

〈논 문〉 SAE NO. 97370065

## 유한 요소법을 이용한 복합 적층 구조물의 진동 해석 연구

### A Study on the Vibration Analysis of Composite Laminated Structure Using F.E.M

허 동 현\*, 김 영 권\*, 신 귀 수\*, 이 기 형\*\*, 정 인 성\*\*  
D. H. Heo, Y. K. Kim, G. S. Shin, K. H. Lee, I. S. Chung

#### ABSTRACT

We discuss finite element approximation and use a Mindlin plate element based upon uniformly reduced numerical integration.

The finite element selected for use in this work is a four-node, bilinear displacement element based upon the Mindlin theory of plates. Such elements show good accuracy for laminated composite plates when reduced numerical integration is used to evaluate the element matrices.

This study presents both the experimental and F.E. results for the natural frequencies of CFRP-URETHANE-CFRP Composite plate.

Good agreement between experimental and calculated frequencies is achieved.

주요기술용어 : Mindlin Plate(민들린 판), Finite Element(유한요소), Composite Laminated(복합적층), CFRP(탄소섬유강화플라스틱)

#### 1. 서 론

플라스틱 재료들이 지금까지 오랫동안 자동차에 사용되어 온 반면 최근의 복합 재료에 대한 발전 덕분에 현재는 구조물 부품에 적용시키는 것도 가능하게 되었다<sup>1~2)</sup>. 최근까지 복합재료에 관한 연구는 등방성의 강철에 비해 다른 기계적

성질로 인하여 해석적으로 조사하는 것이 어렵기 때문에 일반적으로 실험적 기법<sup>3~4)</sup>에 근거를 두었다.

최근에는 경계 요소법 및 유한 요소법과 같은 해석적 기법의 발전 덕분에 구조해석<sup>5~6)</sup>을 사용한 복합재료에 관한 연구가 수행되어 지고 있다. 본 연구를 위해서 선택한 유한요소는 4개의 절점이 있고 Mindlin 판 이론에 기초한 쌍일차 변위 요소이다. 이런 요소들은 감소된 한점 수치적분이 요소 행렬의 계산을 위해서 사용되었을 때

\* 전북대학교 대학원

\*\* 전북대학교

복합 적층판에 대해서 좋은 정확성을 나타내는 잇점이 있다. 그러나 합성된 요소는 부족한 계수이고, 신뢰할 만한 거동을 이루기 위해서는 안정화된 상태이어야만 한다. 강성의 최대 계수를 이루기 위한 방법과 또한 정적인 해석과 명확한 동역학적 계산에서 요소 거동을 안정시키기 위한 방법이 존재하고 아주 효과적인 것이다. 그러나, 매우 적은 연구들만이 진동 해석이나 애매한 임계해에 대한 요소의 적절한 공식화에 수행되어 왔다.

한 점 구적에 기초하는 쌍일차 변위와 회전 영역을 갖는 4변형의 Mindlin 판 요소는 Hughes, Cohen, Haroun<sup>7-9)</sup>에 의해서 도입되었고 U1으로 불리워졌다. 이런 요소의 장점은 단순성, 계산의 효율성, 높은 정확성에 있다. 그러나 기본적인 U1 요소는 변위 영역에 기여하는 쌍일차 한점 적분에 의해서 얻어지지는 않기 때문에 랭크-부족수이다. 그러므로, U1 요소의 메쉬(mesh)에 의한 조립된 강성은 적당히 구속되었을 때 특이성을 나타내거나 관련되는 응력 에너지가 없거나 거의 없는 가상 진자의 변위 예측을 할 수 있다.

쌍일차 Mindlin 판 요소의 계속된 연구는 거동의 이런 가상 모드의 안정화에 거의 집중된다. 명확한 동역학 계산에 관련해서는 Kosloff와 Frazier<sup>9)</sup>에 의해서 논의되었고, Belytschko에 의해서 더욱 발전된 아우어글래스(hourglass) 안정화 개념<sup>10-11)</sup>은 이 거동을 조절하는 효과적인 수단이다. 그러나, 명확한 해는 불안정한 진자의 운동에 반응하는 개개의 요소에 대한 기회를 제공하는 반면에 정적이거나 불명확한 동역학 해에서는 그렇지 않는다.

