

<논 문> SAE NO. 97370079

## 전달행렬법을 사용한 크랭크축의 3차원 진동해석

### The Transfer Matrix Method for Three-Dimensional Vibration Analysis of Crank Shaft

이 정 윤\*, 오 재 응\*\*  
J. Y. Lee, J. E. Oh

#### ABSTRACT

This paper presents a vibration analysis method of crank shaft of six cylinder internal combustion engine. For simple analysis journal, pin and arm parts were assumed to have uniform section. Transfer Matrix Method was used, considering branched part and coordinate transformation part. Natural frequencies, modeshapes and transfer functions of crank shaft were investigated based upon the Euler beam theory. It was shown that the calculated natural frequencies, modeshapes agree well with the existing paper results.

주요기술용어 : Euler Beam(Euler 보), Transfer Matrix Method(전달행렬법), Natural Frequency(고유진동수), Vibration Mode(진동모드), Transfer Function(전달함수)

#### 1. 서 론

최근 내연기관의 고속화, 고출력화, 경량화, 대형화로 크랭크축의 진동문제가 대두되어 자동차의 구동부에 직접 영향을 주게되었다. 크랭크축은 엔진의 동력을 전달하는 피스톤, 콘넥팅로드와 함께 엔진의 매우 중요한 부분으로서 연소에 의한 충격력 및 관성력을 주기적으로 받게 되며 고급 승용차의 경우 정속한 운전과 진동소음을 감소 하기위해 6기통인 3차원 크랭크축을 사용하고 있으므로 크랭크축의 진

동해석은 내연기관 성능향상에 매우 중요하게 되었다.

이에 대한 연구로는 Holzer 방법을 사용하여 진동을 계산하는 방법이 많이 연구<sup>1-3)</sup> 되었으며 전달행렬법과 유한요소모델을 이용한 Reduced impedance method<sup>4)</sup> 등이 연구되었다. 또한 크랭크축을 전체 동강성 행렬로 작성하여 2차원 및 3차원 진동해석이 연구<sup>5-6)</sup> 되었으며, 전달행렬을 이용하여 전단변형과 회전관성을 고려한 크랭크축의 2차원 진동해석<sup>7)</sup> 등이 연구되었다. 그러나 크랭크축은 기하학적으로 복잡할 뿐만 아니라 시간에 따라 끊임없이 변화하는 하중과 베어링부의 유막형성등은 엔진 개발시 정확한 동특성 예측에 많은 어려움을 주고 있다. 따라

\* 정희원, 경기대학교 기계공학과

\*\* 정희원, 한양대학교 기계공학부

서 크랭크축을 모델링하여 신뢰성있는 동특성 구기 위해서는 많은 노력과 시간이 필요하므로 초기 설계시 단시간내에 해석결과를 얻을 수 있는 방법이 요구되게 되었다. 본 논문에서는 이를 위해 저널(journal)부, 핀(pin)부를 일정한 단면으로 가정하고 분지(branch)된 부분 및 각도 변환 부분도 고려하여 전달행렬방법으로 해석하였으며 3차원형상인 6기통 엔진의 크랭크축에 적용하여 고유진동수, 진동모드, 전달함수 등을 구하였다. 또한 이론모델로 부터 구한 해의 타당성을 검토하기 위해 기존논문<sup>6)</sup>에 발표된 이론치와 실험치를 비교 하였다.

