

선형제차조절법을 이용한 정지궤도 위성의 위치보존 궤도조정

이 선 익 · 최 규 홍

연세대학교 천문우주과학과

이 상 욱

한국전자통신연구원 관제기술연구소

STATION-KEEPING MANEUVERS FOR A GEOSTATIONARY SATELLITE USING LINEAR QUADRATIC REGULATOR

Sunik Lee and Kyu-Hong Choi

Dept. of Astronomy and Space Science, Yonsei University

e-mail: silee@galaxy.yonsei.ac.kr

Sanguk Lee

Tracking, Telemetry and Command Section

Satellite Communications Technology Division, ETRI

e-mail: slee@kepler.etri.re.kr

(Received April 26, 1997; Accepted May 27, 1997)

요 약

잘 알려진 최적제어 이론의 선형제차조절법을 정지궤도 위성의 위치보존 궤도조정 문제에 적용하였다. 정지궤도 위성의 운동에 가장 큰 영향을 미치는 섭동항을 선택하여 동서방향과 남북방향 궤도조정의 경우 각각 14일간 지구비대칭 중력장의 영향, 28일간 태양과 달의 영향을 예측한 결과로 궤도조정할 경계조건을 적절하게 설정하였다. 비선형방정식을 선형화하여 리카티 방정식(Riccati Equation)을 두번 적분함으로써 최적궤도와 이에 상응하는 추진 가속도를 알아내었다. 선형제차조절법으로 구한 속도변화량과 기하학적으로 계산한 ΔV (속도변화량)을 비교해 봄으로써 제어이론을 통한 궤도조정 방법이 실제상황에 거의 근사한 해를 제공할 수 있는가와 제어이론을 위치보존 궤도조정 문제에 적용한 방법이 경제적인 측면에서의 연료최적화와 이에따른 정지궤도 위성의 수명연장에 기여할 수 있는가에 대한 해석을 시도하였다.

ABSTRACT

This paper applied one of the well-known optimal control theory, namely, linear quadratic regulator(LQR), to the station-keeping maneuvers(SKM) for a geostationary satellite. The boundary conditions to transfer the system with a good accuracy at a terminal

time were based upon the predicted orbital data which are created due to the Earth's non-uniform mass distribution's effect during 14 days and due to luni-solar effect during 28 days. Through the linearization of the nonlinear system equation with respect to reference orbit and the numerical integration of Riccati equation, the optimal trajectories and the corresponding control law have been obtained by using LQR. From the comparison of ΔV obtained by LQR with the ΔV obtained analytically by geometric method, Station Keeping Maneuvers(SKM) via LQR may provide comparable results to a real system. Furthermore it will demonstrate the possibility in fuel optimization and life extension of geostationary satellite.

1. 서론

중력하에서 운동하고 있는 위성체의 궤도조정, 즉 추력이나 기타의 자연력을 사용하여 위성궤도의 크기와 모양을 바꾸는 것은 위성의 임무가 다양해지고 특수한 목적에 사용할 요구가 증가할수록 그 기회도 자연히 증가하고 있으며 이에따라 허블 우주망원경을 실은 위성이나 정지궤도 위성의 궤도유지(Maintenance), 동일평면상의 랑데뷰 문제(Lee & Cochran 1993, Van der Ha 1991), 우주선간 혹은 우주정거장 사이의 3차원 궤도조정(Pourtakdoust 1995)까지 연구되고 있다. 이러한 궤도조정은 연료나 시간의 최적화를 목표로 하고 있으며 최적제어 이론을 도입하여 최적의 제어법칙과 최적궤도를 얻어내고 있다. 시스템 방정식에 제어 이론을 적용하는 방법은 궤도조정 이외에도 쪼금-쪼금 추력기의 뱅뱅 컨트롤문제(Matukura *et al.* 1994)를 다루는 자세제어, 추력이 최적화(Imado & Akira 1994) 등에도 널리 응용되고 있다.