MacNeill<sup>12)</sup>과 Hughes, Tezduyar<sup>13)</sup>는 횡방향 전단 응력 영역의 보간을 다시 규정하는 것으로 쌍일차 요소의 안정화에 대한 구상을 제공하였다. 그러나, 이런 기법은 4점 구적을 요구하고 기본 요소의 단순성이 없어진다. Taylor, Belytschko, Liu<sup>14-16)</sup>는 정적 해석에 대한 아우어글래스 모드 안정화를 추구하였고, 한점 적분된 요소의 장점을 유지하면서 작업에 적당한 몇 개의 수정 방법을 제공하였다.

본 연구에 있어서는 아우어글래스 안정화를 갖

는 쌍일차 Mindlin 판 요소에 대한 적당한 질량 특성치를 공식화하는 문제를 연구하고자 한다. 그림 1은 쌍일차 Mindlin 판 요소를 나타낸다. 본 연구의 목적은 한 요소가 정확한 응력 에너지를 표현하는 것에 관하여 이런 판 운동을 갖는 적당한 역학 에너지에 연결되어야 하고 가상 모드에 연결된 역학 에너지를 제거하기 위한 것이다.

또한 쌍일차 요소 개발의 개요를 제공하고 몇몇 유용한 기호를 도입하며, 전형적인 강성 안정화 방법을 도입하고자 한다. 그리고 질량행렬 공식의 방법을 설명하고 가장 중요한 특성을 확인한다. 최적 질량 공식은 강성 안정화 기법으로 생긴 가상의 동역학 모드를 제거한 반면에 요소의 기본 운동을 갖는데 적당한 역학 에너지와 관계가 있다고 생각한다.

본 연구에서는 복합 적층 구조물의 동적 거동을 컴퓨터 모의 실험, FFT실험 그리고 FEM 해석 및 NASTRAN code 해석을 통하여 파악하였다. 실험과 FEM 결과들은 고유 진동수(Hz)로 나타내었고 참고 문헌상의 데이터와도 비교하였다.

## 2. 이론해석

일반적인 형태의 유한요소 이산화에 의한 시스템 방정식은 다음과 같다.

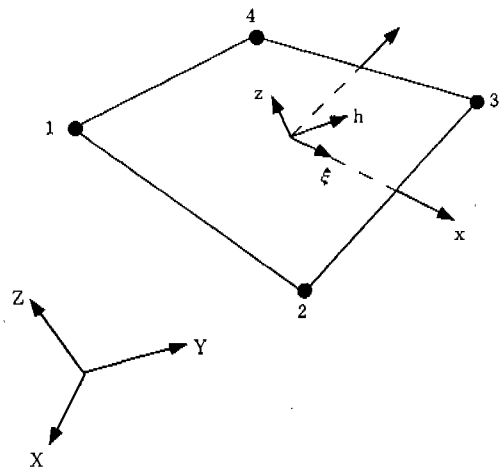


Fig.1 Bilinear Mindlin Plate Element.

$$Ku + M\dot{u} = F(t) \tag{1}$$

여기서  $K$ 는 강성행렬이고  $M$ 은 질량 행렬이며  $u(t)$ 는 일반화된 변위이고  $F(t)$ 는 힘을 나타낸다. 고유진동수 문제에 있어서 적용된 힘은 0으로 놓고 변위는  $u = X \sin \omega t$ 로 변화한다고 가정하면 운동 방정식은 다음과 같이 된다.

$$KX = \lambda MX \tag{2}$$

여기서,  $\lambda = \omega^2$ 이다.

정상상태 고유 진동수를 구하기 위한 운동방정식은 다음과 같다.

$$(K - \omega^2 M)u_0 = F_0 \tag{3}$$

여기서,  $u_0$ 는 진폭이고  $F_0$ 는 조화력이다.

