

< 논 문 >

이산화 기법에 의한 연속계의 동적 응답해석에 관한 연구

A Study on the Dynamic Analysis of the Continuous System by Digital Modeling

이 용 관* · 김 인 수** · 홍 성 우** · 췌 처 린***

Yong-Kwan Lee, In-Soo Kim, Seong-Wook Hong and S.L. Tchetchourine

(1996년 10월 17일 접수 ; 1996년 12월 30일 심사완료)

Key Words : Digital Modeling(이산 모델링), Bilinear Method(쌍일차 근사법), Continuous System(연속계), Laplace Transform(라플라스 변환), Z-Transform(Z 변환)

ABSTRACT

This paper presents a digital modeling technique of the distributed system. The basic idea of the proposed technique is to discretize a continuous system with respect to the spatial coordinates using bilinear method. The response of the discretized system is analyzed by Laplace transform and z-transform. The computational results in torsional shaft and Timoshenko beam using the proposed technique are compared with the exact solutions and the results of finite element method.

1. 서 론

무한 자유도를 갖는 연속계의 응답특성은 편미분 방정식으로 기술되며, 단순경계조건하의 제한된 연속계에 한하여 계의 응답특성이 엄밀해(exact solution)로 표현될 수 있다. 그러나 형상 및 경계조건이 복잡한 대부분의 연속계의 경우에는 엄밀해를 구하는 것이 용이하지 않으며, 이같은 경우에 근사적 응답특성을 얻기 위하여 이산화 방법을 사용한다. 대표적인 이산화 방법으로 대부분의 연속계에 효율적으로 적용될 수 있는 유한요소법⁽¹⁾과 회전체 진동해석에 자주 이용되는 전달행렬법⁽²⁾ 등이 있다. 주지하다시피, 유한요소법은 연속계를 보간함수를 이용하여 요소별로 나누고 각각의 요소에 대한 응답특성을 부분행렬로 표현하여 이를 수치적으로 해석하는 방법이다. Tchetchourine^(4,5)은 파워분수기법(power fraction method)을 이용한 연속계의 이산화 방법 및 이의 해석방법을 제안하였다.

본 연구에서 제안하는 이산 모델링 방법은 공간좌표에 대해 쌍일차 근사법(bilinear method, BLM)⁽³⁾이라고 하는 이산화 방법을 이용하여 무한자유도의 연속계를 유한자유도로 근사화하는 방법이다. 연속계의 응답해석은 시간좌표에 대해 라플라스 변환을 행하고 이산화된 공간좌표에 대해 z-변환을 수행한 후, 이를 통해 얻어진 계의 전달함수에 역 z-변환을 적용함으로써 이루어진다. 이에 따라 제안된 방법을 이용하는 경우에는, 유한요소법의 적용시와는 달리, 이산계의 주파수 응답특성이 양해(explicit solution)로 표현될 수 있다. 본 연구에서는 비틀림축과 Timoshenko보에 대해 제안된 방법을 적용하여 얻어진 응답해석결과와 엄밀해 및 유한요소법의 해석결과를 비교, 검토함으로써 제안된 방법의 수렴성 및 유용성을 확인하고자 한다.

2. 이산화기법에 의한 연속계 해석 이론

2.1 쌍일차 근사법(Bilinear Method)

시간 t 에 대한 입력 $r(t)$ 와 출력 $y(t)$ 사이의 관계가 다음과 같은 아날로그필터를 고려하자.

