

선형 행렬 부등식을 이용한 내연기관의 제어

김영복 · 변정환 · 양주호
부경대학교 공과대학 제어기계공학과
(1996년 10월 10일 접수)

A Study on the Controller Design of Internal Combustion Engine by LMI Approach

Y. B. Kim, J. H. Byun and J. H. Yang
Pukyong National University
(Received October 10, 1996)

Abstract

This paper gives a controller design method by Linear Matrix Inequality(LMI) for internal combustion engine with Continuously Variable Transmission(CVT) which satisfies the given H_{∞} control performance and robust stability in the presence of physical parameter perturbations. To the end, the validity and applicability of this approach are illustrated by simulation in the all engine operating regions.

Key words

1. 서 론

제어계 설계에 있어서 수치적 최적화 기법을 이용한 것은 이미 오래전의 일이며, 최근에는 μ -해석·설계를 계기로 수치적 최적화 기법을 이용한 제어계 설계법이 새롭게 주목을 받게 되었는데 그 이유는 다음과 같이 요약할 수 있다.

(1) 제어계에 요구되는 설계사양이 다양해 지면서 해석적으로 보상기를 구할 수 없는 경우가 많으며, 경우에 따라서는 다수의 설계사양을 동시에 만족시켜야 할 보상기가 필요하게 되었다. 이러한 설계사양의 다양화, 다목적화로 인하여 수치적 최적화 기법이 제어계 설계에 필연적으로 요구되어지게 되었다.

(2) 고성능의 계산기와 MATLAB이나 MATR-IXx와 같은 범용의 수치계산 소프트웨어 등의 보급으로 수치계산이 손쉽게 이루어질 수 있게 되었

다.

(3) 통상 생각할 수 있는 제어계 설계사양의 대부분이 최적화 문제로 다루어질 수 있다는 것이 알려지면서 효과적인 최적화 알고리즘이 소개되어졌다.

이상과 같은 관점으로부터, 최적화를 이용한 제어계 설계법에 대한 연구결과는 지속적으로 발표되고 있으며, 특히 LMI(선형행렬부등식)를 이용한 제어계 설계법^{1)~5)}은 그 대표적인 것이라 할 수 있다.

따라서, 본 논문에서는 LMI의 실용화의 측면에서, 무단 변속기(CVT)를 장착한 자동차의 내연기관 시스템을 제어대상으로 하고, LMI를 이용하여 제어계를 설계하고자 한다.

내연기관 시스템의 제어에는, 연비향상이나 배기가스 규제대책 등에 대처하기 위한 공연비 제어, 아이들(Idle) 회전수 제어, 자동차 자동변속기의

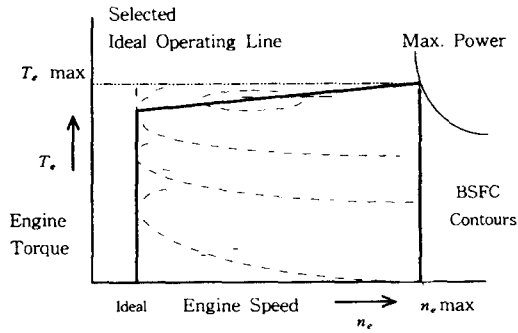


Fig. 1 Engine Operation Map

변속시 발생하는 쇼크를 없애기 위한 엔진토크의 제어등 이분야에 있어서의 제어의 범위가 넓어져, 제어성능이 자동차 성능의 개선에 기여하는 정도는 상당히 커지게 되었다.

잘 알려져 있는 바와 같이 기관의 출력이 일정한 경우, 고회전(n_e)·저토크(T_e) 운전보다, 저회전·고토크 영역에서 기관을 운전하는 것이 기관마찰의 경감에 의해서 연료소비율(b_e)이 향상되게 된다. 그래서 무단 변속기가 장착된 자동차용 가솔린 기관의 경우, 기관의 트로틀 밸브의 개폐각(θ)과 변속기의 변속비(R_m)를 동시에 제어함으로써 차량측의 요구 속도(n_e)와 요구 토크(T_e)를 동시에 만족시키면서, 앞에서 기술한 저회전(n_e)·고토크(T_e)의 기관운전에 의해 연료소비율(b_e)의 최적화 운전이 가능하게 된다. Fig. 1은 기관의 토크(T_e)와 속도(n_e)의 관계를 나타내고 있으며, 그림중 경사선은 연료소비율(b_e)의 최소점을 연결한 것이다. 양단의 속도(n_e) 일정선은 Over-Run Limit 와 낮은 속도에 의한 기관계의 과대진동 방지용의 한계로서, 이것으로부터 연료소비율(b_e) 최적운전선(이상선)이 결정되어 진다.