유한 요소에 대하여 다음과 같은 형상함수를 사용한다.(그림1 참조)

$$N = \frac{1}{4}(s + \xi\xi + \eta\eta + h\xi\eta) \tag{4}$$

여기서,

$$s^T = [ 1, 1, 1, 1 ]$$

$$\xi^T = [ -1, 1, 1, -1 ]$$

$$\eta^T = [ -1, -1, 1, 1 ]$$

$$h^T = [ 1, -1, 1, -1 ]$$

참고문헌 9), 10)에서 제안된 아우어글래스 억제력의 발생에 근거를 둔 강성행렬에 대한 안정화 기법을 채택하면 아우어글래스 강성은 다음과 같이 된다.

$$E_u^{(h)} = E_v^{(h)} = \frac{0.10Et}{1+A^{-1}} \tag{5}$$

$$E_w^{(h)} = E^{\phi_s, (h)} = E^{\phi_r, (h)} = \frac{0.10Et^3}{1+A^{-1}} \tag{6}$$

그림 2는 아우어글래스 변위 형태를 나타내고 그림 3은 조합된 아우어글래스-회전 모드를 보여주며, 그림 4는 정규메쉬 내에서의 아우어글래스-회전 모드를 나타낸다.

진동모드 형상,  $\phi$ 가 주어지면 모드와 관련된 일반화된 강성과 질량은 다음과 같이 된다.

$$K = \phi K \phi \tag{7}$$

$$M = \phi K \phi$$

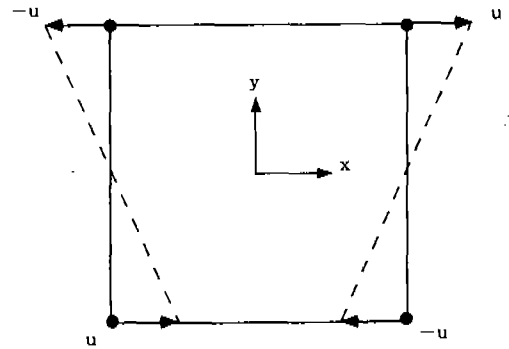


Fig.2 Hourglass Displacement Pattern.

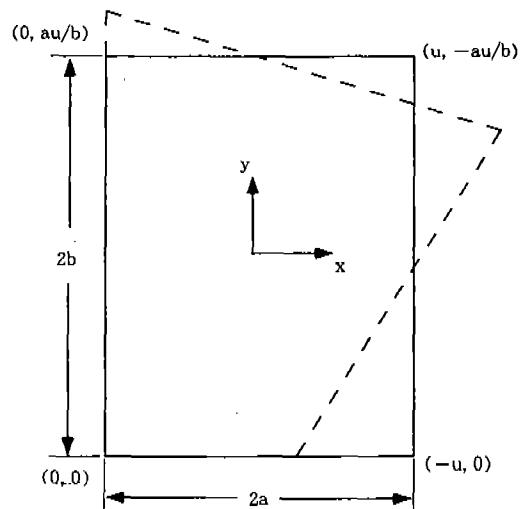


Fig.3 Combined Hourglass-Rotation Mode.

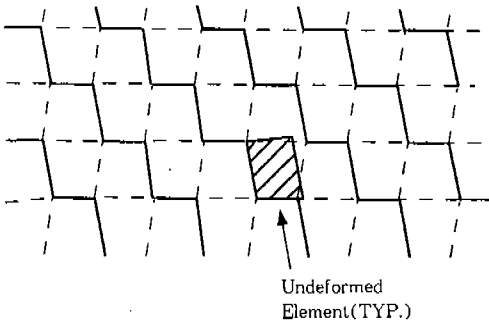


Fig.4 Hourglass-Rotation Mode in a Regular Mesh

아우어 글래스 안정화 기법과 함께 사용되었을 때 신뢰할 만한 질량 행렬을 구하기 위하여 다음과 같은 몇가지 방법을 적용한다. 먼저 완전 적분형 일관성 질량(Consistent Mass)의 방법으로서 쌍일차 요소의 질량 특성에 대하여 다음과 같은 정의를 사용하여 질량 행렬 M를 구한다.

