

부정정보의 변형거동에 관한 해석적 연구

남 기 우

부경대학교

(1997년 2월 4일 접수)

Analysis on Deformation Behavior of Statically Indeterminate Beams

Ki - Woo Nam

Pukyong National University

(Received February 4, 1997)

Abstract

To investigate a safety margin in the design of structural plant, plastic collapse behaviors of statically indeterminate beams were numerically as the preliminary study. Through the calculations, it was revealed that the ultimate strength of statically indeterminate beams is much higher than that of statically determinate beams.

서 론

사용되고 있는 재료나 구조 형식 등의 차이에 의해서 국부적으로 부재의 응력이 탄성한도를 넘어도 구조물자체가 즉시 붕괴하지 않는 경우도 있다. 구조물의 실제 안전성을 평가하기 위해서는 어떤 기준을 사용할 것인가가 문제가 된다. 구조물이 붕괴할 것인가 아닌가를 예측하는 것에는 재료에 대한 안전을 값보다도 통상의 설계하중에 대하여 구조물이 붕괴하기 까지의 하중 크기의 비율, 즉 구조 안전율을 알 필요가 있다. 이러한 목적을 위하여 구조물이 붕괴하는 시점에서의 하중을 구하는 것이 극한해석이고, 구조물이 지진 등에 대하여 안전성을 갖도록 구조안전율을 고려한 설계하중을 사용할 필요성이 있다.

이와같은 관점에서 대형 구조물 등의 플랜트에 있어서는 안전성이 강하게 요구되고 있으며, 경제성 향상을 목적으로 미국기계학회에서는 설계 Code를 규정하고 있다¹⁾. 오늘날 대형 구조물의 설

계에서는 수명중에 대파단이 일어나지 않도록 요구하고 있다. 설비투자가 큰 대형 플랜트에서는 운전정지에 의한 막대한 경제적 손실을 초래하므로 운전정지를 될 수 있는 한 막을 필요가 있다. 이러한 관점에서 주목되는 것이 파단전누설개념이다. 이것은 배관계²⁾에 있어서 균열이 발생, 성장한다고 하여도 균열이 안정적으로 성장하고, 관벽을 관통하여 압력매체의 누설이 탐지가능한 시점보다 이전에 불안정파괴가 일어나지 않으면 적절한 조치에 의하여 치명적 손상을 막을 수 있다는 개념이다. 이와같이 파단전누설개념 도입을 위한 실험은 최근 국내외적으로 많은 적용을 시도하고 있지만, 거의 대부분이 정적하중하에서 실시되어져 왔다³⁾. 그리고, 실제 구조물에서 변동하중이 작용하는 경우가 많음을 고려하여 피로하중하에서도 많은 연구가 실시되어져 왔다⁴⁻⁶⁾. 그러나, 실구조물은 부정정인 부분이 많이 존재하는 구조물이므로 파단전누설 성립성을 검토하기 위해서 부정정보의 종국강도나 하중-변형거동을 상세하게 검토할 필

요성 있다⁷⁻⁹⁾.

따라서 본 연구에서는 장방형단면의 시험편에 굽힘 하중이 작용하는 경우를 고려하여, 종국강도와 처짐량의 관계를 해석하여, 실구조물에 적용하기 위한 기초적인 자료를 제공하고자 하였다.

기본해석

1. 해석에서의 가정

본 해석에 사용한 보는 사각형단면으로서 Fig. 1에 나타내듯이 6가지 지점을 대상으로 한 경우이다. 균열의 위치는 각 경우에 있어서 화살표 위치에 존재한다. 계산에 있어서 사용한 보의 두께 b 는 6mm, 폭 W 는 24mm, 스펠길이 L 은 300mm로 하였다. 보의 좌단을 A점, 우단을 B점, 중앙을 D점으로 한다. 본 해석에 있어서, 재료는 가공경화가 없는 완전탄성체이다. 전소성모우멘트에 미치는 응력의 영향은 무시한다. 붕괴까지 불안정현상은 발생하지 않는다. 굽힘모우멘트에 의한 변형만 생각한다. 피로, 크립, 취성과파괴등은 고려하지 않는다라는 가정을 하였다.