그러나, 가속기(accelerator)와 트로틀밸브가 직접 결합된 엔진 시스템에서는, 앞에서 언급한 이상선상에서의 제어는 불가능 하며, Driver by Wire 라고 불리어지는 트로틀 밸브의 개폐각(θ)과 변속기의 변속비(R_m)를 동시에 제어하는 통합 제어방식이 요구되어 지고, 변속기도 무단 변속기가 필요하게 된다. 이러한 시스템의 제어에 있어서, 제어성능을 개선하기 위해서는, 시스템의 특성을 정확히 파악하는 것이 필요하다.

내연기관 시스템의 구성요소에는, 흡기계, 연료분사계, 연소실, 기관회전계 등이 있고, 물리 파라미터의 값들은 기관의 운전영역에 따라 크게 달라지기 때문에 시스템은 비선형특성이 강하다. 따라서 그러한 비선형성에 대한 비선형보상이 필요 불가결하다. 일반적으로는, 기관의 운전영역에 따라 구분선형화 하여 gain-scheduling으로 비선형보상을 행하는 방법이 있으나 그것은 상당히 복잡한 방법중의 하나이다. 또한 기관의 노후화, 대기조건의 변화 등 파라미터의 변화가 예측 불가능할 경우도 있고 이에 대한 보상 또한 상당한 어려움이 수반되게 된다.

이러한 대상 시스템의 파라미터 변동에 대해 로버스트한 제어계를 구성하기 위한 한 방법으로서, H_∞ 제어 및 Fuzzy 제어기법을 이용하여, 로버스트성에 대해 시뮬레이션에 의한 비교검토가 행하여져 있다.⁶⁾ 이에 대해, 본 논문에서는 LMI를 이용하여 제어계를 구성하기로 한다. 앞서서도 언급하였으나, 여기서 먼저 LMI를 이용한 제어계 설계수법의 주요한 특징에 대해 간단히 기술한다.

LMI에 의해 상태 피드백 제어치를 설계하는 문제는

- (1) 대역적(大域的) 최적해를 구할 수 있다는 것,
 - (2) 다수의 설계사양을 쉽게 다룰 수 있다는 것
- 등의 이점이 있다. 또한 LMI를 이용하게 되면, 대상 시스템의 파라미터 변동에 대한 로버스트성도 행렬 폴리토프(polytopic)에 의해서 보장할 수 있다.^{1),3)}

그래서 본 논문에서는 내연기관 시스템을 제어 대상으로 하고

(가) 시스템의 물리파라미터 변동에 대한 로버스트성

(나) H_∞ 노름 조건
등을 설계사양으로 두고, 이것들을 동시에 만족시키는 상태 피드백 제어치를 LMI를 이용하여 설계한 다음 그 유효성을 시뮬레이션을 통해 검토하고자 한다. 그리고 본 논문에서 사용하는 단어, 기호는 특별한 부가설명이 없는 한 다음과 같다.

$\|G\|_\infty$: 전달함수 행렬 G 의 H_∞ 노름
 $G \in RH_\infty$ 일때 다음과 같이 정의 된다.
 $\|G\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(j\omega))$

여기서 $\sigma_{\max}(A)$ 는 A 의 최대특이치, RH_{∞} 는 프로퍼(proper)인 실수 유리행렬의 집합이다.

2. 제어대상과 설계사양

2.1 제어대상의 모델링과 비선형특성

현대제어이론은 상태방정식 표현을 기본으로 하여 전개되어지고, 그 표현이 고도의 해석·설계 능력을 가지고 있음은 잘 알려져 있다.

그러나, 상태방정식은 일반적으로 시스템 요소의 물리·화학적 특성이나 그것들의 결합을 기술하는 수식 모델에 여러개의 변수를 도입함으로써 얻어진다. 그렇기 때문에 상태방정식의 계수행렬에 물리적 의미를 부여하는 것이 곤란할 가능성이 크다. 또한, 모델의 파라미터 오차를 생각할 경우, 상태방정식의 계수행렬의 오차와, 시스템 요소의 특성을 기술하는 수식모델의 오차가 어떠한 관계가 있는지 알기가 힘들다. 즉, 시스템의 물리적 구조, 물리 파라미터의 변화에 관해 거론한다는 관점에서는 상태방정식이 결코 만족할 만한 수식모델이라고 할 수 없다.

한편, Descriptor 방정식은, 시스템 요소의 특성을 나타내는 식과 그 결합을 나타내는 식을 나열함으로써 얻어지는 수식 표현이며, 미분방정식 뿐만 아니라 대수방정식도 포함해서 표현할 수 있기 때문에 시스템내의 물리변수나 정수, 물리적 구조를 보존하는데 뛰어난 표현능력을 가진 수식 모델이다. 따라서 본 논문에서는, 상태방정식 표현으로 수반되는 보수성을 개선한다는 관점에서, 제어대상을 Descriptor 방정식으로 표현하고, 이렇게 나타내어진 제어대상에 대해 제어계를 설계한다.

