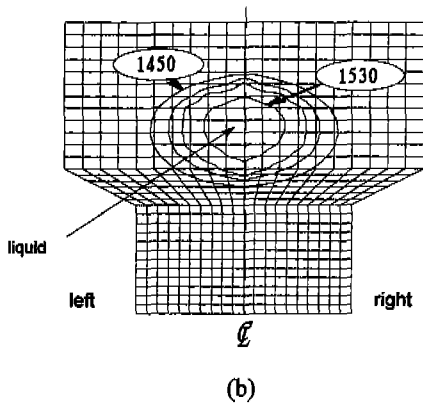
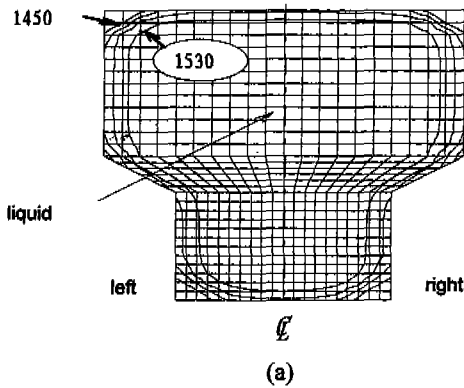


Fig.19 Temperature distributions of the metal (a) at 20 min. and (b) at 50 min. (FEM prediction of left-half side is reflected from the right-half side with respect to center line)

가 진행되면서 등온선이 주물 내부로 이동하는 모습을 볼 수 있다. 가장 안쪽에 존재하는 1530℃ 등온선과 가장 바깥 쪽의 1450℃ 등온선 사이가 고액공존역이 되므로, 1450℃ 등온선 외곽은 이미 상변화가 완료되어 고상이 되었고, 1530℃ 등온선의 내부는 여전히 액상으로 존재함을 알 수 있다. 알루미늄 주조의 경우에는 공기에 개방된 주물상부가 주형과 접촉한 부분보다 열전달이 적게 이루어져 등온선이 U자형을 이루며 응고가 진행되었지만, 본 예제의 경우에는 주물의 상부가 주형과 접촉되어 냉각되므로, Fig.19에서 등온선이 폐곡선의 형태를 이루고 있음을 볼 수 있다.

FEM으로 예측한 수축공 분포와 Imafuku의 실험결과⁽¹⁹⁾를 비교하여 Fig.20에 나타내었다. Fig.20 (a)에서 각

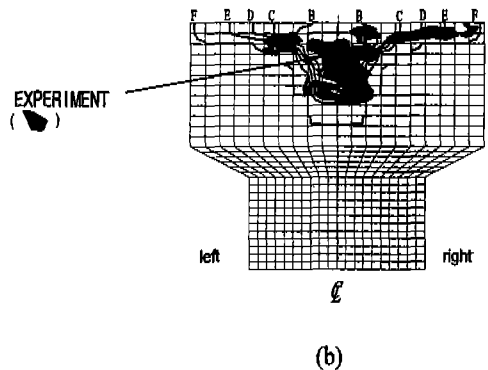
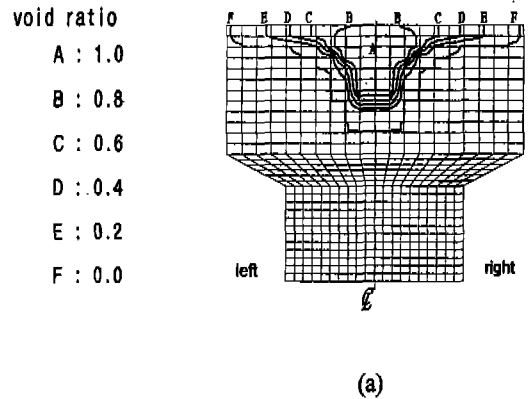


