

파브리-페로 간섭계의 시뮬레이션

최 기 혁

인하대학교 항공경영관리연구소

데이빗 리즈

유타주립대 대기우주과학센터

THE SIMULATION OF A FABRY-PEROT INTERFEROMETER

Gi-Hyuk Choi

Aerospace Management Research Centre, Inha University

David Rees

Centre for Atmosphere & Space Science, Utah State University

(Received May 1, 1997; Accepted May 22, 1997)

요 약

파브리-페로 간섭계는 높은 해상도($\sim 1,000,000$)를 갖고 있어 최근에 우주과학의 여러 분야에 응용되고 있다. 이 간섭계의 작동 원리를 이해하기 위해서는 수학적 모델링이 필요하고, 간섭계로부터 얻어진 간섭무늬를 해석하기 위해서는 정확한 장비 특성함수를 아는 것이 필수적이다. 간섭계로부터 나온 스펙트럼은 발광원으로부터의 순수 신호와 장비의 특성함수가 컨볼루션과정을 통하여 섞여있고, 순수 신호는 발광원의 양자 상태, 온도와 공기 덩어리의 움직임 등의 정보가 들어 있다. 따라서 이 순수 신호를 모델링하여 이론적인 장비 특성함수와 컨볼루션하면 실제 얻어질 스펙트럼을 예측할 수 있다.

ABSTRACT

A Fabry-Perot interferometer has a very high ($\sim 1,000,000$) resolution, so recently this has been widely used for many fields of space science. To understand the working principle of this a mathematical modeling is needed, and to analyze the interferogram it is essential to know the precise instrument function. The spectrum from the interferometer is mixed with a true signal from the light source and the instrument function through convolution. The true signal has the information about the quantum state of molecules, temperature and bulk motion of the gas. Therefore if we model the signal

and convolve this with the theoretical instrument function we can predict the spectrum for the real case.

1. 서론

모든 광학 장비는 입력 신호를 흐리게 Broadening 시키는 성분이 있다. 이상적인 펄스(Pulse) 입력이 왔을 때 Broadening된 출력을 장비의 고유특성함수(Instrument Characteristic Function 혹은 줄여서 Instrument Function) 또는 MTF (Modulation Transfer Function)이라고 한다(그림 1). 얻어진 스펙트럼에서 도플러 이동(Doppler Shift)이나 도플러 온도(Doppler Temperature)를 측정하기 위해서는 정확한 장비 특성함수를 아는 것이 필수적이다. 왜냐하면 스펙트럼에서 장비 특성함수 성분을 빼야만 발광원의 순수 스펙트럼을 얻을 수 있기 때문이다. 일반적으로 파브리-페로 간섭계의 장비 특성함수는 레이저 광선을 쏘여서 얻는데, 레이저 광선 스펙트럼의 FWHM(Full Width Half Maximum)은 $1.6 \times 10^{-6} \text{nm}$ (1.2 MHz) (Hecht & Zajac 1987) 정도로 매우 좁으므로 이상적인 펄스로 볼 수 있기 때문이다.

본 연구에서는 이 레이저를 쏘여서 얻은 실제의 장비 특성함수와 수학적인 시뮬레이션으로 얻은 장비 특성함수를 비교하여 그 타당성을 입증할 것이다. 실제 간섭계는 여러 가지 부분으로 구성되어 있어 장비 특성함수도 각각의 부분으로부터 나온 여러 개의 독립적인 Broadening효과가 중첩되어 있다(Choi 1996). 본 연구에서 이 각각의 Broadening 효과가 자세히 시뮬레이션 될 것이다. 또 이 시뮬레이션은 실제 실험에서 얻어진 장비 특성함수와 비교하여 그 타당성을 검증할 것이다. 지금까지의 파브리-페로 간섭계의 시뮬레이션(Cooper 1971)은 간섭계의 여러 Broadening효과들을 수학적으로 모델링 하였으나 실제 실험과 비교되지 않아 그 정확도가 의문시 되었고, 특히 도플러 온도의 정확도는 기대할 수가 없었다.