본 연구에서 제어대상으로 하고 있는 차량의 제원과 사용하는 기호는 Table 1 과 같다.⁶⁾ 그리고, 대상으로 한 자동차의 구동계 즉, 기관 무단변속기 부하계의 블록선도는 Fig. 2와 같이 나타낼 수 있고⁶⁾, 입력은 트로틀 밸브 각도 θ [rad]이고, 제어량은, 궁극적인 기관의 무단변속기 통합제어의 관점에서 엔진토크 T_e [Nm]로 했다.

내연기관은 고유의 특성상 시간지연 특성을 가지며, 연료 분사율은 트로틀 밸브 각도와 엔진 회

Table 1. Summary of Variables for Physical System

Inertia	(J)		
engine	(J_e)	0.032	kgm ²
CVT	(J_v)	0.066	kgm ²
diff. gear + tire	(J_t)	3.943	kgm ²
friction	(f)	1.000	kgm ² /s
CVT gear ratio	(R_m)	0.4345 - 2.34	
Final gear ratio	(R_w)	5.69	
Vehicle mass	(M)	1305	kg
Front project area	(A)	1.8	m ²
Coeffi. of drag	(C_d)	0.36	
Tire radius	(r_t)	0.273	m
Gradient of road	(δ)	0.0	rad
Coeffi. of roll. resist.	(μ)	0.018	
Air specific gravity	(ρ)	1.166	kg/m ³
gravity	(g)	9.8	m/s ²

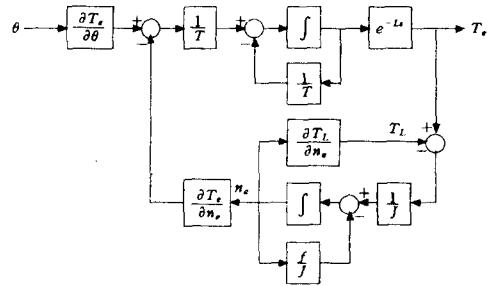


Fig. 2 Block Diagram of CVT Control System

전수의 함수로 기술할 수 있다. 그리고, 연소계통을 1차요소로 간주하면 연소계의 전달함수는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_e = \frac{1}{1 + Ts} e^{-Ls} (g(\theta, n_e)) \quad (1)$$

여기서, T 는 시정수[s], L 은 시간지연[s], θ 는 트로틀 밸브 각도 [rad]이다. 이때 T_e 발생후의 기관회전계 운동방정식을 (2)~(5)식으로 나타낸다. 그리고 관성모멘트 J 는 무단변속기의 변속비(R_m)를 고려하여 기관축 주위로 등가변환하고, 차량질량도 회전부하로 환산한다.

$$T_e - T_L = J \dot{n}_e - f n_e \quad (2)$$

$$T_L = \frac{r_t F_L}{R_m R_w} \quad (3)$$

$$F_L = \rho C_d A V^2 / 2 + Mg(\mu + \sin \delta) \quad (4)$$

$$J = J_e + \frac{J_v}{R_m^2} + \frac{J_t}{(R_m R_w)^2} + 2\pi M \left(\frac{r_t}{R_m R_w} \right)^2 \quad (5)$$

이때 사용한 각 기호 가운데 T_L 은 부하토크 [Nm], n_e 는 엔진속도 [1/s], F_L 은 주행저항 [N], V 는 차량속도 [m/s]를 각각 나타낸다.

본 연구에서 고려하고 있는 비선형특성은 $T, L, \partial T_e/\partial\theta, J, T_e/\partial n_e, \partial T_L/\partial n_e$ 등이며, 이것들이 기관의 제어에 있어서 비선형특성을 나타내는 대표적인 파라미터들이다.

이것으로부터 제어대상의 Descriptor 형식에 의한 시스템표현을 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} E_p \dot{x}(t) &= A_p x(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= C_p x(t) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $x(t)$ 는 상태벡터, $u(t)$ 는 입력벡터, $y(t)$ 는 출력벡터이며,

$$E_p = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{\partial T_e}{\partial n_e} \\ 0 & -1 & -\left(\frac{\partial T_L}{\partial n_e} + f\right) \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial T_e}{\partial \theta} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad C_p = [1 \quad -1 \quad 0] \quad (7)$$

이다. 그리고 시간지연은 다음식과 같이 Pade의 1차 근사법으로 근사화 하였다.

$$e^{-Ls} = \left(1 - \frac{Ls}{2}\right) \times \left(1 + \frac{Ls}{2}\right)^{-1} \quad (8)$$

2.2 설계사양

설계사양으로서는 다음의 것들을 고려한다.

(1) 물리 파라미터의 변동

변동을 계수행렬 E_p, A_p, B_p 의 파라미터 변동으로 생각하고, 계수행렬을 행렬 폴리티오프^{1),3)} 형태로 생각하여 파라미터 변동에 대한 로버스트성을 보증한다.