본 연구에서는 위와같이 응용범위가 넓은 제어이론을 정지궤도 위성의 위치보존 궤도조정 문제에 적용하여 연료 최적화(Fuel Optimization) 가능성과 속도변화량을 계산하는 하나의 방법임을 제시해 보려고 한다. 정지궤도 위성은 주로 지구중력장이나 태양과 달에 의한 섭동으로 인하여 주기적으로 연료를 분사하여 일정한 제어영역에 존재하도록 하는 작업이 필요하다. 정지궤도 위성의 위치보존 궤도조정을 대상으로 한 이유는 SKM과정에서 소요되는 연료량을 최소화하여 위성의 수명연장에 기여할 수 있는가를 알아보려는 데 있다. 또한 LQR기법을 이용한 이유는 비선형 방정식을 선형화시킴으로써 계산시간을 줄일 수 있고 잘 알려진 선형제어 방법을 이용할 수 있기 때문이다. 궤도조정시 추진가속도는 전구간에서 연속적이고 제어변수의 크기에는 제한이 없으며 최종도달 시간에 상태벡터는 정해져 있다고 가정하였다. 연료분사시 자연섭동력이 추진가속도에 비해 매우 작으므로 추력이 진행되는 상황, 즉 운동역학 시스템의 구성에는 자연섭동력은 고려하지 않았다. 동서방향과 남북방향의 궤도조정의 형태는 각각 동일 평면상의 원궤도와 타원궤도사이의 궤도조정, 서로 다른 평면상의 원궤도간의 궤도조정이다. 정지궤도 위성의 운동에 가장 큰 영향을 미치는 섭동항을 선택하여 동서방향과 남북방향 궤도조정의 경우 각각 14일간 지구비대칭 중력장의 영향, 28일간 태양과 달

의 영향을 예측한 결과로 궤도조정할 초기위치와 최종위치를 적절하게 설정하였다. 단, 실제 무궁화 위성과 똑같이 초기조건과 최종조건을 설정하지는 않았지만 방법론으로 근사하도록 설정하였다. 본 논문에서는 위성의 역학 방정식을 선형화하고 선형화된 방정식에 LQR을 적용하여 최적해를 구하는 방법에 대하여 알아보고자 한다. 또한 궤도조정할 경계조건을 설정하고 시뮬레이션하여 최적해를 구하고자 한다. 속도변화량에 기준을 두어 기하학적으로 계산한 방법과 실제상황인 무궁화 위성의 궤과도 비교분석하고자 한다.

2. 위성의 운동역학 방정식과 선형화

구면좌표계상에서 위성의 위치와 속도, 가속도 벡터(Battin 1987)를 공간상에서 움직이는 단위벡터에 각각의 방향으로 추진 가속도 $\underline{u} = [u_r, u_\theta, u_\phi]^T$ 를 포함시켜 추력이 포함된 남북방향의 운동역학 방정식은 아래와 같이 (1), (2), (3)식으로 정리된다(Lee 1991).

$$\ddot{r} = r \sin^2 \phi \dot{\theta}^2 + r \dot{\phi}^2 + u_r \quad (1)$$

$$r \sin \phi \ddot{\theta} = -2 \sin \phi \dot{r} \dot{\theta} - 2r \cos \phi \dot{\theta} \dot{\phi} + u_\theta \quad (2)$$

$$r \ddot{\phi} = -2r \dot{r} \dot{\phi} + r \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2 + u_\phi \quad (3)$$

동서방향 운동역학 방정식은 (1), (2), (3)식에서 $\phi = 90^\circ$ 인 경우에 해당하는데 평면상에서 동서방향의 운동역학 방정식은 (4), (5)식으로 정리된다.

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} + u_r \quad (4)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = u_\theta \quad (5)$$

여기서 상태벡터와 제어벡터를 각각 $\underline{x} = [r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}]^T$, $\underline{u} = [u_r, u_\theta]$ 의 형태로 정의할 수 있으며 이들이 포함된 운동역학 방정식의 형태는 비선형이다. 반경이 R이고 각속도가 n인 원궤도를 기준궤도로 하여 상태벡터와 제어벡터가 포함된 운동방정식에서 Jacobian행렬을 구하여 비선형 방정식을 선형화하면 $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}$ 으로 표현된다(Brogan 1991).