2 굽힘 모멘트를 받는 보

대상으로 하는 재료는 Fig. 2에 나타내듯이 응력-변형곡선을 나타내는 완전탄성체라고 가정한다. 보의 양단에 굽힘모우멘트가 작용하면, 보의

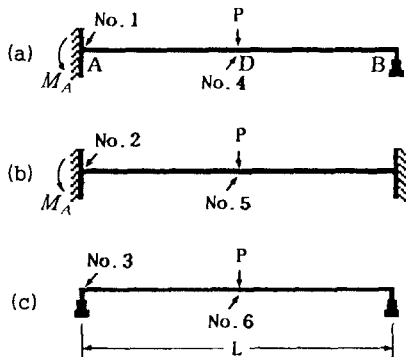


Fig. 1 Type of beam used in calculation and experiment

- (a) One end fixed other supported beam
- (b) Fixed end beam
- (c) Simple beam

아래 측에 인장응력, 위측에 압축응력이 발생한다. 이때 단면의 응력분포는 중립축을 경계로 대칭이 된다. Fig. 3에 굽힘 모멘트를 받는 보의 응력분포를 나타낸다. 이러한 보에서

(a) 탄성한계에서는 보의 표면부분 응력은 항복응력에 도달하고 있다. 이때의 모우멘트를 항복모우멘트 M_y 라 한다.

(b) 굽힘모우멘트를 더욱 크게 하면, 보의 표면부분에서 항복이 발생하고 소성변형이 나타난다. 그리고, 항복영역이 보의 내측으로 향하여 크게 되어 간다.

(c) 소성영역이 중립 축에 도달하면, 전단면에 있어서 항복이 발생하고 완전소성상태로 된다. 이 상태에서는 모우멘트의 증가는 발생하지 않고, 보의 변형은 증가하여 간다. 이 때의 모우멘트를 전소성모우멘트 M_p 라 한다.

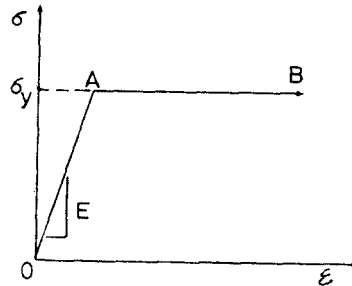


Fig. 2 Model of fully elastic-plastic body

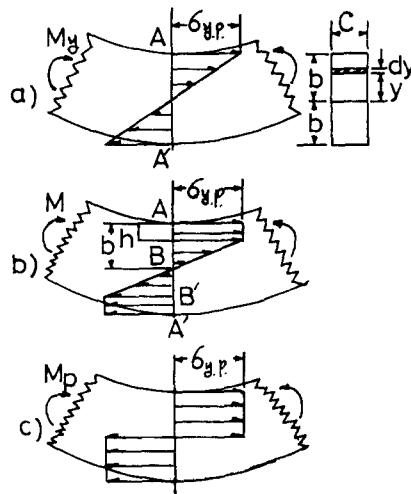


Fig. 3 Stress distribution of beam under bending

항복모우멘트 M_y 와 전소성모우멘트 M_p 는 항복 응력 σ_y , 판두께 W 및 판폭 b 를 사용하여 다음 식으로 나타낸다.

$$M_y = \frac{bW^2\sigma_y}{6} \quad (1)$$

$$M_p = \frac{bW^2\sigma_y}{4} \quad (2)$$

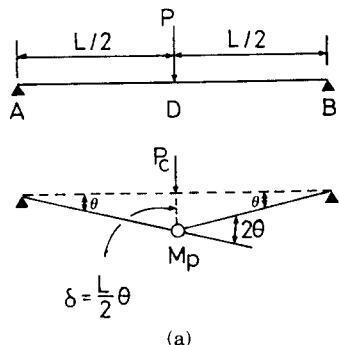
$$f = \frac{M_p}{M_y} = 1.5 \quad (3)$$

여기서 f 는 형상계수로서 보의 단면형상에 의해서 결정되는 값이다. 원형단면에서는 $f=1.7$, 다이아몬드형 단면에서는 $f=2.0$ 이다. 이들 단면에서는 장방형단면에 비하여 항복이후의 부하능력이 크게 됨을 알 수 있다.

