

오염물질의 이동역학 및 확산거동해석

서일원 (서울대학교 공과대학 토목공학과 부교수)

유대영 (서울대학교 대학원 토목공학과 박사과정)

1. 서론

현재까지 인간이 배출하는 도시하수 및 산업폐수 등 오염물질 대부분은 하천이나 바다 등의 수계로 배출되고 있다(그림 1 참조). 여러 종류의 오염원으로부터 다양한 오염물질의 유입 위험성이 존재하는 수계에서 오염물질이 어떻게 이동하며 어떤 확산과정을 거치게 되는가에 대한 해석 및 예측은 순환되는 수자원을 계속적으로 이용하는 데에 필수적이라 할 수 있다. 이미 오염물질의 이동에 관한 이론을 이용하여 실제적인 확산거동을 예측할 수 있는 여러 수치모형이 개발되어 많은 분야에서 사용 중이지만 이러한 모형을 이용하는 경우에도 물질의 이동과 확산에 대한 수리학적 기본 지식에 대해서 충분한 이해가 선행되어야 한다고 판단된다.

수계 내에서의 오염물질의 이동(transport)은 기본적으로 이송(advection)과 확산(diffusion) 또는 분산(dispersion) 과정으로 나눌 수 있다. 이송은 물의

흐름에 의해 오염물질 자체가 움직이는 현상으로 이 과정을 예측하기 위해서는 수리학적 이론을 이용하여 수계 내에서의 유속분포를 먼저 알아야한다. 확산 과정은 보다 복잡한 과정으로 이루어지는데 기본적으로 농도가 높은 곳에서 낮은 곳으로 물질이 이동한다는 Fickian 확산모형으로 설명될 수 있다. 오염물질의 이동 과정에는 그 외에도 비보존성 오염물질의 반응에 의한 감소, 자연하천에서 일어나는 저장효과, 오염물질의 흡착 및 탈착 등의 과정을 거치며 이동하게 된다.

오염물질의 확산과정에 대한 이론은 지금까지 Taylor(1954)에 의해 제안된 1차원 Fickian 확산모형이 초기 및 경계조건이 주어지는 경우에 해석적인 해를 용이하게 구할 수 있다는 장점 때문에 널리 사용되어왔다. 그 이후로 1차원 확산모형에서 사용되는 중 확산계수에 대한 연구가 여러 연구자들에 의해 수행되었고(Fischer 등, 1979), 1차원 확산모형을 기본으로 하여 자연감소 등의 화학적 변화 등을 추가한 1차원 수질예측 모형인 QUAL2E(Brown과 Barnwell, 1987), WQRRS(Smith, 1978) 등이 개발되었고 최근에는 2차원 유속장 계산기능과 전, 후처리 기능을 가진 수질예측 모형(Boss International, 1993)등이 개발되고 있다.

2. 오염물질의 이동역학

오염물질의 이동은 이송과 확산 또는 분산(dispersion) 과정으로 설명된다. 이송은 물의 흐름에 의한 오염물질의 움직임이다. 확산은 분자확산(molecular diffusion)과 난류확산(turbulent

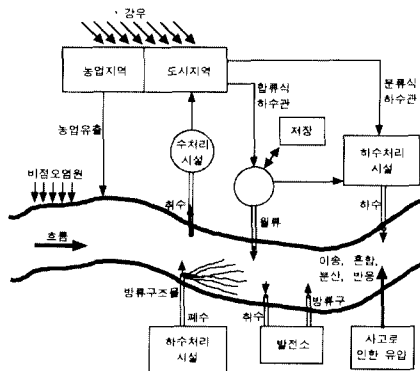


그림 1. 오염물질의 유입 및 확산 개념도

diffusion)으로 구분하여 이해할 수 있다. 분산은 흔히 확산과 혼용되어 사용되기는 하지만 엄밀하게는 전단흐름(shear flow)에 의한 종방향 농도의 변화로 이해할 수 있다. 이 때문에 분산은 흔히 종분산(longitudinal dispersion)으로 알려져 있다. 오염물질의 종류 중 보존성 오염물질은 수계에 유입된 후 전체 질량의 변화가 없는 물질을 말하여 비보존성 오염물질은 수계에 유입된 후 이송 및 확산 과정뿐만 아니라 화학적 및 생화학적 반응을 일으켜 전체 질량이 변하는 물질을 말한다.