$$(R_1, R_2, R_3) = \int_{-t/2}^{t/2} \rho(1, z, z^2) dz \quad (8)$$

$$H = \int_A NN^T dA$$

$$M = \begin{bmatrix} R_1 H & 0 & 0 & 0 & R_2 H \\ 0 & R_1 H & 0 & -R_2 H & 0 \\ 0 & 0 & R_1 H & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 H & 0 & R_3 H & 0 \\ R_2 H & 0 & 0 & 0 & R_3 H \end{bmatrix} \quad (9)$$

다음으로 투영 방법(Projection Method)에 의한 질량의 방법으로서 다음과 같은 정의를 사용하여

$$b_1^T = \frac{1}{2A} [y_{24}, y_{31}, y_{42}, y_{13}]$$

$$b_2^T = \frac{1}{2A} [x_{42}, x_{13}, x_{24}, x_{31}]$$

$$C_{xx} = \int_A x^2 dA = x^T H x$$

$$C_{yy} = \int_A y^2 dA = y^T H y$$

$$C_{xy} = \int_A xy dA = x^T H y$$

$\bar{H}$ 를 유도한 다음, 질량 행렬 M을 구한다.

$$\bar{H} = \frac{A}{16} ss^T + C_{xx} b_1 b_1^T + C_{yy} b_2 b_2^T + C_{xy} (b_1 b_2^T + b_2 b_1^T) \quad (10)$$

$$M = \begin{bmatrix} R_1 \bar{H} & 0 & 0 & 0 & R_2 \bar{H} \\ 0 & R_1 \bar{H} & 0 & -R_2 \bar{H} & 0 \\ 0 & 0 & R_1 \bar{H} & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 \bar{H} & 0 & R_3 \bar{H} & 0 \\ R_2 \bar{H} & 0 & 0 & 0 & R_3 \bar{H} \end{bmatrix} \quad (11)$$

마지막으로 축약 적분(Reduced Integration)에 의한 질량 행렬로서

$$\bar{H}_{(1)} = \frac{A}{16} ss^T = \frac{A}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

를 식 (9)의 H 대신에 대입하여 구한다. 그리고 행변위 및 회전에 대한 투영법(Projection Method)에 대해서는 아래와 같은 질량 행렬을 사용한다.

$$M_{\mu\mu} = \begin{bmatrix} R_1 H_{(1)} & 0 & 0 & 0 & R_2 \bar{H} \\ 0 & R_1 H_{(1)} & 0 & -R_2 \bar{H} & 0 \\ 0 & 0 & R_1 \bar{H} & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 \bar{H} & 0 & R_3 \bar{H} & 0 \\ R_2 \bar{H} & 0 & 0 & 0 & R_3 \bar{H} \end{bmatrix} \quad (13)$$

3. 수치해석

다음 두 개의 컴퓨터 모의 실험은 실제 다루기 힘든 결과들의 경우에 대해서 이전의 논문들과 비교를 하였다. 본 연구에 사용된 방법은 향상된 정확성을 갖는 믿을 만한 해를 줄 것이다. 그림 5는 고유 진동수 해석을 위한 흐름도이다.