## 2. 이 론

### 2.1 보요소의 전달행렬법

본 연구에서는 자동차 크랭크 축을 3차원보에 관한 전달행렬로 해석하였으며, Fig.1에 나타난 변수와 좌표의 정의를 기준하면 a, b사이의 전달매트릭스는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\{Z\}_b = [B]_a \{Z\}_a \quad (1)$$

여기서,  $[B]_a$  : a 번째 요소의 전달행렬  
 $\{Z\}_a$  : a번째 요소의 상태를 나타내는 벡터 이며, 다음과 같이 정의 한다.

$$\{Z\}_a = \{ u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z, M_z, M_y, T, V_z, V_y, N, 1 \}_a^T \quad (2)$$

여기서,

- $u, v, w$  : x, y, z 방향의 변위
- $\phi_x, \phi_y, \phi_z$  : x, y, z 주위의 각변위
- $M_y, M_z$  : y, z 축에 관한 굽힘모멘트
- $T$  : 비틀림 모멘트
- $V_y, V_z$  : y, z 방향의 전단력
- $N$  : 축력

보의 단위길이당 분포질량을  $\rho$  로 하면 Euler-Bernoulli 보에 대한 3차원 운동 방정식은

$$EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$GI_\rho \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} = \rho I_\rho \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (6)$$

이때 양단 경계조건을 대입하여 정리하면 보요소의 전달행렬  $[B]_a$ 는 식(7)과 같이 표시된다.

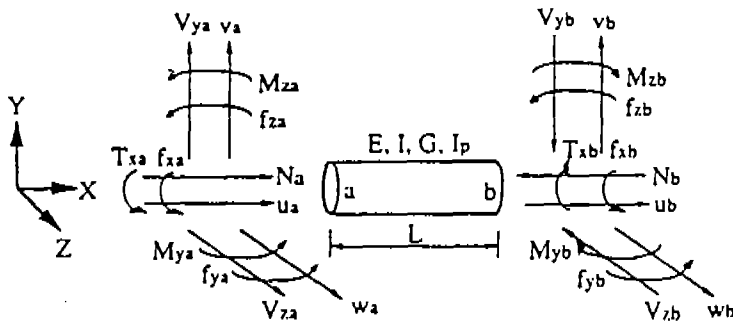


Fig.1 Definition of Variables and Coordinate for Beam Element

$$[B] = \begin{bmatrix}
 P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q & 0 \\
 0 & S_z & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_z}{\lambda_z} & \frac{U_z}{EI_z \lambda_z^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_z}{EI_z \lambda_z^3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & S_y & 0 & -\frac{T_y}{\lambda_y} & 0 & 0 & \frac{U_y}{EI_y \lambda_y^2} & 0 & -\frac{C_y}{EI_y \lambda_y^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & P_s & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\lambda_y C_y & 0 & S_y & 0 & 0 & -\frac{T_x}{EI_y \lambda_y} & 0 & \frac{U_y}{EI_y \lambda_y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\lambda_z C_z & 0 & 0 & 0 & S_z & -\frac{T_z}{EI_z \lambda_z^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{U_z}{EI_z \lambda_z^3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & EI_z \lambda_z^2 U_z & 0 & 0 & 0 & 0 & S_z & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_a}{\lambda_y} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & EI_y \lambda_y^2 U_y & 0 & -EI_y \lambda_y C_y & 0 & 0 & S_y & 0 & \frac{T_y}{\lambda_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & P_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -EI_y \lambda_y^3 T_y & 0 & EI_y \lambda_y^2 U_y & 0 & 0 & -\lambda_y V_y & 0 & S_y & 0 & 0 & f_z & 0 \\
 0 & -EI_z \lambda_z^3 T_z & 0 & 0 & 0 & EI_z \lambda_z^2 U_z & -\lambda_z V_y & 0 & 0 & 0 & S_z & 0 & f_y & 0 \\
 R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서,