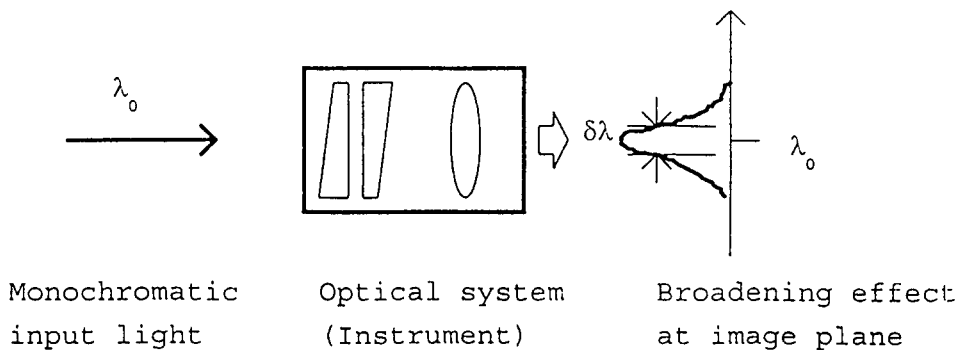


그림 1. 광학장비의 Broadening 효과.

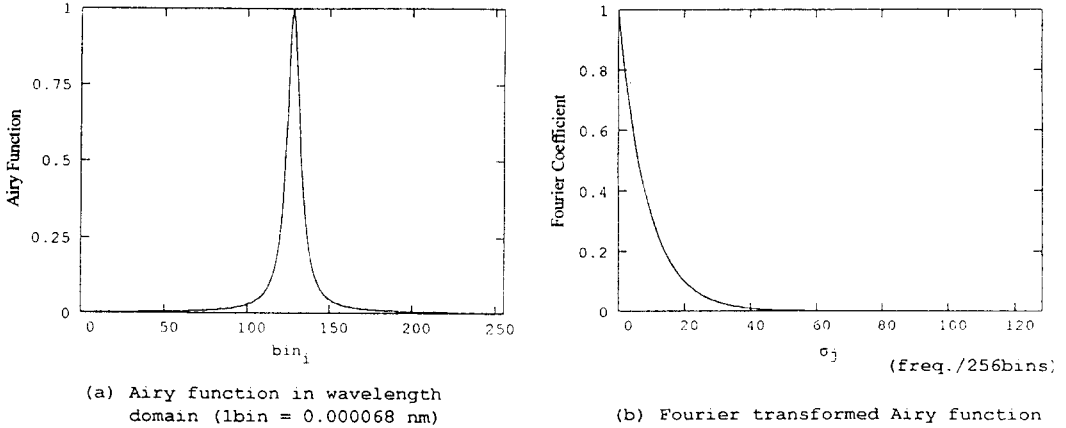


그림 2. 파브리-페로 간섭계의 에어리 함수.

OH 발광은 람다 더블링(Lambda-Doubling) 등의 양자역학적 효과가 있고, 도플러 이동, 도플러 온도, 간섭계의 중복 중첩(Wrap Around) 효과 등이 스펙트럼에 포함되어 있어 복잡하다. 이에 본 연구에서는 이 모든 효과를 고려한 스펙트럼의 모델링도 시도 할 것이다.

2. 파브리-페로 에탈론(Etalon)의 에어리 함수

파브리-페로 간섭계의 가장 핵심적인 부품은 에탈론인데, 여기에서 두 장의 반 거울(Half Mirror)이 평행하게 마주보고 있어 입사광선이 연속적으로 투과와 반사를 일으켜서 원형의 간섭무늬를 만든다. 파브리-페로 간섭계의 가장 큰 Broadening 효과는 에탈론의 에어리 함수로부터 온다. 에어리 함수는 에탈론이 일정한 파장 간격의 주기로 입력에 대한 반응이 최고가 되는 것을 나타낸 것인데(그림 2), 이때의 일정한 파장 간격을 FSR(Free Spectral Range)라고 한다. 식 (1)과 같이 에어리 함수는 순수한 에탈론 거울의 반사도(Reflectance)와 위상각(Phase Angle)의 함수이다.