Fig. 3은 본 연구에서 제어대상으로 하는 자동차 기관의 각 운전영역에서의 파라미터 변동을 나타내고 있다. 여기서 $T, L, \partial T_e/\partial\theta, J, \partial T_e/\partial n_e, \partial T_L/\partial n_e$,

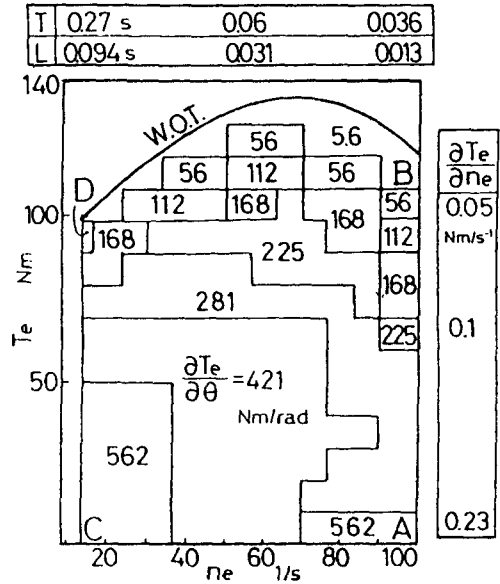


Fig. 3 Parameters in the Operating Range

Table 2 Parameters at Load Side

R_m	0.435(min)		2.34(max)	
	㉠, ㉡	㉢, ㉣	㉠, ㉡	㉢, ㉣
Condition				
$\partial T_L/\partial n_e$	0.4	0.002	0.05	0.003
J	10.2		0.36	

는 변동하는 파라미터이고, T, L 는 기관의 회전속도 n_e 에, $\partial T_e/\partial\theta, \partial T_L/\partial n_e$ 는 기관 운전점(T_e, n_e)에 의해서 변화한다.

Fig. 3에 나타낸 것과 같이, 물리 파라미터의 변동범위는 10배 이상이고, $\partial T_L/\partial n_e$ 는 R_m, n_e 에 의해서, J 는 R_m 에 의해서 30~200배 까지 변화한다.⁶⁾ Fig. 3에서 ㉠~㉣는 파라미터 변동에 대한 시뮬레이션 검토를 행하기 위하여 결정한 기관의 운전점이다. 그리고, Table 2는 무단변속기의 변속비 $R_m = 0.435(\text{min}), 2.34(\text{max})$ 에서의 $\partial T_L/\partial n_e$ 과 J 의 값을 나타내고 있다.

이것으로부터, 기관을 전영역, 전 변속비 영역에서 운전하는 경우에는, 기관 시스템내의 파라미터들이 크게 변화하기 때문에 제어계의 로버스트성이 요구되어짐을 알 수 있다.

(2) H_∞ 제어사양

본 논문에서는 정상상태에서 목표치와의 편차를 없애기 위해 Fig. 4와 같은 적분형 서보계⁷⁾를 구성하기로 한다. 이때, 이 시스템의 외란 w 에서 출력 y 까지의 전달함수 G_{yw} 의 H_∞ 노름 $\|G_{yw}\|_\infty$ 를 최소화 하고, 출력측의 저감도화를 달성하도록 한다. 따라서, 이 시스템에 외란을 추가하면 (5)식은

$$\begin{aligned} \tilde{E}_p \tilde{x}(t) &= (\tilde{A}_p + \tilde{B}_p K) \tilde{x}(t) + \tilde{B}_w w(t) \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}_p \tilde{x}(t) + \tilde{D}_w w(t) \end{aligned} \quad (9)$$

와 같이 표현된다. 여기서

$$\begin{aligned} \tilde{E}_p &= \begin{bmatrix} E_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{A}_p = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 1 \end{bmatrix}, \tilde{B}_p = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_p &= [-C_p \ 0], \tilde{B}_w = [0 \ 0 \ 0 \ -1]^T, \tilde{D}_w = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

이고, $\tilde{x}(t) = [x(t) \ v(t)]^T$, $\tilde{u}(t)$ 는 확대계의 상태와 제어입력이다. 또한, 상태 피드백 제어칙은

$$u(t) = K\tilde{x}(t) = [F \ G] \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

로 된다. 단, $v(t)$ 는 적분기의 출력이다.

3. LMI를 이용한 제어계의 설계

3.1 H_∞ 노름 조건

(9)의 시스템 표현에서, 불확실성을 포함하고 있는 계수행렬 $\tilde{E}_p, \tilde{A}_p, \tilde{B}_p$ 를 α 를 파라미터로 하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_p(\alpha) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{E}_i, \\ \tilde{A}_p(\alpha) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{A}_i, \\ \tilde{B}_p(\alpha) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{B}_i, \\ \sum_{i=1}^k \alpha_i &= 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, $\bar{E}_i, \bar{A}_i, \bar{B}_i, i = 1, 2, \dots, k$ 는 단점(vertex)행렬이고, (12)식으로 나타내어지는 행렬의 집합을 행렬 폴리토프라 부른다.^{8),9)} (12)식의 표현을 기본으로 해서 다음의 Theorem을 둔다.