$$S_y = (\cosh \lambda_y L + \cos \lambda_y L) / 2,$$

$$S_z = (\cosh \lambda_z L + \cos \lambda_z L) / 2$$

$$T_y = (\sinh \lambda_y L + \sin \lambda_y L) / 2,$$

$$T_z = (\sinh \lambda_z L + \sin \lambda_z L) / 2$$

$$U_y = (\cosh \lambda_y L - \cos \lambda_y L) / 2,$$

$$U_z = (\cosh \lambda_z L - \cos \lambda_z L) / 2$$

$$C_y = (\sinh \lambda_y L - \sin \lambda_y L) / 2,$$

$$C_z = (\sinh \lambda_z L - \sin \lambda_z L) / 2$$

$$P = \cos \sigma L, \quad Q = -EA \sigma \sin \sigma L,$$

$$R = \sin \sigma L / EA \sigma$$

$$P_s = \cos \tau L, \quad Q_s = -GI_p \tau \sin \tau L,$$

$$R_s = \sin \tau L / EA \tau$$

$$\lambda_y = \sqrt[4]{\frac{M_b \omega^2}{EI_y L}}, \quad \lambda_z = \sqrt[4]{\frac{M_b \omega^2}{EI_z L}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{M_b \omega^2}{EAL}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{I_b \omega^2}{GI_p L}},$$

$$M_b = \frac{\gamma AL}{g}$$

로 정의하며,

- $I_p$  : 극단면 2차 모멘트 ( $m^4$ )
- $A$  : 단면적 ( $m^2$ )
- $E$  : 세로 탄성계수( $N/m^2$ )
- $G$  : 가로 탄성계수( $N/m^2$ )
- $\omega$  : 고유 진동수 (rad/sec)
- $L$  : 보의 길이 (m)
- $I_b$  : 질량관성 모멘트 ( $kg-m^2$ )

이다.

2.2 좌표 변환 행렬

$z$  축 주위의  $\alpha$ 회전,  $y$ 축 주위의  $\beta$ 회전 경우 Fig. 2 와 Fig. 3의 변수와 좌표정의를 사용하면 좌표변환 행렬은 다음과 같다.

(1)  $z$ 축 주위의  $\alpha$  회전

$$\{Z\}_a = [T_z] \{Z\}_b \tag{8}$$

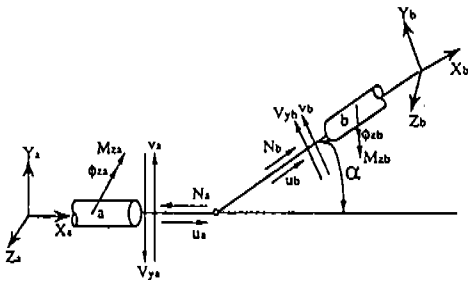


Fig.2  $\alpha$  Rotation About Z Axis for Inplane Vibration

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)  $y$ 축 주위의  $\beta$  회전

$$\{Z\}_a = [T_y]\{Z\}_b \tag{9}$$

여기서

이와같이 상태벡터를  $\{Z\}$ ; 보와 좌표변환요소의 전달행렬을  $[B]$ ,  $[T]$ ;라 정의하고 한 끝단에서 다른 끝단까지 순차적으로 연산 행하면 전체 전달행렬 관계식은 다음과 같다.

$$\{Z\}_1 = [D] \{Z\}_{end} \tag{10}$$

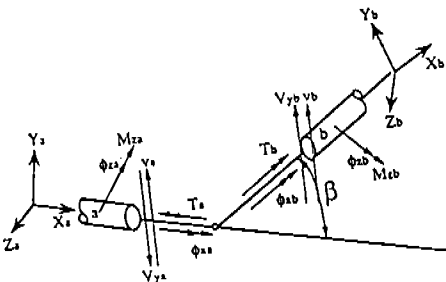


Fig.3  $\beta$  Rotation About Y Axis for Outplane Vibration

한편 양단 경계조건을 식 (10)에 대입하여

정리하면 이 방정식이 유용해를 갖기 위한 조건으로부터 고유진동수에 관한 N차 방정식이 구해지며, 이것으로부터 선형범위를 나타내는 i차 모드에 대한 고유벡터를 나타낼 수 있다.

### 2.3 분지(Branch)부분에 대한 전달행렬

분지부분에 대한 전달행렬은 Fig.4에 나타난 변수와 좌표를 기준하면 다음과 같다.