$$A(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{4R^2}{(1-R)^2} \sin^2(\delta/2)} \quad (1)$$

윗 식의 위상각은 수치계산의 편의를 위해 식 (2)와 같이 표현된다.

$$\delta = 2\pi \frac{\lambda - \lambda_0}{(\Delta\lambda_0)_{fsr}} \quad (2)$$

윗 식에서 $(\Delta\lambda_0)_{fsr}$ 는 간섭계의 Free Spectral Range이다.

3. 거울 결함(Mirror Defect) 효과

파브리-페로 간섭계에는 두 장의 반거울이 평행하게 마주보는 에탈론이 핵심 부분이다. 그러나 완벽하게 평편한 거울은 실제로는 만들어 낼 수 없다. 거울의 결함으로는, 코팅 표면의 미세한 결함(Microscopic Defect), 표면의 구형 왜곡(Spherical Departure) 그리고 정렬(Alignment)의 불완전애 의한 완전한 평행으로부터의 벗어남 등이 있다. 이중 가장 영향을 미치는 것은 표면의 구형 왜곡이지만 모든 효과들은 합해져 평편도(Flatness)로 나타내지고, 이는 입사 파장의 부분비(Fraction)로 표시된다. 최근의 고품질 에탈론의 거울은 그 평편도가 $\sim \lambda/200$ 정도인데 본 연구에 쓰인 에탈론의 평편도는 제작된 지 8년이나 된 시간의 노화 현상을 고려하여 $\sim \lambda/50$ 정도로 추정하였다. 이 거울 결함함수는 식 (3)에서와 같이 사각형 함수가 된다(그림 3).

$$F_D(\lambda) = 1 \text{ for } \frac{-(\Delta\lambda_o)_{fsr}}{2\xi_D} < \lambda < \frac{(\Delta\lambda_o)_{fsr}}{2\xi_D} \quad (3)$$

$$= 0 \text{ for all other } \lambda$$

윗 식에서 $\xi_D = \frac{\lambda}{2\Delta d}$ 이고, Δd 는 완전한 평면으로부터의 평균 벗어남을 말한다.

4. IPD의 분산함수(PSF; Point Spread Function)

IPD는 약한 빛을 감지하는 광증폭기의 일종으로, 광자를 전자로 변환시키는 광음극(Photocathode), 한 개의 전자를 수백만 개의 전자로 증폭하는 MCP(Micro Channel Plate) 증폭기와 이 전자들을 평면 좌표로 인식하는 저항 양극(Resistive Anode)으로 구성되어 있다. 이러한 광증폭기는 입력 펄스를 유한한 면적의 원내부에 전자를 분산시키는데 그 정도를 분산함수의 폭(FWHM)으로 나타낼 수 있다. 분산함수란 회절과 불완전한 초점에 의하여, 이상적인 펄스 입력이 영상면의 유한한 면적에 퍼져 흐릿하게 상이 맺히는 정도의 수학적 표현이다. 장비 특성함수나 MTF도 같은 개념의 다른 표현이다.