Fig.20 (a) Shrinkage prediction by FEM and (b) comparison of shrinkage distributions between FEM and EXPERIMENT⁽¹⁹⁾. (FEM prediction of left-half side is reflected from the right-half side with respect to center line)

요소는 0에서 1까지의 기공분율 값을 갖고, 그 값이 클수록 결합이 생길 가능성이 큰 것을 의미하므로 A로 표시된 부분은 결합이 존재할 가능성이 크다. (b)에서 음영으로 표시된 부분이 Imafuku의 실험으로 측정된 결합이며 FEM으로 예측한 부분과 잘 일치함을 알 수 있다. 또한 이 부분은 최종 응고 위치로 예상되는 부분을 포함하고 있다. 주물이 폐곡선 형태의 응고곡선을 이루며 냉각되는 경우에는 최종 응고부에서 결합이 생길 가능성이 크기 때문에, 최종 응고위치가 주물 상단에 생기도록 냉각시킨다면, 주물내부에서 발생할 수 있는 결합을 방지할 수 있을 것이다.

Fig.21은 FEM에 의해 예측된 변형형상으로서 전체적으로 약 20mm 정도씩 수축하였고, 특히 상단 모서리부

에서는 28mm까지 수축하였다. 예측된 변형형상으로부터 주형과 주물 경계면에 도입된 경계요소가 주물의 수축을 잘 묘사하였음을 볼 수 있다.

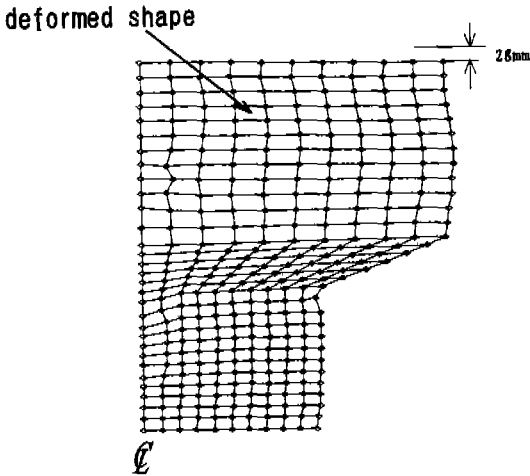


Fig.21 Prediction of deformed shape of metal by FEM. Deformed shape is enlarged by 2 times.

5. 결 론

본 연구에서는 상변화와 접촉을 고려하여 축대칭 주조의 응고공정을 탄·소성 유한요소법으로 수치화하였다. 상변화로 인한 응고잠열의 방출을 고려하기 위하여 온도 회복법을 적용하였고, 일치절점법으로는 묘사하기 어려운 주형과 주물 경계면의 개방 또는 미끄러짐 등의 접촉은 경계요소로 수치화하였다. 그리고 액상에서의 응력을 매우 작다고 가정하여 액상을 포함한 응력장을 수치화하였다. 본 연구에서 정식화한 유한요소 수치화의 정당성을 검증하기 위하여 축대칭 알루미늄 주조의 응고실험 결과와 ANSYS, FIDAP 해석결과를 개발된 프로그램의 해석결과와 비교하고, 또한 합금강의 주조공정을 해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 개발된 프로그램으로 축대칭 알루미늄 주조공정을 해석하여 온도분포, 응고결함, 변형형상 등을 예측한 것이 실험치와 일치하였다. 이로부터 본 연구에서 정식화한 온도장과 응력장 유한요소 수식이 타당한 것임을 확인할 수 있었다.

2) 알루미늄과 강주물의 변형형상을 관찰한 결과 경계요소는 수축과 인장이 동시에 발생하는 주형과 주물 경계면

의 접촉을 적절하게 묘사하였음을 알 수 있었다.

3) 알루미늄 주물의 변형형상을 구하여 이로부터 수축공을 유추하였다. 수축이 심하게 발생한 주물의 상단 중앙부가 실험에서 관찰한 수축공과 일치함을 알 수 있었고, 이것은 본 연구에서 정식화한 Imafuku 등이 제안한 방법으로 구한 결과와도 일치하였다. 하지만 내부에서 결함이 발생한 강주물의 경우에는 변형형상으로부터 이를 예측할 수 없었다.