3 균열이 없는 보

붕괴하중이라는 것은 보의 단면이 전소성 모우멘트 M_p 에 도달하고, 보가 소성관절을 형성하여, 소성붕괴 할 때의 하중이다. Fig. 4에 정정보와 부정정보의 예로서 양단지지보와 양단고정보에 대하여 붕괴기구를 나타낸다.

우선 정정보의 붕괴하중을 구하면, 길이 L 의 양단지지보의 중앙에 집중하중이 작용하고 있다고 하면, 보의 중앙에서 자유로 회전하므로 양단에서의 모우멘트는 0이다. 보의 중앙에서 모우멘트가 전소성모우멘트에 도달하고, 소성관절이 형성되면 붕괴한다. 붕괴기구에 있어서 (외력의 일)=(내력의 일)의 식이 성립하므로 붕괴하중 P_c 는 다음과 같이 주어진다.



(a)

$$\frac{P_c \theta L}{2} = 2M_p \theta \quad \therefore P_c = \frac{4M_p}{L} \quad (4)$$

부정정보의 붕괴하중을 구하면, 길이 L 의 양단지지 보의 중앙에 집중하중이 작용하고 있다고 하자. 이 때, 보의 고정 단에 모우멘트가 존재하므로 보의 중앙에서 뿐만 아니라 고정 단에도 소성관절이 형성된다. 이때의 붕괴하중 P_c 는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{P_c \theta L}{2} = 2M_p \theta + 2M_p \theta \quad \therefore P_c = \frac{8M_p}{L} \quad (5)$$

따라서 양단고정보의 붕괴하중은 양단지지보의 2배이다. 즉 양단지지보 강도의 2배를 갖는다.

4. 균열이 있는 보

길이 a mm의 균열이 존재하면, 보의 판두께는 $W - a$ mm로 되고, 균열이 있는 보의 전소성모우멘트 M_{pc} 는 다음 식으로 주어진다.

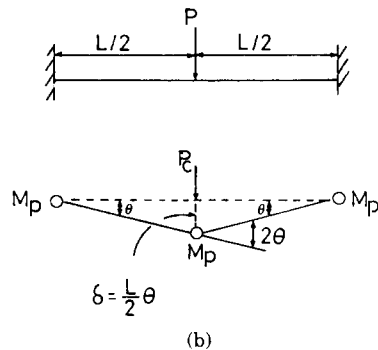
$$M_{pc} = \frac{b(W - a)^2 \sigma_y}{4} = \left(1 - \frac{a}{W}\right)^2 M_p \quad (6)$$

따라서, 균열길이 a/W 가 크게 될수록 전소성모우멘트 M_{pc} 가 작게 되고, 소성붕괴 되기 쉽다. 균열을 갖는 부정정보로서, Fig. 4(b)에 대하여 생각하면,

고정 단에 균열이 있을 때,

$$P_c = \frac{2M_{pc} + 6M_p}{L} \quad (7)$$

보의 중앙에 균열이 있을 때,



(b)

Fig. 4 Collapse Mechanism of Statically determinate Beam(a) and Statically Indeterminate Beam(b)

$$P_c = \frac{4M_{pc} + 4M_p}{L} \quad (8)$$

로 주어진다.