2.1 Fickian 확산

Fickian 확산(Fickian diffusion)은 “수중에 용존되어 있는 용질의 흐름률(flux)은 용질의 농도경사에 비례한다”는 Fick의 법칙을 따르는 확산을 뜻한다. 즉 Fickian 확산은 물질의 분자확산을 의미한다. 물질의 분자확산은 수리학이나 환경공학에서 다루는 실제적인 문제에서는 그 규모가 너무 작아 큰 의미가 거의 없지만, 난류확산 또는 분산 등을 분자확산과 같은 형태의 과정으로 설명하게 되므로 분자확산에 대해 깊이 있게 이해해야할 필요가 있다.

Fick의 법칙을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$q = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (1)$$

여기서 q는 용질의 흐름률을 뜻하며, c는 용질의 농도, D는 분자확산계수, x는 거리를 나타낸다. 질량 보존법칙에 의해서 용질의 흐름률의 거리에 따른 변화량과 용질농도의 시간변화율과의 관계는 다음 식으로 표현된다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x} \quad (2)$$

여기서 t는 시간을 나타낸다. 식(1)과 (2)를 결합하면 식 (3)과 같은 1차원 확산방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (3)$$

3차원 확산방정식의 일반적인 형태는 (4)와 같이 표현된다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

확산항에 물의 흐름으로 인한 이송항이 추가되면 흐름률은 식 (5)로 표현된다.

$$q = uc - D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (5)$$

여기서 u는 x방향의 유속을 뜻하는데 식(5)의 우항의 첫째 항을 이송흐름률(advective flux)라 하고 둘째 항을 확산흐름률(diffusive flux)이라 한다. 식 (5)와 식(2)를 결합하면

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (6)$$

과 같은 1차원 이송·확산방정식이 유도된다. 3차원 이송·확산방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

여기서 v, w는 각각 y, z 방향의 유속을 뜻한다.

2.2 난류확산

Fickian 확산은 흐름이 층류인 상태에서의 분자확산으로 인한 물질의 이동을 설명하는 식이다. 그러나 자연수계에서 대부분의 흐름은 난류상태로 유동한다. 난류흐름에서는 유입된 오염물질이 층류에서의 경우에 비해 훨씬 더 빠르게 퍼지는 성질을 가지고 있다. 또한 난류에서 유속과 압력 등은 비정상 거동을 보이며, 무작위 성분을 갖는다.

따라서 유속과 농도는 다음 식과 같이 평균값과 변동성분으로 나눌 수 있다.

$$\bar{u} = u + u' \quad (8)$$

$$\bar{c} = c + c' \quad (9)$$

여기서 평균값은 시간평균으로 다음 식과 같이 정의된다.

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt \quad (10)$$

$$\bar{c} = \frac{1}{T} \int_0^T c \, dt \quad (11)$$

변동성분의 시간평균은 0이다.

그림 2.에 도시한 바와 같은 2차원 이송확산 과정을 고려할 경우, 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial uc}{\partial x} + \frac{\partial vc}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

이 때 유속 v , 즉 y 방향의 유속은 평균이 0이고 변동성분만을 갖는다고 가정한다.

$$u = \bar{u} - u' \quad (13)$$

$$v = v' \quad (14)$$

$$c = \bar{c} - c' \quad (15)$$

식(13), (14), (15)를 식 (12)에 대입하면

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u} + u') (\bar{c} + c')}{\partial x} + \frac{\partial v' (\bar{c} + c')}{\partial y} \\ & = D \frac{\partial^2 (\bar{c} + c')}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 (\bar{c} + c')}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (16)$$

을 얻을 수 있고 식(16)을 정리한 후 양변에 시간평균을 취하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} & = D \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} + \\ & \frac{\partial (-\bar{u}' c')}{\partial x^2} + \frac{\partial (-\bar{v}' c')}{\partial y} \end{aligned} \quad (17)$$

을 얻는다. 난류변동성분으로 인한 이동은 농도경사에 비례한다는 사실을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\overline{u' c'} = -\epsilon_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (18)$$

$$\overline{v' c'} = -\epsilon_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \quad (19)$$