*대우중공업주식회사 철도차량연구소

**정회원, 금오공과대학교 정밀기계공학과

***St. Petersburg공과대학교

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) + bx(t) \quad (1)$$

샘플링(sampling) 주기를 T 라고 할경우, 필터의 출력은 다음과 같이 근사적으로 얻어진다(Fig.1 참조).

$$y(kT) = y((k-1)T) - \frac{aT}{2} [y(kT) + y((k-1)T)] + \frac{bT}{2} [x(kT) + x((k-1)T)] \quad (2)$$

식 (2)를 z 변환하고 초기조건을 무시하여, 필터의 전달함수 $G_D(z)$ 를 구해보면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G_D(z) = \frac{b}{2 \cdot \frac{z-1}{z+1} + a} \quad (3)$$

여기서, $R(z)$ 와 $Y(z)$ 는 각각 $r(t)$, $y(t)$ 의 z 변환이다. 식 (1), (3)로 부터 미분연산자는 z 변환시에 다음의 관계를 이용하여 처리하여야 함을 알 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \xrightarrow{z\text{-변환}} \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (4)$$

식 (4)의 관계를 이용하여 아날로그 필터를 이산 필터로 변환하는 방법을 쌍일차근사법⁽³⁾이라 한다.

2.2 공간좌표에 대한 쌍일차 근사법 및 연속계 해석
 다음과 같이 편미분방정식으로 표현되는 연속계를 고려하자.

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m R_{ij} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial t^j} v(x, t) = 0 \quad (5)$$

여기서 $v(x, t)$ 는 공간좌표 x 와 시간 t 에 관련된 응답변수이고, R_{ij} 는 상수이다. x 에 대한 l 차 미분 방정식을 l 개의 1차 미분 방정식으로 분리하면 다음과 같다.

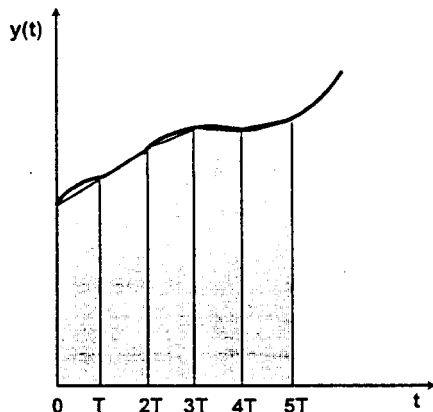


Fig. 1 Approximation by bilinear method

$$\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m Q_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^j}{\partial t^j} w_i(x, t) + \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m \tilde{Q}_{ij}^k \frac{\partial^j}{\partial t^j} w_i(x, t) = 0, \quad k=1, 2, \dots, l \quad (6)$$

여기서, Q_{ij}^k , \tilde{Q}_{ij}^k 은 미분방정식을 분리하는 과정에서 변동된 상수이다. 윗식을 시간 t 에 대해 라플라스 변환하면, 다음과 같이 정리된다.

$$\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m Q_{ij}^k q s^j w_i(x, s) + \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m \tilde{Q}_{ij}^k s^j w_i(x, s) = 0, \quad k=1, 2, \dots, l \quad (7)$$

여기서 $q = \frac{\partial}{\partial x}$ 는 공간좌표에 대한 미분 연산자이고, s 는 시간에 대한 라플라스 변수이다. 식 (7)을 공간좌표 x 에 대해 z 변환하는 과정에서, 앞절에서 언급된 쌍일차 근사법을 q 에 대해 다음과 같이 도입하기로 하자.

$$q \xrightarrow{z\text{-변환}} \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1} \quad (8)$$

여기서 h 는 공간의 이산화 간격이다. 식 (8)을 이용하면, 식 (7)은 다음과 같이 z 변환된 형태로 정리된다.

$$\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m Q_{ij}^k q(z) s^j W_i(z, s) + \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m \tilde{Q}_{ij}^k s^j W_i(z, s) = 0, \quad k=1, 2, \dots, l \quad (9)$$

$W_i(z, s)$ 는 $w_i(x, s)$ 를 z 변환한 것이다. 식 (9)는 다음의 이산화된 차분 방정식(difference equation)으로 정리될 수 있다.