Theorem (9)식으로 주어진 시스템에 대해서, 페루프계가 안정하고, w 에서 y 까지의 전달함수의 H_∞ 노름이 $\|G_{yw}\|_\infty < \gamma$ 를 만족시키는 상태 피드백 제어칙 K 가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_p X \tilde{E}_p^T + \tilde{E}_p X \tilde{A}_p^T + \tilde{B}_p Y \tilde{E}_p^T + \tilde{E}_p Y^T \tilde{B}_p^T & & \\ & \tilde{B}_w^T & \\ & \tilde{C}_p X \tilde{E}_p^T & \\ & & \tilde{B}_w & \tilde{E}_p X \tilde{C}_p^T \\ & & -\gamma I & \tilde{D}_w^T \\ & & \tilde{D}_w & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

가 성립되도록 하는 정정대칭행렬(Positive Definite Symmetric Matrix) X 와 변수 Y 가 존재하는 것이다. 이때, 상태 피드백 게인 K 는

$$K = YX^{-1} \quad (14)$$

로 주어진다.

Proof Descriptor 형식의 시스템이 이하와 같

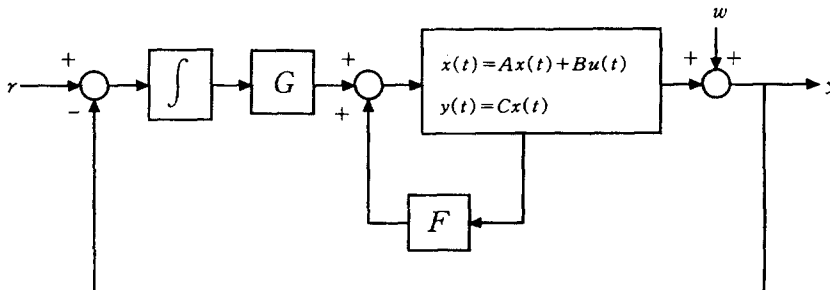


Fig. 4 Integral Type Control System

이 주어져 있다고 하자.

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_d w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_d w(t) \end{aligned} \quad (15)$$

단, E 는 정칙이다. 이때 (15)식은

$$\dot{x}(t) = E^{-1}x(t) + E^{-1}Bu(t) + E^{-1}B_d w(t) \quad (16)$$

로 되므로, (15)식의 w 에서 z 까지의 전달함수 G_{zw} 의 H_∞ 놈 $\|G_{zw}\|_\infty$ 을 γ 이하로 할 때의 LMI는,

$$\begin{bmatrix} E^{-1}AX + XA^T E^{-T} + E^{-1}BY + Y^T B^T E^{-T} & & & \\ & B_d^T E^{-T} & & \\ & & C_z X & \\ & & & E^{-1}B_d \quad XC_z^T \\ & & & -\gamma I \quad D_d^T \\ & & & D_d \quad -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

로 된다. 여기서, (17)식의 좌변의 좌측에

$$E_b = \text{blockdiag}[E \quad I \quad I]$$

를 곱하고, 우측에 E_b^T 를 곱하더라도 부등호는 변하지 않는다. (I : 단위행렬)

따라서, Descriptor 형식으로 주어진 시스템에 대한 H_∞ 놈 조건의 LMI는 (13)식의 형태로 된다.

3.2 설계순서

설계사양으로 주어진 H_∞ 놈 조건과 파라미터 변동에 대한 조건을 동시에 만족하는 제어기의 설계순서는 다음과 같이 간단히 요약할 수 있다.

먼저, 제어사양을 만족하는 상태 피드백 제어칙의 설계란, 공칭모델(혹은 공칭모델에 상당한 하나의 모델)에 대해, 3.1 절에 주어진 LMI (13)식을 만족하는 해 X, Y 의 존재여부를 의미하는 것이다. 만일 존재 한다면 해 X, Y 를 이용하여 설정한 제어사양을 만족하는 상태 피드백 제어칙 K 를 구할 수 있다.

다음으로, 구하여진 상태 피드백 제어칙이, 파라미터 변동에 대해서도 제어사양을 만족시키고 있는가에 대해서 고찰한다. 상태방정식으로 표현된 시스템의 경우에는, 변동하는 파라미터를 갖는 각 계수행렬의 단점행렬로 주어지는 제어사양의

LMI 를 동시에 만족시키는 공통해를 구하는 것으로 설계는 종료된다.

4. 시뮬레이션

본 절에서는, 제어대상의 물리 파라미터의 변동에 대해 로버스트한 제어계를 구성하고, 시뮬레이션을 통해 그 유효성을 검증한다.