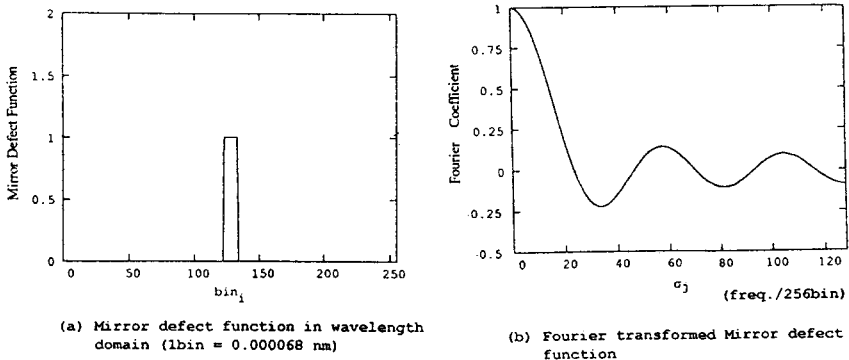
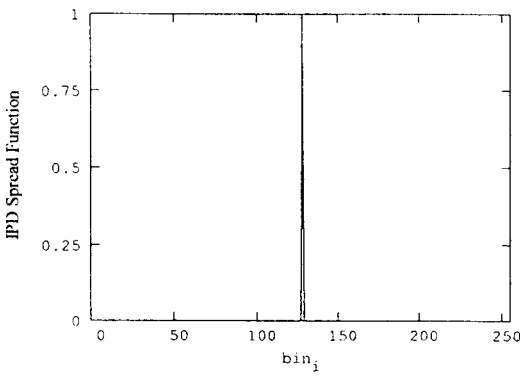
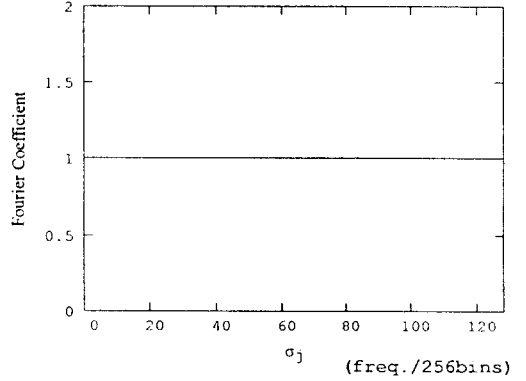


그림 3. 에탈론 거울의 결함 함수.



(a) IPD Point Spread Function in wavelength domain (1bin = 0.00068 nm)



(b) Fourier transformed IPD Point Spread Function

그림 4. IPD의 분산함수.

본 연구의 간섭계에 사용된 IPD는 갈륨-아스나이드(GaAs) 광음극을 갖고 있는데, 광음극(Photocathode)과 MCP의 간극이 $1000\mu\text{m}$ 그리고 그 사이의 전압차가 600V일 때 분산함수의 폭은 $60\mu\text{m}$ 정도이다(McWhirter *et al.* 1982).

이 IPD의 크기가 직경이 25mm이고 샘플링할 때 256×256 개의 격자로 디지털화 하므로 이때 발생하는 위치 오차가 약 $100\mu\text{m}$ 정도이다. 그러나 이 IPD의 노화와 광잡음(Photon Noise) 등의 다른 요인을 고려할 때 분산함수의 폭은 $150\mu\text{m}$ 정도로 예측된다(Choi 1996). 따라서 전체 분산함수의 폭은 두 성분의 평방 제곱근을 취하면 $160\mu\text{m}$ 이다. 분산함수는 가우스 함수 형태로 $160\mu\text{m}$ 의 폭(FWHM)을 갖는데 아래와 같이 나타내 진다(그림 4).

$$F_p(\lambda) = \exp \left[\frac{-4\lambda^2 \ln(2)}{(160\mu\text{m})^2} \right] \quad (4)$$

그림 4에서 보는 바와 같이 IPD의 분산함수는 매우 작아 실제 장비함수에는 영향을 미치지 못한다.

5. 장비특성함수의 계산

장비 특성함수에는 광학 장비의 모든 Broadening 효과들이 포함되어있는데 이 Broadening 효과들은 콘볼루션(Convolution)이라는 수학적 형태로 합해져 있다. 콘볼루션은 푸리에 평면(Fourier Domain)에서는 간단히 곱셈으로 나타낼 수 있다. 따라서 파브리-페로 간섭계의 장비 특성함수는 푸리에 평면에서 파장 수(Wave Number) σ 의 함수로 아래와 같이 쓸 수 있다. 파장 수는 파장의 역수이다 ($\sigma = \frac{1}{\lambda}$).