$$\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m P_{ij}^k s^j w_i(n+1, s) + \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m \tilde{P}_{ij}^k s^j w_i(n, s) = 0, \quad k=1, 2, \dots, l, \quad n=0, 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

n 은 이산구간 번호, N 은 이산구간의 수, $w_i(n, s)$ 는 n 번째 이산화 구간에서의 $w_i(x, s)|_{x=nh}$, P_{ij}^k , \tilde{P}_{ij}^k 는 차분방정식으로의 치환 과정에서 변경된 상수항들을 표시한다. 지금까지의 과정은 계의 특성을 표현하는 편미분 방정식을 z 변환의 성질을 이용하여 차분방정식으로 유도하는 과정을 보인 것이다. 한편 z 변환의 이동(shifting) 정리⁽³⁾는 다음과 같다.

$$Z[w_i(n+1, s)] = z[W_i(z, s) - w_i(0, s)] \quad (11)$$

$Z[.]$ 는 z 변환을 의미한다. 이동정리를 식 (11)에 적용하면, 다음과 같이 경계조건($w_i(0, s)$)을 포함하는 이산화된 계의 z 변환식을 얻게 된다.

$$\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m P_{ij}^k s^j z [W_i(z, s) - w_i(0, s)] + \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m \tilde{P}_{ij}^k s^j W_i(z, s) = 0, \quad k=1, 2, \dots, l \quad (12)$$

윗식을 $W_i(z, s)$ 에 대해서 정리하고, 역 z변환을 수행하면 다음의 보조 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m \Gamma_{ij}^k s^j w_i(n, s) + \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m \tilde{\Gamma}_{ij}^k s^j w_i(0, s) = 0, \quad k=1, 2, \dots, l, \quad n=0, 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

여기서 $\Gamma_{ij}^k, \tilde{\Gamma}_{ij}^k$ 는 역 z변환과정에서 발생한 $P_{ij}^k, \tilde{P}_{ij}^k$ 와 관련된 상수이다. 식 (13)에 $w_i(0, s)$ 로 표현된 경계조건 및 $s=j\omega$ (ω : 주파수) 관계식을 대입하면, 임의의 위치에서의 이산계의 주파수 응답특성 $w_i(n, \omega)$ 을 결정할 수 있다. 식 (13)에서 알 수 있는 바와 같이, 보조 방정식에는 끝점에서의 경계조건만이 포함되어 있으며 이는 연속계의 l 차 편미분방정식을 l 개의 1차 편미분방정식으로 분리해 놓은 결과이다. 만일 l 차 편미분방정식을 분리하지 않고 직접 상기의 방법을 적용할 경우에는 이동정리로 인하여, l 개의 위치에서의 계의 응답정보가 필요할 것이다.

이상의 연속계의 응답해석을 위해 제안된 방법의 적용절차를 정리하면 다음과 같다.

- (1) 연속계의 운동방정식을 1차 연립미분방정식으로 분리한 후, 시간에 대해 라플라스 변환공간좌표에 대해 쌍일차 근사법을 적용하여 차분방정식을 얻는다.
- (2) 계의 경계조건이 포함되도록, 차분방정식을 이동정리에 의해 z변환한다.
- (3) 역 z변환을 수행하여 관심위치에서의 계의 응답특성을 얻는다.

3. 수치해석 및 토의

3.1 비틀림 축

균일한 축의 비틀림 운동은 다음의 방정식으로 표현된다.

$$\tilde{J} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \tilde{C} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (14)$$

$\tilde{J}, \tilde{b}, \tilde{C}$ 는 각각 단위 길이당 관성모멘트, 감쇠 및 강성 계수이고, φ 는 비틀림각이다. 식 (14)는 공간좌표 x 에 대한 2개의 1차 편미분방정식으로 분리될 수 있다.

$$\tilde{J} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\partial m}{\partial x} = - qm$$

$$m = - \tilde{C} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \tilde{C} q \varphi \quad (15)$$

여기서 m 은 비틀림 모멘트이다. 식 (15)는, 시간 t 에 관해 라플라스 변환하고 x 에 관한 미분연산자 q

에 쌍일차근사법[식 (8) 참조]을 적용하여 정리하면, 다음과 같은 차분방정식으로 표현된다.