4) 주물의 상변화를 고려하기 위하여 온도회복법을 도입하고, 경계에서의 열전달계수를 응고시간의 함수로 정의하여 온도장을 해석한 결과 비교적 정확한 온도분포를 얻을 수 있었다.

후 기

알루미늄 주조 응고실험에 협조하여 주신 윤의박 교수님께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. J. H. Weiner, B. A. Boley, "Elastic-Plastic Thermal Stress in a Solidifying Body", J. Mech. Phys. Solids, vol.11, pp.145-154, 1963.
2. H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, 2nd Edn., Oxford University Press, 1959.
3. A. V. Luikov, Analytical Heat Diffusion Theory, Academic Press, 1968.
4. 윤석일, 김용환, "용탕유동과 응고를 고려한 주조공정의 유한요소해석", 한국정밀공학회지, 제13권, 제3호, pp.110-122, 1996.
5. 김용환, J. L. Chenot, "금속 주조공정에서 열전달과 상변화를 고려한 재료 유동의 유한요소 해석", 한국소성가공학회지, 제2권, 제1호, pp.73-82, 1993.
6. 황기영, 이진호, "수직응고 시스템에서 밀도차와 냉각률이 열전달 및 열응력에 미치는 영향", 대한기계학회논문집, 제19권, 제4호, pp.1095-1101, 1995.
7. V. R. Voller, M. Cross, and N. C. Markatos, "An Enthalpy Method for Convection / Dif-

- fusion Phase Change", *Int. J. Num. Methods Eng.*, vol.24, no.1, pp.271-284, 1987.
8. R. W. Lewis, K. Morgan and O. C. Zienkiewicz, *Numerical Method in Heat Transfer*, Willy, Chi chester, pp.201-213, 1981.
 9. K. S. Chen, "Hydrothermomechanical Response Investigations Associated with Elastic Porous Media", Ph. D. Dissertation, The Ohio State Univ., 1986.
 10. W. D. Rolph and K.J. Bathe, "A Efficient Algorithm for Analysis of Nonlinear Heat Transfer with Phase Changes", *Int. J. Num. Methods Eng.*, vol.18, pp.119-134, 1982.
 11. T. C. Tszeng, Y. T. Im, and S. Kobayashi, "Thermal Analysis of Solidification by the Temperature Recovery Method", *Int. J. Mech. Tools Manufact.*, vol.29, no.1, pp.107-120, 1989.
 12. Y. T. Im and Y. H. Chen, "Finite element Modeling of Heat Transfer During Solidification", *Proc. of Conf. on Near Net Shape Manufacturing*, edited by P. W. Lee and B. L. Ferguson, pp.285-291, 1988.
 13. J. Yoo and B. Rubinsky, "A Finite Element Method for the Study of Solidification Processes in the Presence of Natural Convection", *Int. J. Num. Methods Eng.*, vol.23, pp.1785-1805, 1986.
 14. J. Yoo and B. Rubinsky, "Numerical Computation Using Finite Elements for the Moving Interface in Heat Transfer Problems with Phase Transformation", *Numerical Heat Transfer*, vol.6, no. 2, pp.203-222, 1983.
 15. M. Salcudean and Z. Abdullah, "On the Numerical Modelling of Heat Transfer During Solidification Processes", *Int. J. Num. Methods Eng.*, vol.25, no.2, pp.445-473, 1988.
 16. A. Jeyarajan and R. D. Pehlke, "Application of Computer-Aided Design to a Steel Wheel Castings", *AFS Transactions*, vol.86, pp.457-464, 1978.
 17. J. G. Henzel, Jr. and J. Keverian, "The Theory and Application of a Digital Computer in Predicting Solidification Patterns", *Journal of Metals*, vol.17, No.5, pp.561-568, May 1965.
 18. H. F. Bishop, E. T. Myskowski and W. S. Pellini, "The Contribution of Riser and Casting End Effects to Soundness of Cast Steel Bars", *AFS Transactions*, vol.59, pp.171-180, 1951.
 19. I. Imafuku and K. Chijiwa, "A Mathematical Model for Shrinkage Cavity Prediction in Steel Castings", *AFS transactions*, vol.91, pp.527-540, 1983.
 20. I. Imafuku and K. Chijiwa, "Application and Consideration of the Shrinkage Cavity Prediction Method", *AFS Transactions*, vol.91, pp.463-474, 1983.
 21. J. C. Simo, P. Wriggers, and R. L. Taylor, "A Perturbed Lagrangian Formulation for The Finite Element Solution of Contact Problems", *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, vol.50, pp.163-180, 1985.
 22. S. K. Chan, I. S. Tuba, "A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies", *Int. J. Mech. Sci.*, vol.13, pp.615-625, 1971
 23. J. Ghaboussi, E. L. Wilson, and J. Isenberg, "Finite Element for Rock Joints and Interfaces", *Journal Of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, vol.99, no. SM10, pp.833-847, 1973.
 24. Zhi-hua Zhong and L. Nisson, "A Contact Searching Algorithm for General Contact Problems", *Computers & Structures*, vol.33, no.1, pp.197-209, 1988.
 25. 유승목, 이두호, 김종기, 소찬영, 홍준표 "개량차분법에 의한 대형주강품의 3차원 응고해석", *주조*, 제11권, 제1호, pp.54-62, 1991.