기관을 전영역, 전 변속비 영역에서 운전하는 경우, Fig. 3과 Table 2에 나타난 것과 같이, 시스템내의 파라미터가 크게 변화하기 때문에, 그에 대한 제어계의 로버스트성이 요구되어 진다. 따라서, 먼저, 변속비를 $R_m = 0.435(\text{min})$ 로 하고, 이 영역에서 설계한 제어계가, $R_m = 2.34(\text{max})$ 영역에서도 로버스트성이 보장되도록, LMI 조건을 만족시키는 해를 구하여 제어칙을 유도한다. 그러기 위해서, Fig. 3과 Table 2로부터, 변동하는 파라미터들이

$$\begin{aligned} 0.435 &\leq R_m \leq 2.34, \\ 0.036 &\leq T \leq 0.27, \\ 0.013 &\leq L \leq 0.094 \\ 0.002 &\leq \partial T_l / \partial n_e \leq 0.4, \\ 5.6 &\leq \partial T_l / \partial \theta \leq 562, \\ 0.05 &\leq \partial T_e / \partial n_e \leq 0.23 \end{aligned} \quad (18)$$

의 범위에서 변동한다고 하자. 그리고, (9), (10)식의 시스템 표현에서, 계수행렬 \tilde{A}_p, \tilde{B}_p 를

$$\begin{aligned} \tilde{E}_p &= \tilde{E}_m + \Delta \tilde{E}_m, \\ \tilde{A}_p &= \tilde{A}_m + \Delta \tilde{A}_m, \\ \tilde{B}_p &= \tilde{B}_m + \Delta \tilde{B}_m \end{aligned} \quad (19)$$

와 같이 공칭부분(nominal part) $\tilde{E}_m, \tilde{A}_m, \tilde{B}_m$ 와, 불확실한 부분(uncertain part) $\Delta \tilde{E}_m, \Delta \tilde{A}_m, \Delta \tilde{B}_m$ 으로 분리해서 나타내기로 한다.

위에서 언급한 바와 같이, 전 R_m (변속비)영역 ($0.435 \leq R_m \leq 2.34$)에서의 로버스트성을 보장한다는 의미에서, 편의상 변속비가 최대일때와 최소일때의 두가지의 극단적인 상태를 가정하여 먼저, (가) $R_m = 0.435(\text{min})$ 로 한다.

이때, 변동하는 파라미터의 기준치, 즉 공칭부분을 Fig. 3과 Table 2에 나타난 각각의 변동범위의 중간치를 취하여

$$\tilde{E}_m = \begin{bmatrix} 0.0535 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.153 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_m = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.14 & 0 \\ 0 & -1 & -(0.201+f) & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 283.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

로 나타내고, 이것을 기준 시스템의 계수행렬이라고 한다. 그리고, 계수행렬 $\tilde{E}_p, \tilde{A}_p, \tilde{B}_p$ 의 불확실성을 나타내는 $\Delta\tilde{E}_m, \Delta\tilde{A}_m, \Delta\tilde{B}_m$ 는 다음과 같이 행렬 폴리티프로 표현된다.

$$\Delta\tilde{E}_m = \sum_{i=1}^{32} \alpha_i \tilde{E}_i \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= \begin{bmatrix} 0.0405 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.117 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{E}_2 = \dots = \tilde{E}_5, & \tilde{E}_9 &= \begin{bmatrix} 0.0405 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.117 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{E}_{10} = \dots = \tilde{E}_{16}, \\ \tilde{E}_{17} &= \begin{bmatrix} -0.0405 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.117 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{E}_{18} = \dots = \tilde{E}_{24}, & \tilde{E}_{25} &= \begin{bmatrix} -0.0405 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.117 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{E}_{26} = \dots = \tilde{E}_{32}. \end{aligned}$$

$$\Delta\tilde{A}_m = \sum_{i=1}^{32} \alpha_i \tilde{A}_i \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.09 & 0 \\ 0 & 0 & -0.201 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A}_2 = \tilde{A}_9 = \tilde{A}_{10} = \tilde{A}_{17} = \tilde{A}_{18} = \tilde{A}_{25} = \tilde{A}_{26}, \\ \tilde{A}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.201 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A}_4 = \tilde{A}_{11} = \tilde{A}_{12} = \tilde{A}_{19} = \tilde{A}_{20} = \tilde{A}_{27} = \tilde{A}_{28}, \\ \tilde{A}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0.201 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A}_6 = \tilde{A}_{13} = \tilde{A}_{14} = \tilde{A}_{21} = \tilde{A}_{22} = \tilde{A}_{29} = \tilde{A}_{30}, \\ \tilde{A}_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & -0.201 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A}_8 = \tilde{A}_{15} = \tilde{A}_{16} = \tilde{A}_{23} = \tilde{A}_{24} = \tilde{A}_{31} = \tilde{A}_{32}. \end{aligned}$$

$$\Delta\tilde{B}_m = \sum_{i=1}^{32} \alpha_i \tilde{B}_i \quad (23)$$

$$\tilde{B}_{2n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 278.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{2n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -278.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (n = 1, \dots, 16).$$

$$\sum_{i=1}^k a_i = 1, \quad a_i \geq 0 (i = 1, \dots, 32) \quad (24)$$

그리고,

(나) $R_m = 2.34(\text{max})$ 로 하고, Fig. 3과 Table 2로부터, 상술한 (가)와 동일한 순서로 단점행렬을 구한다.