균열길이가 $a/W=0.1$ 의 경우, 균열이 있는 단면에서의 전소성모우멘트 M_{pc} 는 $0.81M_p$ 로 된다. 따라서, 상식의 (7), (8)에서 붕괴하중은 각각 $P_c = \frac{7.62M_p}{L}$, $P_c = \frac{7.24M_p}{L}$ 이 된다. 그러므로, 균열이 없는 부정정보의 붕괴하중과 비교하면, 균열길이가 $a/W=0.1$ 의 경우는 각각 약95%, 90%가 된다. 그리고, 정정보와 비교하면 약190%, 180%가 된다. 따라서 균열을 갖는 부정정보는 균열을 갖지 않는 정정보와 비교하여도 상당한 안전율을 갖는다고 볼 수 있다. 이것으로부터 진의 안전여유도를 평가한다는 관점에서 생각하면, 정정보보다도 부정정보를 고려하는 편이 유효하다고 생각한다.

붕괴하중의 해석

1. 균열이 없는 경우

부정정보No.1의 균열이 없는 경우($a/W=0$)에 대하여 해석한다. 하중 P 에 의한 각점에서의 모우멘트는 다음과 같이 주어진다.

$$M_A = \frac{3PL}{16}, M_p = \frac{5PL}{32} \quad (9)$$

따라서 제1소성 관절이 형성된 곳은 A점이다. 이 때의 하중을 P_1 이라 하면, P_1 은 M_p 에 의해서 다음 식으로 주어진다.

$$M_p = \frac{3P_1L}{16}, \therefore P_1 = \frac{16M_p}{3L} \quad (10)$$

하중 P_1 에 의한 D점에서의 처짐량 δ_1 은 다음 식으로 주어진다.

$$\delta_1 = \frac{7M_pL^2}{144EI} \quad (11)$$

또, P_1 에 의한 D점에서의 모우멘트는 다음 식으로 주어진다.

$$M_{C1} = \frac{5M_p}{6} \quad (12)$$

제2소성 관절 형성조건은 $M_{C1} + M_{C2} = M_p$ 이므로,

$$M_{C2} = \frac{M_p}{6} \quad (13)$$

제1소성 관절 형성후 제2소성 관절 형성(붕괴)까지의 하중증분을 ΔP_2 라 하면,

$$M_{C2} = \frac{\Delta P_2 L}{4} \therefore \Delta P_2 = \frac{2M_p}{3L} \quad (14)$$

하중 ΔP_2 에 의한 D점의 처짐량 $\Delta \delta_2$ 는

$$\Delta \delta_2 = \frac{M_p L^2}{72EI} \quad (15)$$

따라서 붕괴하중 및 붕괴시의 처짐량은 다음과 같이 주어진다.

$$P = P_1 + \Delta P_2 = \frac{6M_p}{L} \quad (16)$$

$$\delta = \delta_1 + \Delta \delta_2 = \frac{M_p L^2}{16EI} \quad (17)$$

2. 균열이 있는 경우

부정정보No. 1의 붕괴과정에 대하여 설명한다. 우선 균열부분(A점)에 제1소성 관절이 형성되고, A점에서 회전이 자유롭게 되므로 제1소성 관절 형성후는 양단지지보가 된다. 하중이 증가하여 D점(보의 중앙)에 소성 관절이 형성되면 보가 붕괴한다.

균열길이가 a 의 관통균열을 갖는 보가 굽힘모우멘트를 받는 경우의 응력확대계수 평가식을 사용하여, 다음 식으로 컴플라이언스의 증분 λ' 를 계산하였다.

$$\Delta \lambda_M = \frac{2 \cdot 6^2}{EBW^2} \int \pi \zeta [F(\zeta)]^2 d\zeta \quad (18)$$

여기서 $\zeta = a/W$, E 는 종탄성계수, $F(\zeta)$ 는 다음에 나타내는 Brown의 제안식¹⁰⁾이다.

$$F(\zeta) = 1.122 - 1.40\zeta + 7.33\zeta^2 - 13.08\zeta^3 + 14.0\zeta^4 \quad (19)$$

따라서, 사각형단면에 균열이 존재하는 경우, 무차원 컴프라이언스 λ' 는 다음 식과 같이 나타낸다.

$$\lambda' = \frac{3EI}{L} \Delta\lambda_M \quad (20)$$

여기서 I는 단면2차모우멘트이다.