$$(Js^2 + bs)[(\varphi(n+1, s) - \varphi(n, s))] = 2[m(n, s) - m(n+1, s)]$$

$$m(n+1, s) + m(n, s) = 2C[\varphi(n, s) - \varphi(n+1, s)],$$

$$n=0, 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

$J = \tilde{J}h, b = \tilde{b}h, C = \tilde{C}/h$ 이며 h 는 이산화 간격이다. 시간에 관한 라플라스 변환과 이동정리를 이용하여 z변환하면 식 (16)은 다음과 같은 연립방정식으로 표현된다.

$$A(z)U(z) = B(z) \quad (17)$$

여기서, 각 행렬과 벡터요소는 다음과 같다.

$$A(z) = \begin{bmatrix} z-1 & \frac{Js^2 + bs}{2}(z+1) \\ \frac{z+1}{2} & C(z-1) \end{bmatrix},$$

$$B(z) = \begin{bmatrix} m(0, s)z + \frac{Js^2 + bs}{2}\varphi(0, s)z \\ \frac{m(0, s)}{2}z + C\varphi(0, s)z \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$U(z) = [M(z, s) \quad \Phi(z, s)]^T$$

$m(0, s)$ 와 $\varphi(0, s)$ 는 비틀림축의 경계 조건이며, $M(z, s)$ 와 $\Phi(z, s)$ 는 $m(n, s)$ 와 $\varphi(n, s)$ 의 z변환형이다. 식 (18)의 연립해는 다음과 같이 정리된다.

$$M(z, s) = [2C\varphi(0, s)(1 - \cosh \lambda)z + \frac{m(0, s)z(z+1)}{2}(1 - \cosh \lambda) - \frac{m(0, s)}{\sigma}z(z-1)]/[z^2 - 2z\cosh \lambda + 1] \quad (19, a)$$

$$\Phi(z, s) = [\{\frac{1}{2}(1 - \cosh \lambda)\varphi(0, s) + \frac{m(0, s)}{2C\sigma}\}z(z+1) - \{\frac{\varphi(0, s)}{\sigma} + \frac{m(0, s)}{2C\sigma}\}z(z-1)]/[z^2 - 2z\cosh \lambda + 1] \quad (19, b)$$

여기서, $\cosh \lambda = \frac{Js^2 + bs + 4C}{-Js^2 - bs + 4C}$ 로서, 역 z변환을 용이하게 하기 위해 정의된 상수이고, $\sigma = \frac{Js^2 + bs - 4C}{4C}$ 이다. 식 (19)를 역 z변환하면 다음과 같다.

$$m(n, s) = [\frac{1}{2}(1 - \cosh \lambda) - \frac{1}{\sigma}]m(0, s) \cosh \lambda n + [\{\frac{1}{2}(1 - \cosh \lambda) - \frac{1}{\sigma}\}m(0, s) \cosh \lambda$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left\{ 2C\varphi(0, s) + \frac{m(0, s)}{2} \right\} (1 - \cosh \lambda) \\
 &+ \frac{m(0, s)}{\sigma} \left] \frac{\sinh \lambda n}{\sinh \lambda} \quad (20, a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(n, s) = & \left[\frac{1}{2}(1 - \cosh \lambda) - \frac{1}{\sigma} \right] \varphi(0, s) \cosh \lambda n \\
 & + \left[(1 - \cosh \lambda) \left\{ \frac{1}{2}(1 + \cosh \lambda) + \frac{1}{\sigma} \right\} \varphi(0, s) \right. \\
 & \left. + \frac{m(0, s)}{C\sigma} \right] \frac{\sinh \lambda n}{\sinh \lambda} \quad (20, b)
 \end{aligned}$$