3. 선형제차조절법(Linear Quadratic Regulator)

LQR이란 선형화된 시스템을 Controller와 Regulator를 사용하여 위성을 최종도달 시간에 정해진 조건을 만족시키며 도달하도록 제어하고 적절한 연료소모로 기준궤도에서 수용할 수 있는 차이만큼을 유지할 수 있도록 궤도를 조절하도록 디자인하는 제어방법이다(Brisson & Ho 1975, Kirk 1975). 선형화된 시스템방정식에 적절한 양의 제어를 입력하여 초기조건인 $\underline{x}(t_0)$ 에서 최종도달 상태가 0에 근사하도록 시스템을 이동시키기 위한 성능지수(J)는 아래의 (6)식으로 정의된다.

$$J = \frac{1}{2}(\underline{x}^T \underline{S}_f \underline{x})_{t=t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u}) dt \quad (6)$$

여기서 행렬 \underline{S} 와 \underline{Q} 는 Positive Semidefinite이고 \underline{R} 은 Positive Definite이다. 위 세 가중치행렬을 시스템에 맞게 적절하게 설정함으로써 이에따른 최적해를 얻을 수 있다. 제어이론에 따라 선형화된 시스템 방정식이 포함된 Hamiltonian 함수 H는,

$$H = \frac{1}{2}(\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u}) + \underline{\lambda}^T (\underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}) \tag{7}$$

으로 정하고 이 함수로부터 Euler-Lagrange 방정식과 경계조건은 (8)식으로 유도된다. 시스템 방정식과 Euler-Lagrange 방정식을 상태벡터와 Lagrange 미정계수로 구성된 식으로 정리하여 표현하면

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & -\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \\ -\underline{Q} & -\underline{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} \tag{8}$$

이다. Lagrange 미정계수의 초기값만 알고 있으면 위의 (8)식은 적분이 가능하지만 초기값을 알고 있지 못하므로 리카티 방정식(Brisson & Ho 1975)을 거꾸로 적분(Backward Integration)하여 $\underline{S}(t_0)$ 를 얻고 임의의 시각에서

$$\underline{\lambda}(t) = \underline{S}(t) \underline{x}(t) \tag{9}$$

인 관계식을 통하여 $\underline{\lambda}(t_0)$ 는 구해진다. 시스템 방정식과 Lagrange 미정계수로 구성된 (8)식을 앞으로 적분(Forward Integration)하여 최적화된 제어벡터와 상태벡터를 얻게 된다.

4. 위치보존 궤도조정 경계조건

궤도조정을 실시하려면 초기의 상태벡터와 목표점에서의 상태벡터를 찾아야 하고 궤도조정 시간을 정해 주어야 한다. 동서방향의 궤도조정 경우 초기궤도에서 주로 지구중력 비대칭 효과에 의하여 14일이 지난 후 궤도의 크기와 위치를 시뮬레이션 하였다. 위도 116도 상공에서 정지궤도 위성은 궤도장반경과 이심율에 있어서 14일동안 42164km에서 42166.5km로, 0.0에서 약 $6.0 \times 10^{-5} \sim 7.0 \times 10^{-5}$ 정도의 변화를 한다. 정지궤도에서 타원궤도와 원래의 원궤도와 교차점을 구하고 타원궤도상에 위치한 위성의 접근점각을 찾아 궤도조정을 위한 초기위치가 되는 타원상의 한점과 목표위치가 되는 원상의 두 점을 선택하고 궤도조정 시간은 두 점의 중간 원궤도를 혹은 약간 안쪽을 선택하여 초기위치와 목표위치의 두 각만큼 회전하는데 걸리는 시간으로 정하는 것이 시스템에 잘 맞다고 알려져 있다. 동서방향 위치보존 궤도조정시의 경계값과 궤도조정 시간은 표 1과 같다.