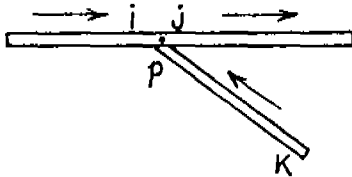


Fig.4 Definition of Branched Beam

$$u_i = u_j = u_p, \quad v_i = v_j = v_p, \quad w_i = w_j = w_p$$

$$\phi_{xi} = \phi_{xj} = \phi_{xp}, \quad \phi_{yi} = \phi_{yj} = \phi_{yp}, \quad \phi_{zi} = \phi_{zj} = \phi_{zp}$$

$$M_{zj} = M_{zi} + M_{zp}, \quad M_{yj} = M_{yi} + M_{yp}, \quad T_j = T_i + T_p$$

$$V_{zi} = V_{zj} + V_{zp}, \quad V_{yj} = V_{yi} + V_{yp}, \quad N_j = N_i + N_p$$

$$\begin{aligned} \{Z\}_k &= [B]_{pk} \{Z\}_p \\ &= \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}_{pk} \{Z\}_p \end{aligned} \quad (11)$$

한편 k점이 자유단 상태이므로

$$\{M_z, M_y, T, V_z, V_y, N\}_k^T = 0 \quad (12)$$

식 (12)를 식 (11)에 대입하면

$$\begin{aligned} \{Z\}_j &= [B] \{Z\}_i \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ G & I \end{bmatrix} \{Z\}_i \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $[G] = -[B_4]_{pk}^{-1} [B_3]$ ,  $I =$  단위행렬임.

이와같이 상태벡터를  $\{Z\}_i$  보와 좌표변환요소의 전달행렬을  $[B]_i, [T]_i$ 라 정의하고 한 끝단에서 다른 끝단까지 순차적으로 연산을 행하면 전체 전달행렬 관계식은 다음과 같다.

$$\{Z\}_j = [D] \{Z\}_{end} \quad (14)$$

## 3. 컴퓨터 시뮬레이션 및 고찰

### 3.1 분지부분을 고려한 진동해석

분지부분을 고려한 전달행렬의 프로그램을 검토하기 위해 Fig.5와 같은 모델을 채택하였다. 동일 물체에 분지부분과 본체부분을 바꾸어 해석의 순서를 변경하고 변경전을 (a), 변경후를 (b)라고 하여 두 경우의 고유진동수를 비교하였다.

Table 1은 Fig.5 모델의 고유진동수를 비교한 것으로 분지부분과 본체부분을 바꾸어 해석의 순서를 변경한 경우에도 서로 고유진동수가 잘 일치함을 알 수 있다. 따라서 분지부분의 모델링 경우에도 전달행렬 해석 방법이 유효함을 알 수 있었다.

### 3.2 2차원 크랭크축의 진동해석

3차원 전달행렬 프로그램을 검토하기 위해 기존에 발표된 논문<sup>7)</sup>의 2차원 크랭크 축을 모델로 하였으며, 채택한 크랭크축의 주요 형상을 Fig.6에 나타내었다.

Table 2는 두 경우의 고유진동수를 비교한 것으로 2차원 전달행렬에서는 별도로 구한 면내(In plane) 및 면외 (Out plane)의 고유진동수를 한 번에 구했으며 고유진동수의 값이 서로 잘 일치함을 알 수 있었다.

### 3.3 3차원 크랭크축의 진동해석

3차원 크랭크축의 해석을 하기 위해 기존에 발표된 논문<sup>6)</sup>의 3차원 크랭크축을 채택하였으며, 채택한 크랭크축의 주요제원과 형상을 Table 3과 Fig.7에 나타내었다.