26. 김지준, 김진수, 류관호, 최정길, 이진형, 홍준표
"자동차용 피스톤 주물의 3차원 응고해석", 주조, 제13권, 제3호, pp.268-275, 1993.
27. E. Niyama, T. Uchida, M. Morikawa, and S. Saito, "Predicting Shrinkage in Large Steel Casting from Temperature Gradient Calculations", AFS Int. Cast Metals Journal, vol.6, no.2, pp.16-22, June 1981.
28. Yin-Heng Chen, "Study of Solidification, Shrinkage and Natural Convection in Casting Processes", Ph. D. Dissertation, The Ohio State Univ., 1990.
29. 김옥삼, 구분권, 민수홍, "FEM을 이용한 주조급형의 탄소성 열응력 및 열변형 해석", 주조, 제13권, 제1호, pp.1-13, 1993.
30. 김옥삼, 구분권, 민수홍, "평평한 금형의 열응력에 관한 연구", 주조, 제11권, 제3호, pp.245-253, 1991.
31. 김기영, "주조기술의 컴퓨터 응용에 대한 최근의 동향", 주조, 제11권, 제4호, pp.276-282, 1991.
32. B. L. Aboustit, "Finite Element Investigations of Thermo-Elastic and Thermo-Plastic Consolidation", Ph. D. Dissertation, The Ohio State Univ., 1983.
33. K. Ho and R. D. Pehlke, "Transient Methods for Determination of Metal-Mold Interfacial Heat Transfer", AFS Transactions, vol.91, pp.689-698, 1983.
34. 류성곤, 이재현, 이용태, "응고수축 결함의 예측을 위한 컴퓨터 응고해석", 재료와 기계, 제8권, 제1호, pp.132-141, 1996.
35. 구분영, "다이캐스팅 응고 및 변형공정의 2차원 유한요소 해석", 공학석사학위논문, 한양대학교, 1995.
36. J. M. Gere & S. P. Timoshenko, Mechanics of Materials, 3rd SI Edn., Chapman & Hall, 1991.
37. J. K. Lee, S. H. Advani, "Stress Responses Associated with Underground Coal Gasification", Final Report prepared for Gulf R&D, 1982.