위의 (가), (나)에 나타낸 각 단점행렬에 대해 $\gamma = 5.3$ 으로 하고 Theorem의 부등식 (13)의 해를 구하였다. 그 결과, 공통의 해 X, Y 가 존재하고, 이것으로부터 (7)식의 상태 피드백 게인 F 와 적분기의 게인 G 는

$$F = [-1.908 \times 10^{-5} \quad -3.482 \times 10^{-5} \quad 1.058 \times 10^{-6}],$$

$$G = -0.4305 \times 10^2 \quad (25)$$

이었다.

(다) 응답특성

위와 같이 설계된 상태 피드백 게인 및 적분기의 게인을 이용하여, 전 운전영역에서, 파라미터 변동에 대해 로버스트성이 보장되어지는지를 시뮬레이션을 통해 확인한다.

무단변속기의 변속비가 $R_m = 0.435(\text{min})$, $R_m = 2.34(\text{max})$ 일때, Fig. 3에 나타낸 운전점 ㉔, ㉕, ㉖, ㉗에서의 시뮬레이션 결과를 Fig. 5~Fig. 8에 나타낸다. 이때, 스텝상의 목표신호는 0.5[sec] 경과후에 인가 하였다. 참고로 Takiyama 등의 결과¹⁾를 Fig. 9와 Fig. 10에 나타낸다.(참고문헌(1)에서 제시하는 시뮬레이션 결과는, 파라미터 $\partial T_e / \partial \theta$ 가

$56 \leq \partial T_e / \partial \theta \leq 560$ 의 범위에서 변화한다고 했을때의 결과이며, $\partial T_e / \partial \theta = 5.6$ 일때는 발산하고 말았다.)

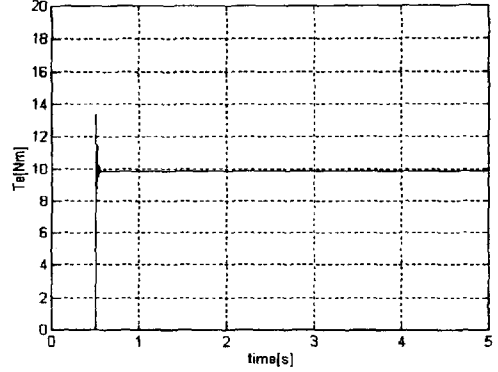


Fig. 6 Step Responses in the region ㉕
[$R_m = 0.435(\text{min}), 2.34(\text{max})$]

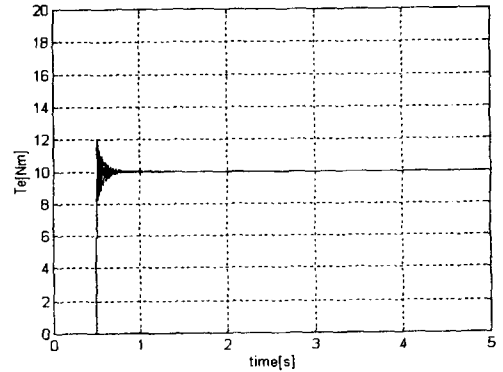


Fig. 7 Step Responses in the region ㉖
[$R_m = 0.435(\text{min}), 2.34(\text{max})$]

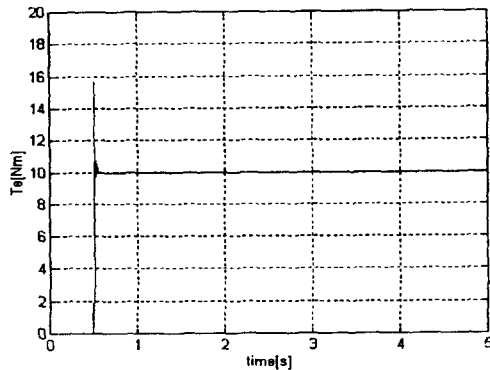


Fig. 5 Step Responses in the region ㉔
[$R_m = 0.435(\text{min}), 2.34(\text{max})$]