식 (20)에 경계조건을 적용하면 비틀림축의 주파수 응답특성을 구할 수 있다. Fig. 2에 보여진, 한쪽 단에는 원반(disk)이 달려 있고, 다른쪽 단에는 비틀림 모멘트가 작용되고 있는 자유(free-free) 경계 조건하의 비틀림축의 응답을 구하는 경우를 생각하자. 경계조건을 정리하면 $m(0, s) = I_0 s^2 \varphi(0, s)$, $m(N, s) = M_0$ 이므로 $n=0$ 에서의 비틀림각은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi(0, s)}{M_0} = & 1 / \left[I_0 s^2 \gamma \cosh \lambda N + \left\{ I_0 s^2 (\gamma \cosh \lambda \right. \right. \\
 & \left. \left. + \gamma + \frac{2}{\sigma}) + 2C(1 - \cosh \lambda) \right\} \frac{\sinh \lambda N}{\sinh \lambda} \right] \quad (21)
 \end{aligned}$$

여기서 $\gamma = \frac{1 - \cosh \lambda}{2} - \frac{1}{\sigma}$ 이다. Table 1은 수치해석을 위하여 사용된 비틀림축에 관한 입력자료를 보인 것이다. Fig. 3은 비틀림축의 응답에 관한 엄밀해, 유한요소결과⁽⁶⁾ 및 식 (21)에 $s = j\omega$ 관계식을 대입하여 얻어진 해석결과를 보인 것이다. 이산요소의

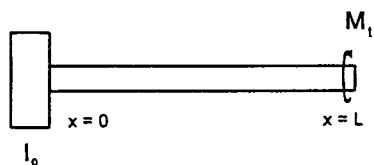


Fig. 2 Schematic diagram of free-free torsional shaft

Table 1 Simulation Data for the Torsional Shaft

축		원 반(disk)	
길이	1.8m	질량	1.345kg
직경	1cm	직경	0.147m
밀도	8000kg/m ³	밀도	8000kg/m ³
전단강성계수	80GN/m ²	두께	1cm
		면적관성모멘트	0.00363kg.m ²

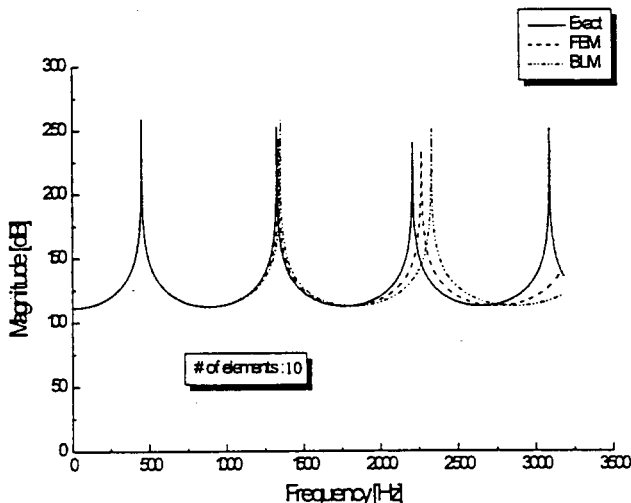
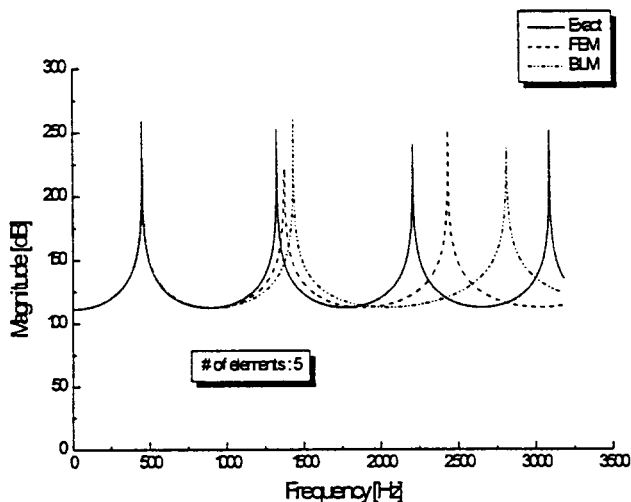