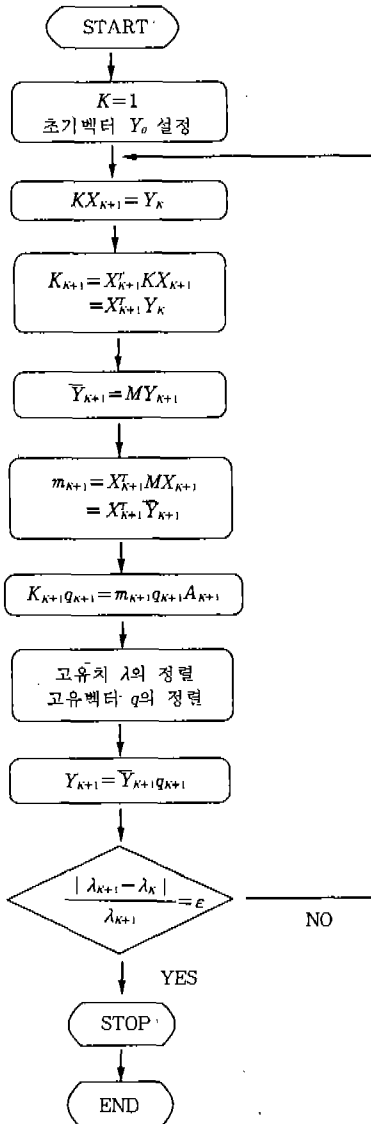


Fig.5 Flow Chart for Natural Frequency Solution

3.1 모서리가 지지된 평판 진동

그림 6에 보여지는 것처럼 모서리가 지지된 평판 진동에 있어서 안정화된 Mindlin 판 요소는 Belytschko와 Tsay가 사용하였다. 참고문헌 [15]은 아우어글래스 강성  $\omega$ 와  $\theta$  합수와 같은 처음 3개 진동수에 대한 결과를 포함하는데 인위적이고 부정확한 진동수는 강성이 한 개 또는 모두가 구속되어졌을 때만 얻어진다.

본 컴퓨터모의 실험에 있어서는 이중대칭을 가정하고 평면밖의 운동만을 고려한다. 전체 평판의 각 변의 길이는 60.96 cm이다. 재료의 성질은  $E=3.02 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu=0.38$ ,  $\rho=1.069 \times 10^{-2} \text{ kg/cm}^3$ 이다. 대칭조건으로  $6 \times 6$  요소의 균일한 메쉬(mesh)가 사용되어지므로 참고문헌[15]의 고유진동수와 직접적으로 비교되어질 수 있다.

표 1은 판의 5개 1차 대칭 진동 모드에 대한 정규화된 진동수 값을 나타내고 있다. 1차에서 3차까지 고유 진동수 값들은 해석적인 결과 및 Belytschko와 Tsay에 의하여 예측된 수치해석 값과 잘 일치한다. 실험에 의해서 얻어지는 해에 있어서 중요하지 않은 차이는 강성 안정화에 사용된 다른 매개 변수에 의한 원인이 될 수 있다. 굽힘 운동에 대하여 추천된 기법은 투영방법을 사용한다. 이 경우에 한 점 구적에 의하여 얻어진 질량 행렬은 일정한 곡률 상태와 관련된 역학 에너지를 무시하는 것 때문에 약간 높은 진동수를 유도한다.

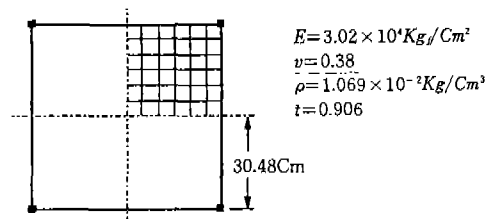


Fig.6 Corner-supported Square Plate

Table 1 Natural Frequencies for Corner-Supported Plate

| Mode | Consistent Mass | Projected Method | Reduced Quadrature | Belytschko & Tsay | Analysis |
|------|-----------------|------------------|--------------------|-------------------|----------|
| 1    | 7.118           | 7.118            | 7.124              | 7.099 - 7.185     | 7.120    |
| 2    | 18.79           | 18.79            | 19.08              | 19.18 - 19.19     | 19.60    |
| 3    | 44.01           | 44.01            | 44.79              | 42.70 - 43.98     | 44.40    |
| 4    | 95.18           | 95.33            | 98.11              | -                 | -        |
| 5    | 124.13          | 124.14           | 132.44             | -                 | -        |

Table 2 Natural Frequencies for Free-Free Plate

| Mode  | Projected Method | Reduced Quadrature | Belytschko & Tsay | Analysis |
|-------|------------------|--------------------|-------------------|----------|
| 1(22) | 13.07            | 13.42              | 13.14             | 13.47    |
| 2(13) | 19.14            | 20.46              | 18.12             | 19.60    |
| 3(31) | 25.81            | 27.46              | 19.05             | 24.27    |
| 4(32) | 34.11            | 36.85              | -                 | 35.02    |
| 5(23) | 34.11            | 36.85              | -                 | 35.02    |
| 6(41) | 62.87            | 70.59              | -                 | 61.53    |

3.2 자유-사각판의 진동

이 컴퓨터 모의실험 또한 참고문헌[15]로부터 취해지고  $\omega$ -아우어글래스 강성에 민감한 자유 진동 모드를 나타낸다. 기하학적 성질은 앞의 실험과 같은 반면, 판 전체로 모델링하였고 6×6요소 메쉬를 사용하였다. Belytschko와 Tsay에 의해서 발표된 해와 비교하는 것은 용이하였다.