$$i(\sigma) = a(\sigma) f_D(\sigma) f_p(\sigma) \quad (5)$$

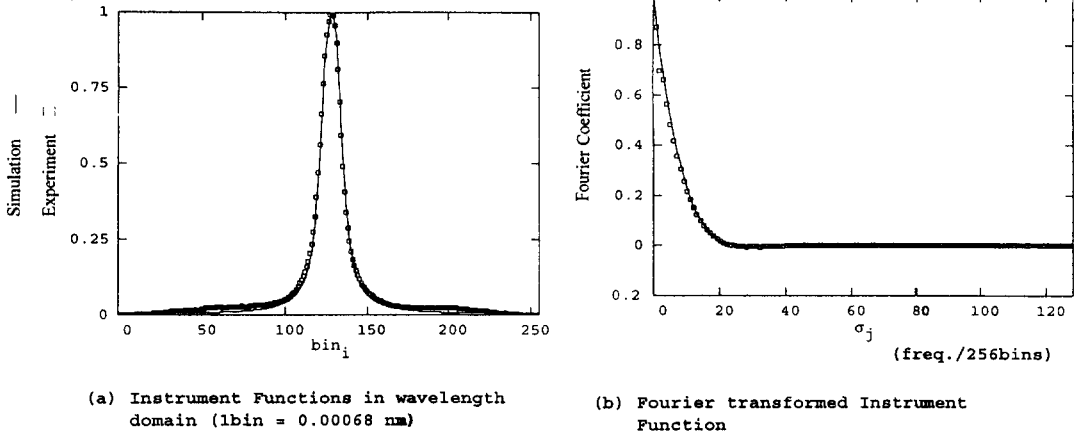


그림 5. 시뮬레이션과 실험으로 얻어진 장비함수의 비교.

윗 식에서 i, a, f_D, f_p 는 각각 푸리에 변환된 장비 특성함수, 에어리 함수, 거울 결합 함수와 IPD 분산 함수를 뜻한다. 식 (5)를 역푸리에 변환하면 콘볼루션된 장비 함수 $l(\lambda)$ 를 얻을 수 있다.

그림 5는 이렇게 이론적으로 얻어진 장비 함수와 실제 레이저 광선을 쏘여서 얻은 장비 함수를 비교하였는데 정확히 일치하는 모습을 볼 수 있다. 이를 통해서 앞에서 추정된 거울 결합 함수가 타당한 것을 알 수 있다. 그러나 실제의 경우 거울의 결합을 독립적으로 측정하기는 매우 어렵다. 따라서 이상의 시뮬레이션에서 역으로 거울의 결합 정도를 유추할 수 밖에 없다.

6. OH 발광의 모델링

정확한 OH 발광 스펙트럼의 모델링은 실제 스펙트럼을 분석할 때 쓰이는 최소자승법에 있어서 절대적으로 중요하다. 왜냐하면 최소자승법은 실제의 스펙트럼을 모델링한 스펙트럼과 비교하기 때문이다.

본 연구에서 모델링할 OH 스펙트럼은 회전-진동 양자 상태가 $6 \rightarrow 2$ 로 전이하고, 각 모멘텀이 $3 \rightarrow 2$ 로 전이하는 P1(3) 브랜치(Branch)로 중심 파장은 843nm이다. OH분자는 두 개의 원자로 구성되어 있어 분자의 전자기적 운동과 회전-진동 운동이 상호 간섭을 일으켜 스펙트럼이 근접한 두 개의 스펙트럼으로 분리되는 “람다 더블링(Lambda Doubling)” 현상이 있다(그림 6의 점선). 두 스펙트럼의 간격은 정확한 자료가 없어 실제로는 데이터 분석시 변수로 놓고 구해야 하는데, Choi(1996)는 668개의 스펙트럼에서 0.0191nm를 얻었다. 또 이 스펙트럼은 OH분자들이 포함된 주위의 공기가 움직일 때 관측자의 시선과 멀어지거나 가까워짐에 따라 중심 파장의 도플러 이동(Doppler Shift)이 발생한다.

$$\lambda'_o = \frac{\lambda_o}{\left(1 + \frac{V_x}{c}\right)} \tag{6}$$

여기에서 V_x, c 는 각각 시선 방향 속도와 빛의 속도이다.