남북방향 궤도조정의 경우 태양과 달에 의한 영향을 고려하여 28일 경과 후의 궤도 경사각의 변화는 약 0.04 ~ 0.05도가 되는데 궤도경사각의 변화를 0.04도로 하고 궤도조정의 위치는 승교점과 강교점 중에서 승교점을 한 예로 선택하였다.

남북방향 궤도조정에서는 원과 원사이의 궤도조정으로 승교점의 위치를 임의로 선정할 수 있게 하였다. 궤도조정 제어박스는 승교점 전후로 1도로 하였고 궤도조정 시간은 실제 무궁화 위성의 경

표 1. E/W 위치보존 궤도조정시의 경계값과 궤도조정 시간.

값	초기상태	최종상태
Radial Distance(km)	42163.9936	42164.0
Angular Distance(deg)	7.83	9.83
Radial Velocity(km/sec)	2.19089×10^{-5}	0.0
Angular Rate(rad/sec)	7.29237×10^{-5}	7.292156×10^{-5}
Maneuver Time(sec)	0	478.0

표 2. N/S 위치보존 궤도조정시의 경계값과 궤도조정 시간.

값	초기상태	최종상태
Radial Distance(km)	42164.0	42164.0
Angular Distance(deg)	-1.0	1.0
Angle ϕ (deg)	90.000695	90.0
Radial Velocity(km/sec)	0.0	0.0
Angular Rate(rad/sec)	7.292154×10^{-5}	7.292156×10^{-5}
$\dot{\phi}$ (rad/sec)	-5.091×10^{-8}	0.0
Maneuver Time(sec)	0	480.0

우와 다르게 본 시뮬레이션에서는 평면상의 정지궤도 상에서의 2도 각거리만큼 이동하는데 걸리는 시간으로 하였다. 동서방향 위치보존 궤도조정시의 경계값과 궤도조정 시간은 표 2와 같다.

5. 위치보존 궤도조정 결과

적절한 양의 가중치를 주어 동서방향과 남북방향으로 나누어 각각 궤도조정을 시뮬레이션 하였다.

위치보존 궤도조정의 속도변화량과 기하학적인 방법으로 구한 속도변화량, 실제로 무궁화 위성 1, 2호 SKM시의 속도변화량을 표 3에 나타내었다.

표 1과 표 2의 궤도조정 경계값이 실제의 무궁화 위성과 완전히 같지는 않지만 표 3에서 보는 바와같이 LQR방법으로 수치적분을 통하여 구한 속도의 변화량과 실제로 무궁화 위성의 그것과 기하학적 방법으로 계산한 값과 거의 근사한다는 점을 확인할 수 있고 특히 기하학적인 방법으로 계산한 값과 비교해 보면 숫자적으로 동서방향과 남북방향의 궤도조정에 있어서 속도의 변화량이 약간 작게 계산된 것을 볼 수 있다.

그림 1과 2에서 보듯이 동서방향과 남북방향 위치보존 궤도조정인 경우 모두 최종 도달지에서 위치와 속도벡터가 정밀하게 이동되었고 시간에 따른 이러한 상태벡터의 변화와 추진가속도를 그림 1과 2에서 볼 수 있다. E/W SKM인 경우는 반경과 반경속도, 각속도의 변화를, N/S SKM인 경우 승교점에서 위성이 90도까지 올라오는 차이각의 변화를 도시하였다.

표 3. 속도변화량 비교.

구분	LQR SKM	Geometric Method	KOREASAT
N/S SKM(m/sec)	2.1419	2.1462	2.7
E/W SKM(cm/sec)	9.2044	9.2926	8.0