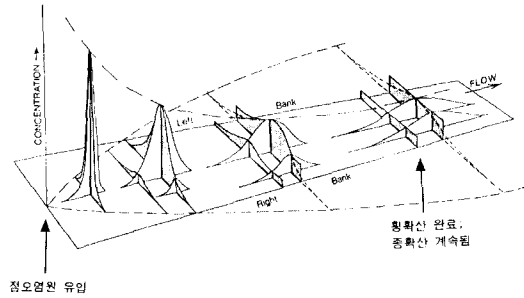


그림 2. 하천에서의 점오염원으로부터의 종확산 및 횡확산 형태

이 때 x , y 는 각각 x 방향과 y 방향의 난류확산계수 (turbulent diffusion coefficient)이다. 식(18)과 (19)를 식(17)에 대입하면 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = (D + \epsilon_x) \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + (D + \epsilon_y) \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \quad (20)$$

대부분의 경우 난류확산계수는 분자확산계수에 비해 훨씬 크므로 분자확산계수를 무시할 수 있다.

$$D \ll \epsilon_x, \epsilon_y \quad (21)$$

따라서 식 (21)을 고려하고, 식 (20)의 시간평균기호인 overbar를 생략하여 다시 표현하면 식 (22)와 같다.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial c}{\partial x} = \epsilon_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (22)$$

일반적인 형태의 3차원 난류확산 이송확산방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial c}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial c}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial c}{\partial z} = \\ \epsilon_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (23)$$

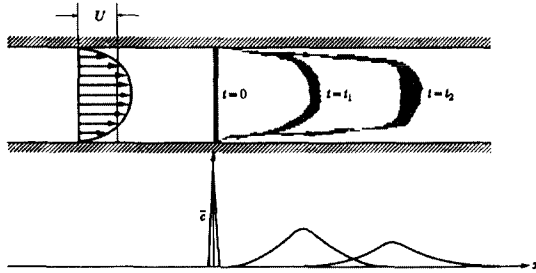


그림 3. 속도경사로 인한 종확산 과정

2.3 전단흐름에서의 분산

전단흐름은 흐름단면 내에서 속도의 경사가 있는 흐름을 뜻한다. 수리학 및 환경공학에서 해석을 필요로 하는 거의 모든 흐름은 전단흐름이다. 전단흐름 내에서는 오염물질의 분산이 일어나는데 분산은 전단흐름과 횡방향의 확산(난류확산)의 결합된 효과로 인해 오염물질이 퍼지는 과정을 뜻한다(그림 3. 참조).

1차원 분산에 관한 식을 유도하기 위해서 식(20)에서 유속과 농도를 단면 평균과 변동성분으로 분리하면 다음과 같다.

$$\bar{u} = U + u'' \quad (24)$$

$$\bar{c} = C + c'' \quad (25)$$

이 때 U와 C는 단면평균 유속과 농도로서, 다음 식과 같이 정의된다.

$$U = \frac{1}{A} \int_A \bar{u} dA \quad (26)$$

$$C = \frac{1}{A} \int_A \bar{c} dA \quad (27)$$

변동성분의 단면평균은 0이다. 식(24)와 (25)를 식(20)에 대입하여 단면평균을 취하면

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{(C+c'')} + \overline{(U+u'') \frac{\partial (C+c'')}{\partial x}} \quad (28)$$

$$= (D+\epsilon_x) \frac{\partial^2 (C+c'')}{\partial x^2} + (D+\epsilon_y) \frac{\partial^2 (C+c'')}{\partial y^2}$$

과 같이 되고 이를 정리하면

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = (D+\epsilon_x) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \overline{\frac{\partial (-u'' + c'')}{\partial x}} \quad (29)$$

로 나타낼 수 있다. 이 때

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 0 \quad (30)$$

이 된다. 이유는 C는 단면 평균값이므로 y방향의 변화가 없기 때문이다.

Taylor(1954)에 의하면 u''에 관련된 확산항은 단면평균 농도의 종방향 경사에 비례하므로

$$\overline{-u'' + c''} = K \frac{\partial C}{\partial x} \quad (31)$$

이 된다. 이 때 K는 종분산계수(longitudinal dispersion coefficient)이다. 난류 상태의 등류에서는 변동성분으로 인한 확산이 난류확산에 비해 약 100배 이상 크다고 알려져 있다. 결국 1차원 분산방정식(one-dimensional dispersion equation)은 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (32)$$

2.4 비보존성 오염물질의 반응

비보존성 오염물질은 수계 내에 유입되는 다양한 오염물질의 중요한 부분을 차지하는 것으로서 BOD, 방사능 물질, 영양소, 중금속, 제초제, 제충제 등이 이에 속하며 이들이 하천에 방류되었을 경우 확산, 이송 등과 함께 화학적 반응 및 생화학적 변환을 하게되므로 이들의 복잡한 거동을 예측하기 위해서는 하천 동력학뿐만 아니라 물질의 변환과정에 대한 보다 심도 있고 완전한 인식과 이해가 요구된다(서일원과 유대영, 1994).