보의 하중과 모우멘트의 균형은 A점 및 B점의 반력 R_A 및 R_B 를 사용하여 다음 식으로 나타낸다.

$$P = R_A + R_B, \quad M_A + R_B L - \frac{PL}{2} = 0 \quad (21)$$

따라서 반력 R_A, R_B 및 고정단 모우멘트 M_A 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{11 + 8\lambda'}{16(1 + \lambda')} P, \\ R_B &= \frac{5 + 8\lambda'}{16(1 + \lambda')} P, \\ M_A &= \frac{3PL}{16(1 + \lambda')} \end{aligned} \quad (22)$$

제1소성 관절형성은 좌단고정점A에 형성되므로, 이 때의 하중을 P_1 이라 하자.그러면 제1소성 관절형성 모우멘트 M_{AP} 는 식(22)에서 $P = P_1$ 으로서, 다음 식으로 주어진다.

$$M_{AP} = \frac{3P_1 L}{16(1 + \lambda')} \quad (23)$$

따라서 좌단고정점A에 있어서 제1소성 관절형성시의 하중 P_1 은 다음 식으로 나타낸다.

$$P_1 = \frac{16(1 + \lambda')}{3L} M_{AP} \quad (24)$$

이 때의 중앙점D에서 처짐량 δ_1 은 다음 식으로 주어진다.

$$\delta_1 = \frac{(16\lambda' + 7)M_{AP} L^2}{144EI} \quad (25)$$

또한 소성붕괴하중 P_C 및 처짐량 δ_C 는 다음 식과 같다.

$$P_C = \frac{2M_{AP} + 4M_P}{L} \quad (26)$$

$$\delta_C = \frac{(4M_P - M_{AP})L^2}{48EI} \quad (25)$$

결과 및 고찰

1. 종국강도

균열이 없는 정정보와 부정정보에서 보의 중앙에 집중하중이 작용할 때, 해석에서 얻어진 하중-변위곡선을 Fig. 5에 나타낸다. 그림에서 각각 양단고정보, 일단고정일단지지보, 양단지지보의 경우이다. 양단고정보의 종국강도가 일단고정일단지지보, 양단지지보 보다 각각 약 1.5배, 2배이다.

Fig. 6, 7, 8, 9는 Fig. 1의 부정정보(a), (b) 대한 하중-변위곡선이다. Fig. 6, 7, 8, 9에서 균열길이 증가할수록 종국강도는 저하하고 있고, 저하의 비율은 고정단에 균열이 있는 보(No. 1, No. 2) 보다 중앙에 균열이 있는 보(No. 4, No. 5)의 경우가 크다. Fig. 6, 7, 8, 9에서 각각 균열이 없는 경우보다 균열이 있는 경우(균열길이 $a/W = 0.4$ 의 경우)의 종국강도는 각각 79%(No. 1), 57%(No. 4), 84%(No. 2), 68%(No. 5)이다. Fig. 8의 보(a)의 No. 4에 균열이 있는 경우, 종국강도 저하가 균열