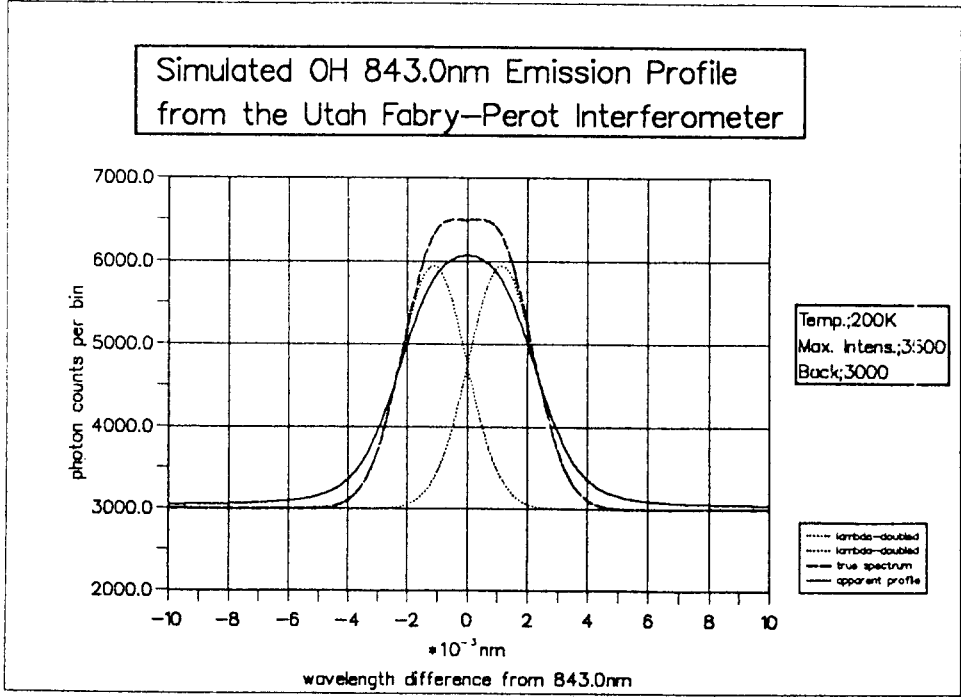


그림 6. 모델링된 OH 스펙트럼.

OH 분자는 온도에 따라 이에 상응하는 동력학적 에너지를 갖는데, 이 각각의 분자가 도플러 이동을 일으켜 전체적으로 스펙트럼을 Broadening시키는데 이를 온도 Broadening현상이라 한다. 이 때 스펙트럼은 온도의 함수인 맥스웰 분포 (Maxwell Distribution)를 갖게 된다(McCartney 1983).

$$K(\lambda) = S \frac{c}{\lambda_0} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp \left[-\frac{mc^2 \lambda_0^2}{2kT} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)^2 \right] d\lambda \quad (7)$$

여기에서 S, m, k, T 는 각각 적분 발광선 강도 (Integrated Line Intensity), OH의 분자 질량, 볼츠만 상수 그리고 온도이다. 적분 발광강도는 스펙트럼을 전체 파장에 걸쳐 적분했을 때 얻어지는 강도이다 ($S = \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda)d\lambda$). 간섭계에서 결보기로 나타나는 두 스펙트럼 사이의 간격은 실제 간격과 간섭계의 Free Spectral Range의 차이 값이다.

$$\Delta\lambda = |\Delta\lambda_{gap} - \Delta\lambda_{fsr}| \quad (8)$$

본 연구의 대상이 된 간섭계의 Free Spectral Range는 0.0173nm이고 실제 두 스펙트럼 사이의 간격은 0.0191nm이므로 결보기 간격은 $\Delta\lambda = |0.0191nm - 0.0173nm| = 0.0018nm$ 가 된다. 따라서 간섭