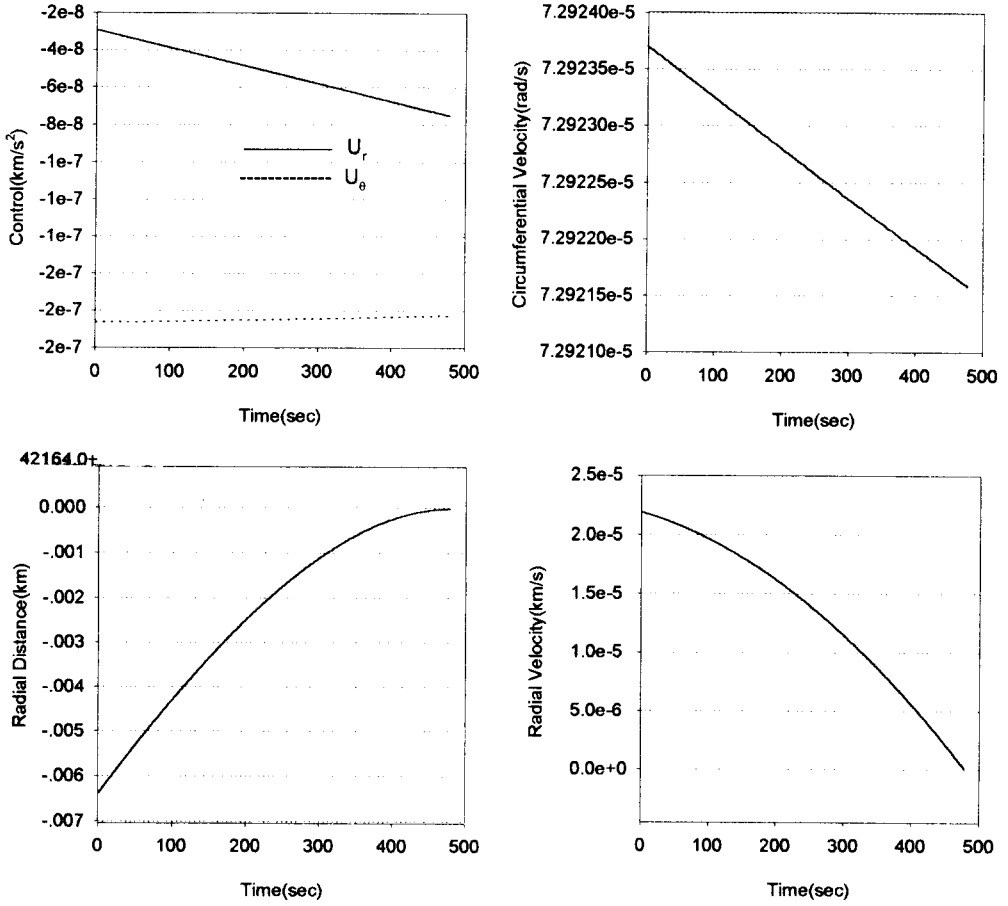


그림 1. E/W SKM의 연료추진 가속도와 최적궤도.