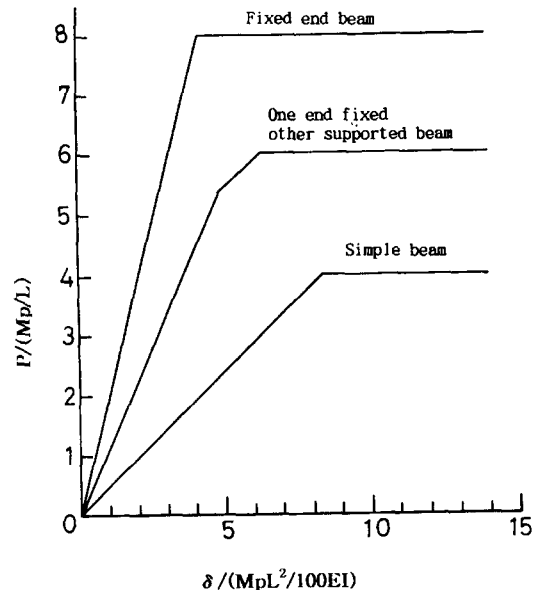


Fig. 5 Load - displacement of Statically Indeterminate Beam without crack

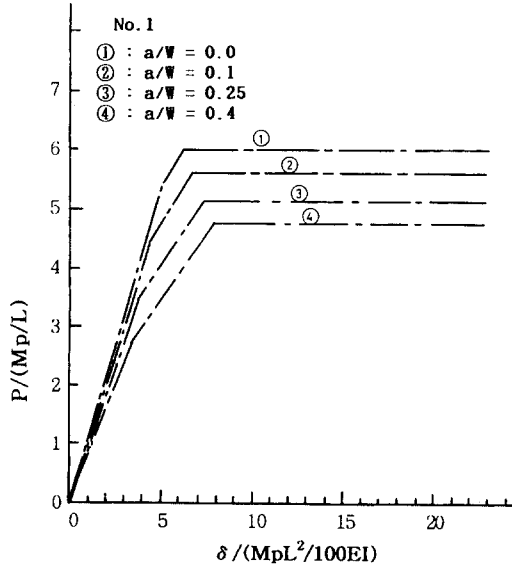


Fig. 6 Load - displacement curve on No. 1 part of beam(a)

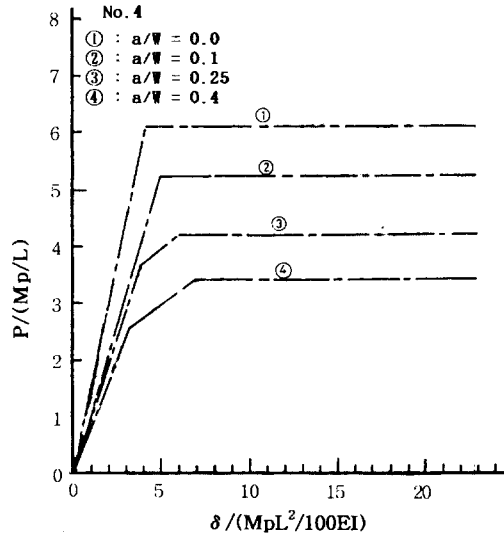


Fig. 8 Load - displacement curve on No. 4 part of beam(a)

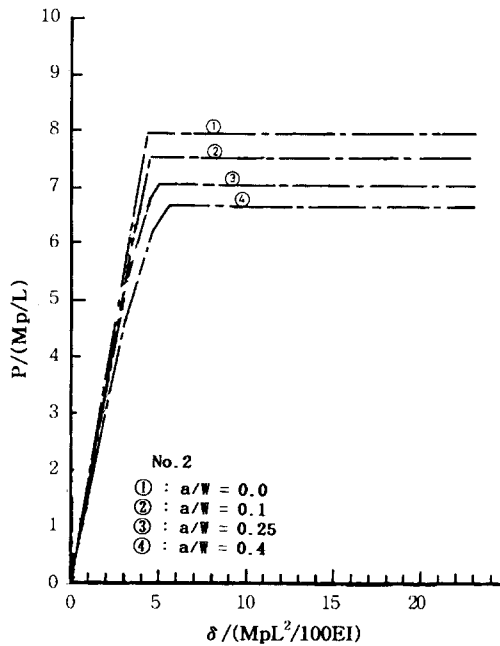


Fig. 7 Load - displacement curve on No. 2 part of beam(b)