표 2는 판의 1차 6개의 굽힘 모드(강체운동에 해당하는 처음 3모드는 수록하지 않았음)에 대하여 얻어진 정규화된 진동수를 나타내는데 투영방법이 더 정확하고, 참고문헌[10]에 의하면 아우어글래스 강성 매개 변수에 매우 민감한 3차 진동수에 대하여 특히 우수하였다. 이 진동수는 판의 (3, 1)모드에 상당한다. 본 값들의 정확성은 3개의 반파(half-wave)가 단지 6개의 쌍일차 요소에 의하여 표현되어진다는 사실로부터 양호하다고 할 수 있다.

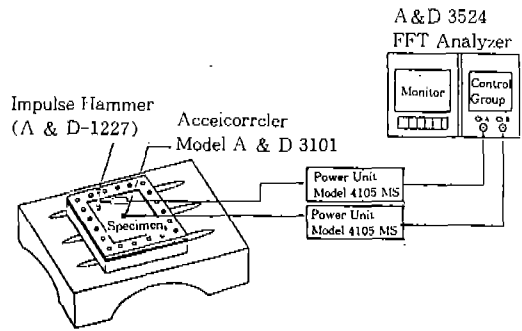


Fig.7 Schematic Diagram of Square Plate Experimental Apparatus

4. 실험

본 연구에서 사용한 복합재료 시편은 표면층에는 두께가 0.125mm이고 재료의 성질이  $\nu=0.31$ ,  $\rho=1,500kg/m^3$ 인 T300 탄소 섬유 프리프레그를 사용하여 적층하였고, 그 사이의 내부층에는 재료의 성질이  $\nu=0.48$ ,  $\rho=100kg$

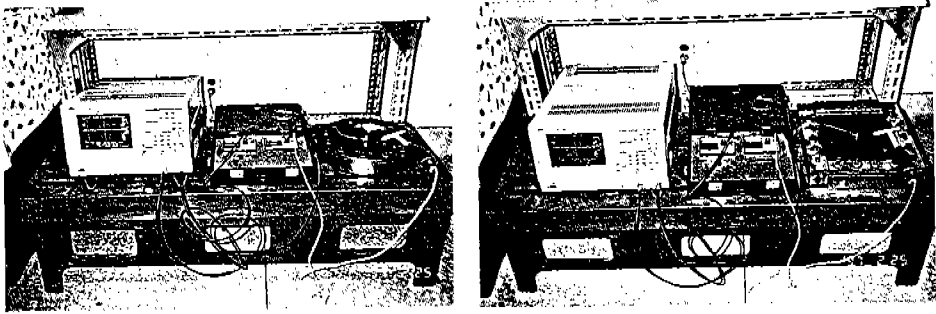


Fig.8 Experimental Apparatus of Square &amp; Circular Plate

$/m^3$ 인 우레탄으로 구성되어 있는 샌드위치형 복합구조를 가지고 있다.

해석결과와 타당성을 검토하기 위하여 사각형의 주변 고정된 적층판에 가진 실험을 실시하였다. 정방형 판은  $300mm \times 300mm$ 이고 원판의 직경은  $300mm$ 이다. 그림 7은 본 실험장치의 계통도이고, 그림 8은 실험장치의 사진이다.

주변 고정용 지그(Jig)를 제작해서 고정 경계 조건을 만족시켰으며 지그(Jig)의 재질은 강(Steel)이고 상부지그 두께는  $10mm$ , 하부지그 두께는  $50mm$ 이다. 이 지그판들은 와이어컷팅머신을 이용하여 동시에 일체가공함으로써 상부지그와 하부지그의 고정 경계면을 일치시켰다.

정방형 판의 경우에는 적층판을 20개의 M10 육각 볼트를 사용해 토오크렌치로 균일하게 체결하였고 원판의 경우에는 12개의 M10 육각 볼트를 사용해 토오크 렌치로 균일하게 체결하여 체결력에 의한 고유진동수의 수렴성을 검토 하였다. 실험 방법은 실험판에 가속도 센서를 부착하고 임펄스 해머로 가졌으며 실험에 사용한 가속도 센서의 질량은  $5.2g$ 이다.