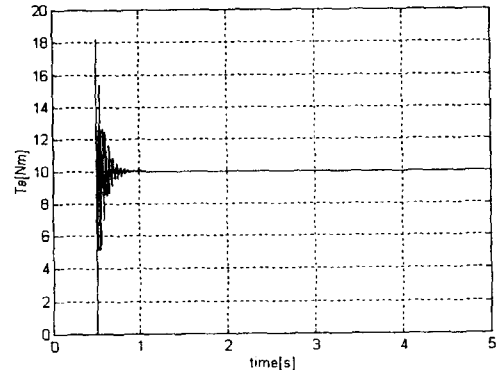


Fig. 8 Step Responses in the region ㉗
[$R_m = 0.435(\text{min}), 2.34(\text{max})$]

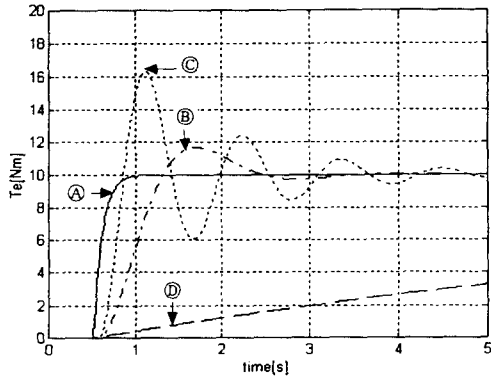


Fig. 9 Step Responses in case of Takiyama and et al.⁶⁾ [$R_m=0.435(\min)$]

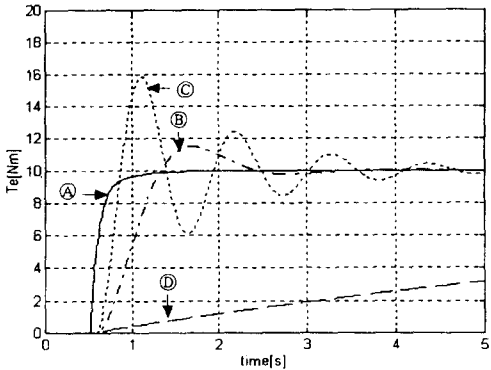


Fig. 10 Step Responses in case of Takiyama and et al.⁶⁾ [$R_m=2.34(\max)$]

Fig. 5~Fig. 8의 결과로부터 알 수 있듯이, 고차의 전달함수로 표현되는 제어기⁶⁾가 아닌 정적인 제어기만으로도, 전 운전영역에 걸쳐서 제어계의 로버스트성이 보장되어짐을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 내연기관 시스템을 제어대상으로 하고, 시스템의 표현상에 있어서의 보수성을 개선하기 위하여 제어대상을 Descriptor 형식으로 표현하였다. 그리고 주어진 설계사양에 대해 LMI를 이용하여 상태 피드백 제어치의 설계예를 제시하였다. 그래서, H_∞ 놈 조건을 만족하면서, 제어대

상의 파라미터 변동에 대해 로버스트한 상태 피드백 제어치를 LMI를 이용하여 구하였으며, 정적인 제어기 만으로도 광범위한 파라미터 변동에 대해 로버스트성이 보장될 수 있음을 보였다. 본 연구에서는 제어대상의 광범위한 파라미터 변동에 대한 제어계의 로버스트성에 대해 집중적으로 다루었으나, 응답특성 개선 등의 문제는 금후의 과제로 둔다. 이것 또한 LMI문제로 전환하여 해결할 수 있을 것으로 본다.

참고문헌

- 1) S. Boyd et al(1994) : Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM.
- 2) I. Masubuchi, A. Ohara and N. Suda(1994) : A Design of Robust Servosystems for Structured Uncertain Plants. Trans. SICE 30(9), 1051 - 1059.
- 3) 小原, 杉江(1994) : 凸最適化を用いた制御系設計. 日本システム/制御/情報學會 38(3), 138 - 146.
- 4) T. Iwasaki and R. E. Skelton(1993) : A Complete Solution to the General H_∞ Control Problem : LMI Existence Conditions and State Space Formulars. ACC, 605 - 609.
- 5) P. Gahinet and P. Apkarian(1994) : A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control. Int. J. Robust and Nonlinear Control (4), 421 - 448.
- 6) T. Takiyama and S. Morita(1994) : Robustness of Controlling Internal Combustion Engines. JSME(C) 60(572), 1303 - 1307.
- 7) Y. Fujisaki and M. Ikeda(1992) : Synthesis of Two - Degree - of - Freedom Design of Optimal Servosystems. Proc. 31st IEEE CDC, 3588 - 3589.
- 8) K. Gu, M. A. Zohdy and N. K. Loh(1990) : Necessary and Sufficient Conditions of Quadratic Stability of Uncertain Linear System. IEEE Trans. Auto. Control 35(5), 601 - 604.
- 9) H. Kogame and T. Mori(1993) : An Exact Quadratic Stability Condition of Uncertain Linear Systems. IEEE Trans. Auto. Control 38(2), 280.