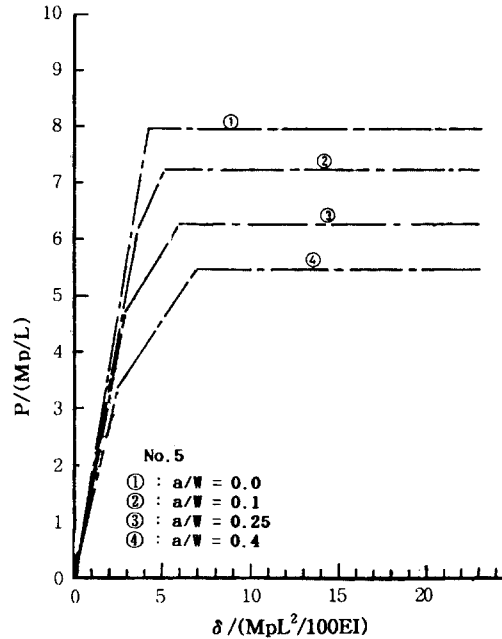


Fig. 9 Load - displacement curve on No. 5 part of beam(b)

길이에 대하여 가장 민감하다. 이것은 하중이 작용하는 점이 균열이 있는 단면위치와 일치하고 있기 때문이라고 생각한다. 또 강도저하가 양단고정보

(b)의 No. 5보다도 큰 것은 B점의 고정단 모우멘트에 의한 저항의 유무차라고 생각한다. 이것은 A점에 균열이 있는 보No. 1과 No. 2에 대하여 같은 관계에 있는 것에서 알 수 있다. 또 $a/W=0.1$ 에 대한

하중-변위곡선을 같은 부정정차수의 보로서 비교하여 보아도, 종국강도는 D점에 균열이 있는 보보다 A점에 균열이 있는 보쪽이 크게 되어 있다. 이것은 같은 부정정차수를 갖는 보에서는 $a/W=0.0$ 일 때의 종국강도는 같고, D점에 균열이 있는 보의 쪽이 강도저하가 큰 것에서도 알 수 있다. Fig. 10인 정정보(Fig.1 (c))의 경우는 균열길이가 증가함에 따른 강도저하의 비율이 부정정보보다도 큰 것을 알 수 있다. 정정보는 $a/W=0.4$ 일 때의 소성붕괴하중 P_C 가 $a/W=0.0$ 일 때의 36%이다. $a/W=0.4$ 의 경우를 비교하면, 부정정보 중에서 가장 붕괴하중이 작은 보No.4에 있어서도 정정보에 비하여 약 2.4배의 종국강도를 나타내므로, 부정정보의 종국강도가 정정보에 비하여 상당히 높은 것을 알 수 있다.

이것으로부터 균열을 갖는 부정정보는 정정보와 같은 파괴평가를 실시하였다고 하여도 보다 안전하다고 할 수 있다.

2 하중-변위곡선

Fig. 6, 7, 8, 9에서 제1소성 관절이 형성되기까지 균열길이가 증가할수록 하중 및 보의 중앙에서의 처짐량은 모든 보에서 균열의 길이가 증가할수록 적은 것을 알 수 있다. 이것은 균열길이가 증가하면, 그 단면에서 전소성모우멘트가 감소하고, 관절이 형성되기 쉽기 때문에 적은 하중에서 제1소

성 관절이 형성되기 때문이다. 보No. 1, No. 4, No. 5에 대하여 제1소성 관절 형성 후, 붕괴까지의 처짐량과 하중의 증가량은 균열길이가 증가할수록 크게 되어 가고 있다. 이것은 균열길이가 길수록 제1소성 관절 형성시의 하중이 작고, 균열이 없는 단면에서 제1소성 관절 형성시의 모우멘트가 작기 때문에 붕괴하기까지의 모우멘트가 크기 때문이라고 생각한다. 보No. 2에 대해서도 제1소성 관절 형성 후 제2 소성 관절 형성까지와 제2 소성 관절 형성 후 붕괴까지가 같음을 말할 수 있다. 보No.4에 있어서 하중변위곡선이 A와 B의 경우에서 크게 다르지만, 이것은 균열이 없는 경우와 있는 경우에서 제1소성 관절이 형성되는 점이 다르기 때문이다. 균열이 없는 경우는 제1소성 관절이 A점에 형성되고, 균열길이 $a/W=0.1$ 의 경우는 D점에 제1소성 관절이 형성된다. 이렇게 되는 현상은 $a/W=0.1$ 의 경우, 제1소성 관절 형성시와 소성붕괴시가 대단히 가깝게 되어 있다고 생각한다. 보 No. 1, No. 2에 대하여 비교하면 하중-변위곡선의 기울기가 보No. 2의 쪽이 2.2배 크게 되어 있고, 붕괴하중은 $a/W=0.4$ 일 때의 약42% 크고, D점의 처짐량은 약22%작다. 이것은 부정정 차수가 큰 쪽이 고정단 모우멘트의 하중에 대한 저항력이 크고, D점의 처짐량이 작게 된다는 것은 나타낸다.