이 결과에 의하여 구해진 전달함수를 사용해 모달 해석을 실시 하였고 고유진동수 및 진동 모드를 구하였다. 그림 9는 완전 지지된 판에 대한 모드 셰이프를 보여주고 있다.

실험에 의해서 구해진 고유 진동수와 계산에 의해서 구한 고유 진동수의 비교를 표

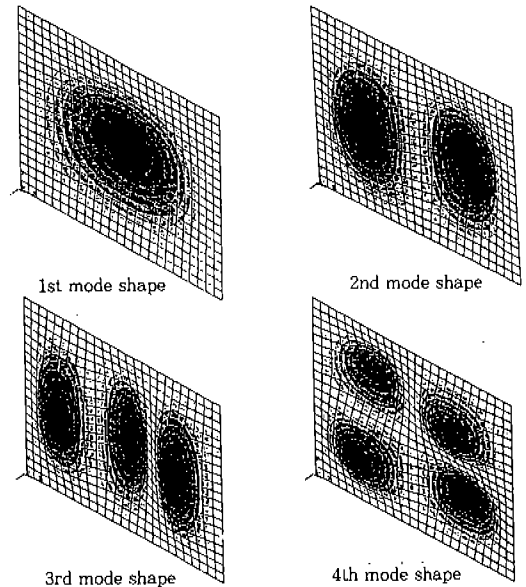


Fig.9 Model Shape of Completely Clamped Square Plate

3에 표시하였다. 실험에서 가속도 센서는 판의 중심에 부착하였다.

본 연구에서 사용한 해석 방법에 의한 계산 결과와 실험 결과의 차이는 최대 6% 이내에 포함되어 비교적 좋은 일치를 보여주고 있다.

이러한 실험과 유한 요소 해석결과에 있어서 차이에 대한 몇가지 원인을 생각할 수 있으며 주변 고정의 경계조건을 만족시키기 위한 이상적인 고정판의 구현과 판에 부착된

Table 3 Natural Frequencies for the Plate with Clamped Edges

| Order          | Natural Frequencies(Hz) |          |         |
|----------------|-------------------------|----------|---------|
|                | Experiment              | Analysis |         |
|                |                         | FEM      | Nastran |
| Square plate   |                         |          |         |
| 1              | 43.3                    | 41.4     | 42.3    |
| 2              | 55.5                    | 57.2     | 56.4    |
| 3              | 64.4                    | 62.5     | 63.5    |
| 4              | 78.7                    | 77.3     | 79.1    |
| 5              | 87.5                    | 85.2     | 93.6    |
| Circular plate |                         |          |         |
| 1              | 35.2                    | 33.5     | 34.4    |
| 2              | 44.5                    | 46.4     | 45.5    |
| 3              | 57.6                    | 55.6     | 56.2    |
| 4              | 69.1                    | 67.4     | 68.4    |
| 5              | 76.8                    | 78.3     | 79.3    |

가속도계가 부가적인 질량으로 작용하여 고유진동수가 낮게 되었다고 생각 된다.

또한 복합재료 시편의 제작과정에서 레진(regin)의 양이나 적층각이 약간씩 달라지는 것이 오차의 원인으로 작용할 수 있다.

## 5. 결 론

복합 적층 판의 동특성 해석을 정확하게 수행하기 위해서 4개의 절점이 있는 Mindlin 판 이론에 기초한 쌍일차 변위 요소를 사용하였다. 비 물리적인 동력학적 모드가 존재하고 대부분의 질량 행렬 공식화와 함께 잠재적인 문제를 일으키며 잘 알려진 아우어글래스 운동과는 다른 모드가 가능하다는 것을 알았다.

투영 방법과 감소된 적분의 절차를 모서리가 지지된 평판 진동 및 자유-자유 사각판의 진동문제에 적용시켰다. 모서리가 지지된 평판 진동에서 판의 5개의 1차 대칭 진동 모드에 대한 정규화된 진동수값은 완전해 및 Belytschko와 Tsay에 의하여 예측된 수치해

석 결과와 타당하게 일치하였다.