비보존성 물질의 질량감소를 설명할 때 가장 널리 쓰이는 식은 다음과 같다.

표 1. 분산계수 추정식

개발자	추정식	수로 조건
Elder (1959)	$K = 5.93 dU_*$	2차원 개수로
Parker (1961)	$K = 14.3 R^{3/2} \sqrt{2gS}$	개수로
Glover (1964)	$K = 500 \sim 800 dU_*$	자연하천
McQuivey와 Keefe (1974)	$K = 0.058 \frac{Ud}{S}$	자연하천
Fischer (1975)	$K = 0.011 \frac{U^2 d^2}{dU_*}$	자연하천
Liu (1977)	$K = 0.18 \left(\frac{U_*}{U}\right)^{1.5} \frac{U^2 d^2}{dU_*}$	자연하천
Magazine 등 (1988)	$\frac{K}{RU} = 75.86 \left(\frac{0.4 U}{U_*}\right)^{-1.632}$	자연하천
Iwasa 와 Aya (1991)	$\frac{K}{dU_*} = 2.0 \left(\frac{W}{d}\right)^{1.5}$	개수로와 자연하천
서일원과 정태성 (1995b)	$\frac{K}{dU_*} = 5.92 \left(\frac{W}{d}\right)^{0.62} \left(\frac{U}{U_*}\right)^{1.43}$	자연하천

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -k_r C \quad (33)$$

여기서 k_r 는 감소계수이다. 식(33)과 1차원 분산방정식 식(32)를 결합하면

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - k_r C \quad (34)$$

와 같은 비보존성 오염물질의 1차원 분산방정식을 얻을 수 있다.

3. 자연하천에서의 확산거동 해석

자연수계에 유입된 오염물질의 확산거동을 해석하기 위해서는 분산방정식에서 분산계수를 추정해야 하는 현실적인 문제가 있다. 또한 이상적인 상황을 가정하여 유도된 분산방정식은 자연하천에서의 오염물질 확산거동을 예측하는데 상당한 오차를 나타내는 경우가 있다. 이 경우 자연하천에서의 분산과정을 정확하게 설명할 수 있는 모형의 도입이 필수적이다.

3.1 하천에서의 분산계수 추정

1차원 분산방정식(식 32)에서 흐름장에 대한 지식이 있는 경우 분산계수는 오염물질의 확산거동에 큰 영향을 미친다. 1차원 분산방정식은 폭에 비해 길이가 상당히 긴 하천에 주로 적용되었고 따라서 하천에 대해 분산계수를 추정하는 연구가 여러 연구자들에 의해 이루어졌다(서일원과 정태성, 1995a). 하천에서의 분산계수의 추정은 수리학적 이론을 사용하여 수행되다가 점차로 실측자료를 이용하고 또한 추정식에 쓰이는 매개변수의 수가 늘어나는 방향으로 발전하였다. 널리 쓰이는 1차원 분산계수 추정식을 표 1에 정리하였다. 표 1에 나타

난 분산계수 추정식 중에서 수심 하폭 그리고 전단유속 자료가 존재하는 하천인 경우에는 Iwasa와 Aya 공식을 사용하는 것이 바람직하고 수심, 하폭, 전단유속, 그리고 유속자료가 있는 경우에는 Liu 공식을 사용하는 것이 바람직하다고 알려져 있다. 그러나 Liu 공식의 경우 하폭이 200m 이상의 경우에는 사용을 피하는 편이 좋다(서일원과 정태성, 1995a). 그림 4는 여러 중분산계수추정식에 의한 계산치와 중분산계수의 현장관측치를 비교도시한 것이다.