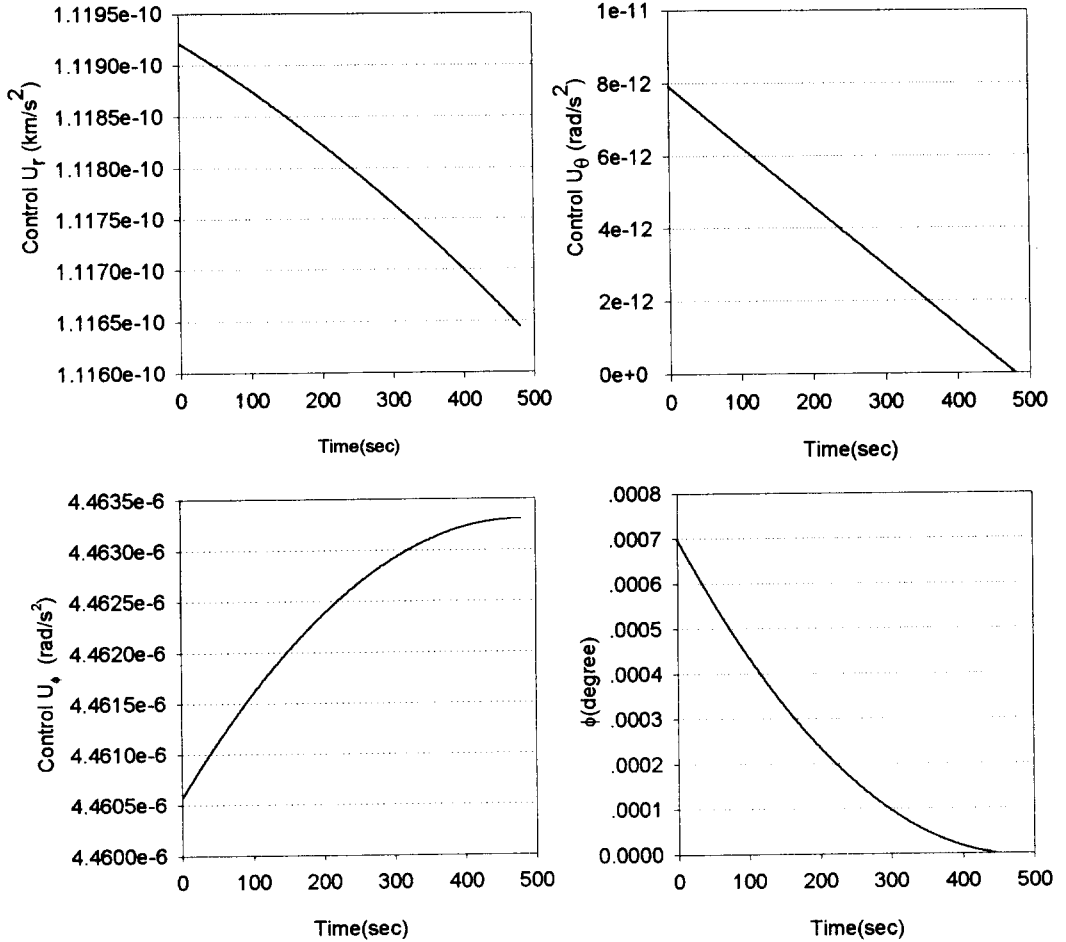


그림 2. N/S SKM의 연료추진 가속도와 최적궤도.

6. 결론

잘 알려진 최적제어 이론중의 하나인 선형제차조절법을 이용하여 정지궤도 위성의 궤도조정에서 연료의 최적화를 시도하고 매 순간마다 최적궤도와 연료추진량을 산출하였다. 기존의 순간추진에 의한 속도의 변화량과 선형제차조절법으로 계산한 속도의 변화량을 비교해 봄으로써 적어도 선형제차조절법이 실제시스템에 근사한 해를 제공한다는 1차적인 분석과 경제적인 효과를 기대해 볼 만하다

는 결론을 얻었다. 제어이론을 위치보존 궤도조정 문제에 적용하는 방법이 궤도획득이나 궤도재조정 등의 상황에서도 속도의 변화량과 추진 가속도를 계산하는 하나의 방법이 될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- Battin, R. H. 1987, An Introduction to the Mathematics and Methods of Astronautics (AIAA: New York), pp.103-106
- Brison, A. E. & Ho, Y. C. 1975, Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control (Hemisphere: New York), pp.148-153
- Brogan, W. L. 1991, Modern Control Theory, 3rd ed. (Prentice-Hall: New Jersey), pp.567-569
- Imado, F. & Akira, I. 1994, Proceedings of the Asian Control Conference
- Kirk, D. E. 1975, Optimal Control Theory an Introduction (Prentice-Hall: New Jersey), chapter 3,4,5,6
- Lee, S. 1991, A Feedback Linearization Approach to Orbital Maneuvers (Auburn University: Alabama)
- Lee, S. & Cochran, J. R. 1993, AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting High Thrust Rendezvous Via Feedback Linearization (AAS publications: San Diego), AAS 93-142
- Matukura, H., Niwa, H., Suzuki, M., Hiroshi, T. & Hiroyuki, Y. 1994, Proceedings of the Asian Control Conference
- Pourtakdoust, S. H, 1995, Thrust-Limited Optimal Three-Dimensional Spacecraft Trajectories (AIAA: Washington, D.C.), pp.1395-1403
- Van der Ha, J. C. 1991, Analytical Solutions For Fuel-Optimal Rendezvous By Finite Thrust Arcs (IAF: Montreal)