굽힘 운동에 대하여 추천된 기법은 투영기법을 사용하였고 한 점 구적에 의하여 얻어진 질량 행렬은 일정한 곡률상태와 관련된 역학 에너지를 무시하는 것에 의하여 약간 높은 진동수를 유도하였다.

자유-자유 시간판의 진동에서 판의 6개 1차 굽힘 모드에 대하여 얻어진 정규화된 진동수에서 투영방법이 더 우수하고 아우어글래스 강성 매개 변수에 매우 민감한 3차 진동수에 대하여 특히 우수하였다. 정확성은 3개의 반파가 단지 6개의 쌍일차 요소에 의하여 표현된다는 사실에 의하여 특히 좋았다. 해석결과의 타당성을 검토하기 위하여 4각형의 주변 고정된 적층판에 대한 진동 실험을 하여 비교한 결과 매우 잘 일치 하였다.

## 후 기

본 연구는 1995년도 교육부 학술 연구 조성비(기계공학:ME95-E-16)에 의하여 연구되었으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

1. Verein Deutscher Ingenieure, Translated by M. S. Welling, "Plastics in Vehicle Construction", VDI-Gesellschaft Kntststofftechnik, Dusseldorf, 1989, pp. 275~315
2. Werner Gausmann, "Tragendes Element des Treser Roadsters", PLAST-VERBEITER 38, 1987.
3. Shoji Shimamura, "Some Problems Arising in the Structural Application of FRP to Automobiles", 25th Annual Technical Conference 1970, Reinforced Plastics/Composite Institute, The Society of the Industry, Inc.
4. Hans-Georg Raschler, "MBB's Experience in the Development and Production



- of Road Vehicles with a Chassis of Self-Supporting Plastic Sandwich Construction", 28th Annual Technical Conference 1973, Reinforced Plastics/Composite Institute, The Society of the Industry, Inc.
5. Raymond A. Gallant, "XP-898-A Passenger Vehicle Unitized Body-chassis Structure of RP/C", 29th Annual Technical Conference 1974, Reinforced Plastics/Composite Institute, The Society of the Industry, Inc.
  6. R. E. Bomet, H. Kulkarni, et al, "Design and Fabrication of Automotive Components in Graphite Fiber Reinforced Composite", SAE 790031, 1979.
  7. R. D. Mindlin, "Influence of Rotatory Inertia and Shear on the Bending of Elastic Plates", J. Appl. Mech. 18, pp.1031~1036, 1951.
  8. T. J. R. Hughes, M. Cohen, and M. Haroun, "Reduced and Selective Intergration Technique in Finite element Anaiysis of Plates", Nucl. Eng. Des. 46, pp. 203~222, 1978.
  9. D. Kosloff and G. Frazier, "Treatment of Hourglass Patterns in Low Order Finite Element Codes", Num. Anal. Meth. Gemoech. 2, pp. 52~72, 1978.
  10. D. Flanagan and T. Belytschko, "A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control", Int. J. Num. Meth. Eng. 17, pp. 679~706, 1981.
  11. T. Belytschko, J. I. Lin, and C. S. Tsay, "Explict Algorithms for the Nonlinear Dynamics of Shells", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 42, pp. 225~251, 1984.
  12. R. H. Macneal, "A Simple Quadrilateral Shell Element", Comp. Structu. 8, pp. 175~183, 1978.
  13. T. J. R Hughes and T. E. Tezduyar, "Finite Elements Based upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to The Four-node Bilinear Isoparametric Element", J. Appl. Mech. 48, pp.587~596, 1981.
  14. R. L. Taylor, "Finite Element for General Shell Analysis", 5th Intl. Seminar on Computational Ascepts of the Finite Element Method, Berlin, August 1979.
  15. T. Belytschko and C. S. Tsay, "A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with One-point Quadrature", Int. J. Num. Meth. Eng. 19, pp.405~419, 1983.
  16. W. K. Liu, E. S. Law, D. Lam, T. Belytschko, "Resultant Stress Degenerated Shell Element", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 55, pp.259~300, 1986.