3차원 전달행렬 프로그램을 검토하기 위해 고유진동수와 비교를 하였으며 그 결과를 Table 4에 나타내었다. 실험치와 비교해서 기존의 방법보다 실험치에 잘 일치함을 알 수 있었다. 본방법과 기존방법의 이론치에 대한 차이는 기존논문은 동강성 행렬로 해석하였기 때문으로 추정된다. 그러나 기존의 실험치 및 해석에서 나타나지 않았던 6차 고유진동수는 실험결과에 대한 전달함수가 없어 확인 할 수 없었다.

1차 진동 모드를 비교하여 Fig.8에 나타내었다. 기존에 발표된 실험 및 해석 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig.9는 모델링에서 2점을 z 방향으로 가진 하고 z 방향으로 측정한 전달함수를 나타냈으

Table 3 Specification of Three-Dimensional Crank Shaft

Element		Dimension(mm)
Parts	Number	length x cross section
Journal	1	60 x $\phi$ 29.4
Left end	2	20.5 x $\phi$ 29.4
Journal right end	21	48.5 x $\phi$ 50.1
Journal	3,8,9,14,15,20	22.25 x $\phi$ 42
Crank pin	5,6,11,12,17,18	20.5 x $\phi$ 42
Crank arm	4,7,10,13,16,19	36.5 x 79 x 16.5 h=19
Count weight	22,23,24,25,26,27	21.0 x 79 x 14
	28,29,30,31,32,33	49.0 x 102 x 16.5

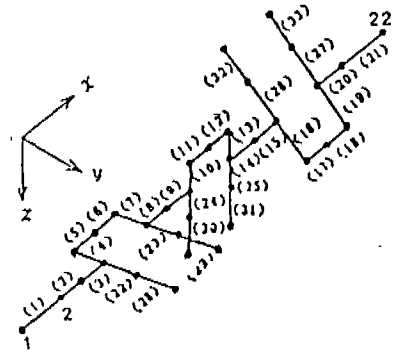
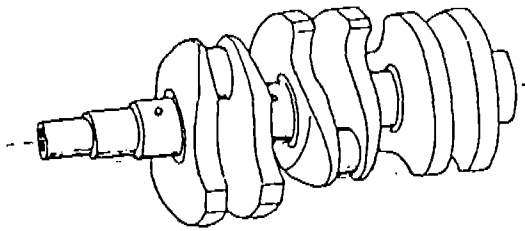


Fig.7 Model of Three-dimensional Crank Shaft

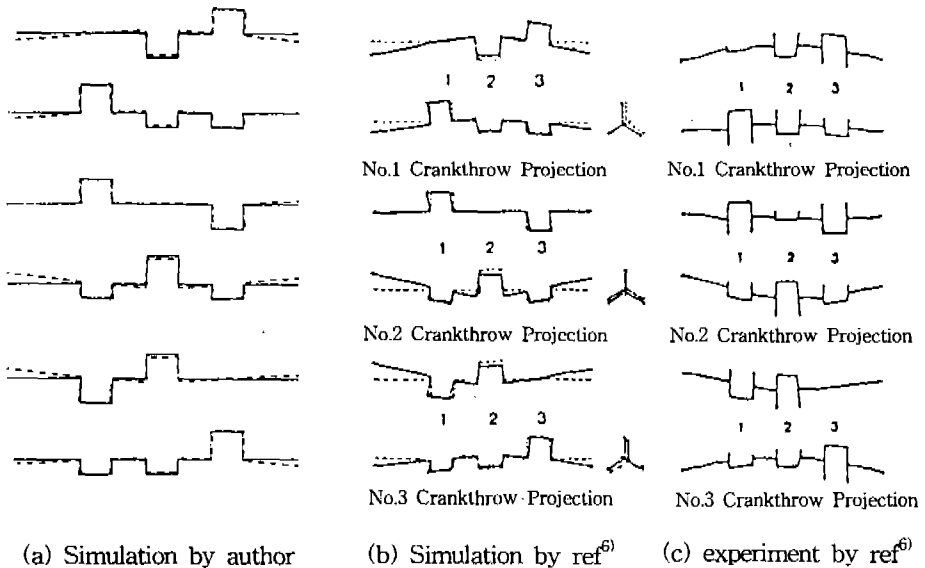


Fig.8 Comparison of Mode Shape of Experiment and Simulation

Table 4 Comparison of Natural Frequencies of Experimental and Computer Simulation (Hz)