결 론

집중하중을 받는 장방형단면의 시험편이 굽힘을 받을 때, 종국강도와 처짐량의 관계를 해석한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

부정정보에서 종국강도는 균열이 없는 경우 ($a/W=0.0$)에 비하여 균열이 있는 경우($a/W=0.4$)가 일단 고정단단지보의 고정점에 균열은 79%(No. 1), 중앙점에 균열은 57%(No. 4), 양단고정보의 고정점에 균열은 84%(No. 2), 중앙점에 균열은 68%(No. 5)로 나타났다. 그러나 정정보의 경우는 $a/W=0.4$ 일 때의 소성붕괴하중이 $a/W=0.0$ 일 때의 36%이다. 이것으로부터 균열을 갖는 부정정보는 정정보와 같은 파괴평가를 실시하였다고 하여도 보다 안전하다고 할 수 있다.

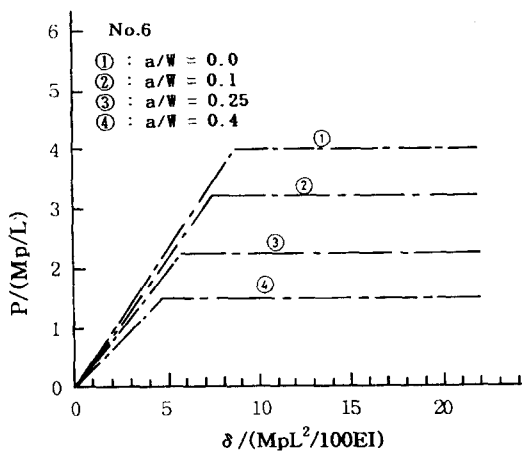


Fig. 10 Load - displacement curve on No.6 part of beam(c)

이 논문은 1995년도 핵심전문연구과제 (951 - 0806 - 093 - 2) 연구비에 의하여 연구되었음.

참고문헌

- 1) ASME Committee(1961) : Materials Research and Standards, 1, 389.
- 2) M. F. Kanninen et al(1978) : Towards an elastic - plastic fracture mechanics predictive capability for reactor piping, Nuclear Engineering Design(48), 117.
- 3) K. Shibata et al(1986) : Ductile fracture behavior of circumferentially cracked type 304 stainless steel piping under bending load, Nuclear Engineering Design(94), 221.
- 4) 南起祐(1994) : 인장 굽힘 피로를 받는 부재의 피로 수명과 균열관통, 한국해양공학회지(8), 41.
- 5) M. D. Gilchrist et al(1992) : Shape Development of Surface Defects in Tension Fatigued Finite Thickness Plates, Int. J. Press. Vess. Piping(49), 121.
- 6) K. W. Nam et al(1995) : Surface Fatigue Crack Life and Penetration Behaviour of Stress Concentration Specimen, Engng. Fract. Mech.(51), 161.
- 7) M. Z. Cohn and G., Maier(1979) : Engineering plasticity by mathematical programming, Pergamon Press.
- 8) R. K. Livesley(1973) : A compact FORTRAN sequence for limit analysis, Int. J. Numerical Methods Engineering(5), 446.
- 9) 石川信隆, 大野友則, "入門 塑性解析と設計法", 森北出版, 1988