실측자료로부터 분산계수를 결정하는 방법은 모멘트 방법(method of moment)과 추적방법(routing method)이 있다. 모멘트방법은 실측된 2개 지점 이상의 농도 분포곡선의 분산(variance)을 이용하여 비교적 용이하게 분산계수를 구할 수 있는 방법이나 자연하천의 경우에는 수로의 불규칙성 등 때문에 농도 분포곡선이 왜곡되어 적절한 분산계수를 계산하는데 어려움이 있을 수 있다. 추적방법은 실측된 농도분포곡선을 초기입력분포로 하고 이를 1차원 선형반응함수를 이용하여 회선적분(convolution integral)하기 때문에 자연하천의 확산특성을 표현하는 데 모멘트방법보다 우수성을 보인다. 그러나 두 방법 모두 1차원 확산모형에 기초하고 있기 때문에 전단류이송과 난류

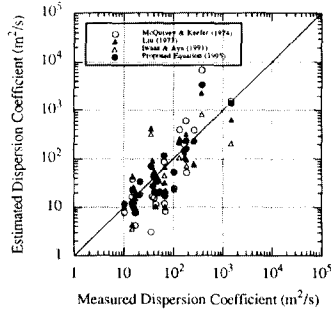


그림 4. 종분산계수 추정식에 의한 계산치와 현장관측치 비교

확산이 평형을 이룬 후부터 적용 가능하다.

3.2 자연하천에서의 확산거동

1차원 분산모형은 자연하천에서 유수단면적이 일정하고 초기 및 경계조건들이 주어지는 경우에 해석적인 해를 용이하게 얻을 수 있는 장점을 가지고 있으나 오염물질이 유입된 지점으로부터 충분한 거리가 떨어진 하류지점에서부터 적용 가능하다는 제한성과 함께 실제 자연하천에서 수집된 오염물질의 농도분포곡선의 특성을 해석하는데는 부적합하다는 지적을 받아왔다. 자연하천에서 실제적으로 측정된 오염물질의 농도-시간 분포곡선은 농도분포의 분산이 비선형적인 거동을 보이고 있으며 또한 오염물질의 농도분포곡선은 왜곡되어 나타나며 농도분포곡선의 하강부에 긴 꼬리를 가지고 있음이 관찰되었다. 이러한 현상은 하천의 하상이나 하안에 존재하는 저장대(storage zone)가 오염물질의 일부분을 일시 저장하였다가 오염물질의 주체가 관측지점을 통과한 후에 서서히 분류대(flow zone)로 재방출하는 메커니즘으로 설명할 수 있다. 따라서 자연하천에서의 확산현상을 보다 적합하게 예측하기 위해서는 하천수로의 일부지역에 존재하는 저장대의 영향이 포함되어야 한다고 제안되었고 그 후 여러 연구자들에 의해 오염물질의 저장과정이 연구되었다.

자연하천에서 오염물질의 저장효과를 고려하는 경우, 분류대와 저장대 간에서 발생하는 물질의 교환량을 추가하여야 한다(그림 5. 참조). 따라서 분류대에서의 지배방정식은

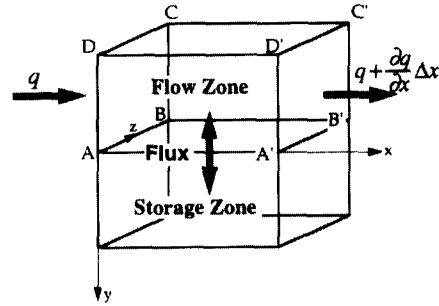


그림 5. 분류대와 저장대로 인한 저장효과 개념도

$$A_f \frac{\partial C}{\partial t} = U_f A_f \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K A_f \frac{\partial C}{\partial x} \right) + k P (S - C) \quad (35)$$

로 나타낼 수 있고 저장대에서의 지배방정식은 물질 교환항만을 고려하게 된다.

$$A_s \frac{\partial S}{\partial t} = -k P (S - C) \quad (36)$$

여기서 A_f 는 분류대의 단면적, U_f 는 분류대에서 단면 평균유속, k 는 분류대와 저장대 사이의 질량교환 계수, 그리고 P 는 횡방향 또는 연직방향의 분류대와 저장대 사이의 유효면, C 는 분류대에서의 오염물질의 농도, S 는 저장대에서의 오염물질 농도, A_s 는 분류의 평균 흐름과 수직인 방향의 저장대 단면적이다.