Mode	Experi- mental <sup>6)</sup>	Computer simulation		Relative error %	
		Ref. <sup>6)</sup>	Author	Ref. <sup>6)</sup>	Author
1st	518.4	475.9	491.3	-8.2	-5.2
2nd	566.2	560.6	513.4	-1.0	-9.3
3rd	850.4	723.5	756.3	-14.9	-11.0
4th	1056.0	1133.1	1049.2	7.3	-0.6
5th	1154.0	1163.8	1211.0	0.8	4.9
6th	-	-	1377.5	-	-
7th	1504.0	1479.5	1496.5	-1.6	-0.4

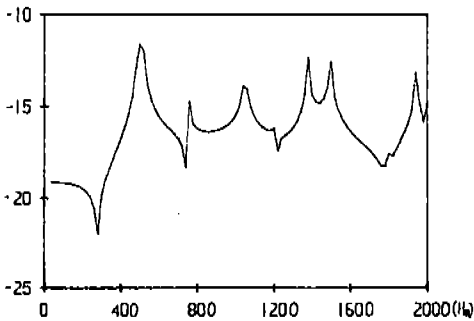


Fig.9 Transfer Function by Computer Simulation

며 1600 Hz 이내에 7개의 고유진동수가 존재하였다.

#### 4. 결 론

전달행렬법을 이용하여 크랭크 축의 동특성을 예측한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 크랭크축의 동특성을 예측하기 위해 각도 변환 및 분지부분을 고려하여 3차원 전달행렬법으로 해석하였다.

2) 2차원 크랭크축에 3차원 전달행렬법을 적용한 결과 기존 방법으로 구한 면내(in plane) 및 면외(out plane) 고유진동수와 잘 일치함을 알 수 있었다.

3) 기존에 발표된 3차원 크랭크 축의 실험 및 해석결과에 본 방법을 적용한 결과 고유진동수와 진동모드가 잘 일치하므로 본 방법의 타당성을 검증할 수 있었다.

#### 참 고 문 헌

1. 장경영, "모드해석법에 의한 크랭크축의 동특성에 관한 연구", 한양대 석사학위 논문, 1985.
2. Young-Chool Han, "A Study on the Viscous Torsional Vibration Damper in a high Speed Diesel Engine", ph. D. Thesis, Hanyang University, 1981.
3. 박윤식, 제양규, 오동엽, "크랭크축의 모드해석에 관한 연구", 자동차공학회, Vol. 7, No. 4, pp. 610~615, 1985
4. Akio Nagamatsu and Masaru Nagaike, "Vibration Analysis of Movable Part of Internal Combustion Engine", Bulletin of the JSME, Vol. 26, No. 215, pp. 827~831, 1983.
5. Hideo Okamura and Akio Shinno, "Dynamic Stiffness Matrix Method for three-dimensional Analysis of Crank Shaft Vibration(1st Report)", Trans. of JSME Vol 55, No. 516, pp. 1965-1973, 1989.
6. Hideo Okamura and Akio Shinno, "Dynamic Stiffness Matrix Method for three-dimensional Analysis of Crank Shaft Vibration (2nd Report)", Trans. of JSME Vol 55, No. 516, pp. 1974~1982, 1989.
7. 김광식, 오재웅, 이정윤, 김만복, "전달행렬법을 이용한 크랭크축의 2차원 진동해석", 대한기계학회논문집 제15권, 제2호, pp. 455~462, 1991.