계에서 얻어진 스펙트럼은 두 개의 분리된 스펙트럼과 배경 잡음의 합으로 나타내진다(그림 6의 파선).

$$K(\lambda) = K(\lambda_1 - \lambda) + K(\lambda_2 - \lambda) + l_{\text{bak}} \quad (9)$$

여기에서 $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda/2$, $\lambda_2 = \lambda_0 + \Delta\lambda/2$ 이다. 간섭계에서 얻어지는 스펙트럼은 식 (9)의 순수 스펙트럼과 식 (5)에서 얻어지는 장비 특성함수가 콘볼루션으로 합하여진 것이다(그림 6의 실선).

$$g(\sigma) = i(\sigma) k(\sigma) \quad (10)$$

7. 결론 및 토의

본 연구에서 행하여진 파브리-페로 간섭계의 수학적 시뮬레이션은 그림 5에서와 같이 레이저 광원을 사용하여 얻어진 실제의 장비 특성함수를 성공적으로 묘사하고 있음이 입증되었다.

파브리-페로 간섭계의 수학적 모델링은 장비 특성함수를 쉽고 빠르게 구하기 위하여 필요하다. 일반적으로 이 간섭계의 장비 특성함수는 레이저 광선을 쏘여 얻는데, 레이저 광원의 파장이 매우 한정적이므로 관측할 파장과 다를 경우 복잡한 과정을 통하여 장비 특성함수의 파장을 변환 시켜야 한다(Killeen & Hays 1984, Choi 1996). 이 과정은 복잡하여 많은 시간이 소요되므로 한 번에 여러 파장을 관측하는 경우 그 불편함은 매우 크다. 그러나 파브리-페로 간섭계의 시뮬레이션 과정에서 얻어진 거울 결합 함수, 센서의 분산함수 등은 쉽게 다른 파장으로 변환 되어 장비 특성함수를 합성해낼 수 있다. 거울 결합 함수는 독립적인 측정과 모델링이 모두 힘들다. 따라서 한 파장에서 실험을 통하여 측정된 장비 특성함수를 분석하여 역으로 알아내는 것이 바람직할 것이다.

OH 스펙트럼의 모델링은 온도 함수인 맥스웰 분포를 이용하여 얻었다. 여기에는 도플러 이동, 온도와 람다 더블링 효과에 의한 스펙트럼의 분리 현상, 그리고 간섭계의 Free Spectral Range와 스펙트럼 간격의 상호작용 등의 모든 영향이 고려되었다. 본 연구에서 모델링 된 OH 스펙트럼은 실제 응용을 통하여 그 정확성이 입증되었다(Choi 1996, Choi *et al.* 1996, Choi *et al.* 1996).

감사의 글: 본 연구의 제반에 걸쳐 도움을 주신 인하대 김진호 교수님과 항공경영관리연구소의 홍용석 교수님께도 감사를 드립니다.

참고문헌

- Choi, G. H. 1996, Ph. D. Thesis, London University
 Choi, G. H., Monson, I. K., Wickwar, V. B. & Rees, D. 1996a, Adv. Sp. Pub. Eilseiver, in press
 Choi, G. H., Monson, I. K., Wickwar, V. B. & Rees, D. 1996b, Adv. Sp. Pub. Eilseiver, in press
 Cooper, G. 1971, Appl. Opts., 10, 3, 525
 Hecht, E. & Zajac A. 1987, Optics, 2ed. (Addison-Wesley Pub. Co.: Massachusetts)

Killeen, T. L. & Hays, P. B. 1984, *Appl. Opt.*, 23, 4, 612

McCartney, F. J. 1983, *Absorption and emission by atmospheric gases* (John Wiley & Sons: New York)

McWhirter, I., Rees, D. & Greenway, A. H. 1982, *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, 15, 145