Seo와 Maxwell(1992), 서일원과 유대영(1995)은 갈수기 하천의 수리학적 특성 및 저장효과를 고려한 오염물질의 확산 및 이동거동의 예측을 위해서 수치해석적인 모의와 물리적 모형실험을 수행했다. 이들은 종래에 널리 사용해 왔던 1차원 분산모형이 하상 및 하안에 다양한 불규칙성이 존재하는 자연하천에서의 확산메커니즘을 서술하는데 부적합함을 보여주었으며 웅덩이-급여울 연속구조(pool-ripple sequences) 등에 의한 하상 및 하안의 불규칙성이 오염물질의 혼합 및 이동 특성에 미치는 영향이 매우 큼을 발견하였다. 그림 6은 기존의 1차원 분산모형을 이용하는 경우와 하천의 웅덩이-급여울 연속구조를 고려하는 모형의 계산결과를 비교도시한 것으로서 저장

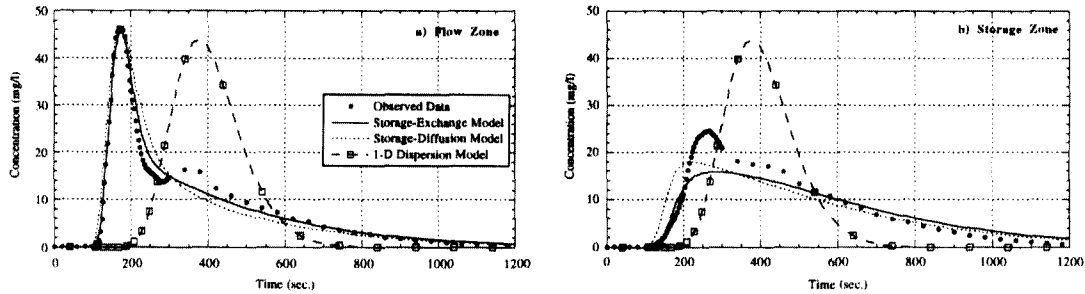


그림 6. 1차원 분산모형과 저장 - 교환모형, 저장 - 확산모형의 비교

효과를 고려한 모형이 실측 자료에 더욱 일치하고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

오염물질의 이동역학과 확산거동 해석에 대해 간략하게 알아보았다. 현재 오염물질의 거동해석을 위한 여러 수치모형이 개발되어 학계 및 실무에서 널리 사용되고 있으나, 배경이 되는 이론을 이해하고 있어야만 모형의 적용범위와 한계를 정확하게 알 수 있으며

로 오염물질의 이동역학에 대한 지식을 갖고 있는 것이 꼭 필요하다고 판단된다.

지금까지 오염물질의 이동역학과 확산거동 해석의 발달과정의 추세는 물리학과 수리학의 기초이론에서 출발하여 점차로 많은 현장자료와 실험을 통해서 기존의 이론을 보완, 개선하는 방향으로 발달해왔다. 국내의 연구자들도 이러한 점을 기억하여 실험 및 현장 자료의 해석으로부터 기존이론의 미진한 점을 개선시키려는 노력을 경주하여야 할 것으로 사료된다.

〈참고문헌〉

- 서일원, 유대영. (1994) "자연하천에서 비보존성 오염물질의 이동 및 변환 모의: 저장-변환 모형," 대한토목학회논문집, 제14권, 제4호, pp. 867-874.
- 서일원, 유대영. (1995) "자연하천에서 오염물질의 확산 및 저장에 관한 연구," 한국수자원학회지, 제28권, 제6호, pp. 107-118.
- 서일원, 정태성. (1995a) "중분산계수에 관한 연구: I. 기존 중분산계수 추정식 비교," 한국수자원학회지, 제28권, 제3호, pp. 205-216.
- 서일원, 정태성. (1995b) "중분산계수에 관한 연구: II. 새로운 중분산계수 추정식 개발," 한국수자원학회지, 제28권, 제4호, pp. 195-204.
- Boss International. (1993). BOSS FASTTABS : Users manual.
- Brown, L.C., and Barnwell, T.O. (1987). The enhanced stream water quality models QUAL2E and QUAL2E-UNCAS : Documentation and users manual. EPA, EPA/600.3-87/007.
- Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J., and Brooks, N.H. (1979). Mixing in inland and coastal waters. Academic Press, New York, N.Y.
- Seo, I.W., and Maxwell, W.H.C. (1992). "Modeling low flow mixing through pools and riffles.," J. Hydraulic Engineering, Vol. 118, No. 10, pp. 1406-1423.
- Smith, D.J. (1978). Water quality for river-reservoir systems. HEC.
- Taylor, G.I. (1954). "The dispersion of matter in turbulence flow through a pipe.," Proceedings Royal Society of London, Series A, Vol. 223, pp. 446-468