Fig. 3 Dynamic response of free-free torsional shaft

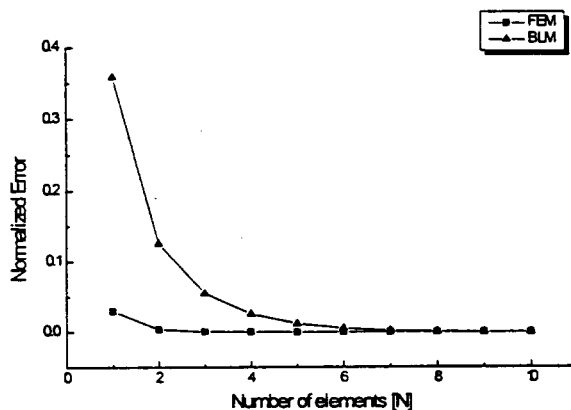


Fig. 4 Normalized errors according to number of elements

갯수는 5개, 10개 두가지 경우로 하였다. Fig. 4는 이산화요소를 증가시키면서 유한요소법 및 제안된 해석방법에 의한 결과와 엄밀해 사이의 진폭을 기준으로 한 정규오차(normalized error)를 보인 것이다. Fig. 3, Fig. 4에서 알 수 있는 바와같이, 제안된 해석방법을 사용한 경우에 그다지 많지 않은 요소의 수를 선택하여도 엄밀해에 접근된 결과를 얻을 수 있으며, 유한요소법의 결과와 유사하게 정규오차가 단조적으로 감소하고 있음을 알 수 있다. 그리고, 제안된 해석방법을 사용할 경우에는 해석결과가 양해로 표현되므로, 이산화요소의 수를 증가시켜도 유한요소법과는 달리 계산 시간 및 연산에 필요한 메모리수에 있어 추가적인 부담이 없게 된다. 따라서, 무한히 큰 이산화요소를 선택하여 제안된 해석방법을 수행하면 사실상 엄밀해를 얻을 수 있게 된다.

3.2 Timoshenko 보

회전관성과 전단변형을 고려한 Timoshenko 보의 엄밀해를 구하는 과정이 복잡한 관계로 인하여, 유한요소법을 이용해 많은 사람들에 의해서 해석⁽⁷⁻¹¹⁾되어져 왔다. 자유진동에 대한 Timoshenko 보에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (22)$$

여기서, w 는 보의 종방향 변위이고, ρ, A, G, E, k, I 는 각각 보의 밀도, 면적, 전단 강성계수(shear modulus), 영 계수(Young's modulus), 보정 계수(shape factor) 및 면적 관성모멘트(area moment of inertia)이다. 윗식에서 회전관성효과와 전단변형효과(식 (22)의 3, 4번째 항)를 무시한 보를 Euler 보, 전단변형효과(식 (22)의 k 를 포함하는 항)만을 무시한 보를 Rayleigh 보라고 한다.

제안된 방법을 이용하여 Timoshenko 보의 응답을 해석하기 위해 식 (22)를 공간좌표에 대한 4개의 일차 편미분방정식으로 분리한 후, 시간좌표에 대해 라플라스 변환을 행하고, 공간좌표에 대해서는 쌍일차 근사법을 적용하면 다음과 같은 차분방정식을 얻을 수 있다.

$$v(n+1, s) - v(n, s) = \frac{\rho A s^2 h}{2} [w(n+1, s) + w(n, s)] \quad (23. a)$$

$$m(n+1, s) - m(n, s) - \frac{h}{2} [v(n+1, s) + v(n, s)] = -\frac{\rho I s^2 h}{2} [\phi(n+1, s) + \phi(n, s)] \quad (23. b)$$

$$v(n+1, s) + v(n, s) = kAG[\phi(n+1, s) + \phi(n, s)] - \frac{2}{h} kAG[w(n+1, s) - w(n, s)] \quad (23. c)$$

$$m(n+1, s) + m(n, s) = EI \frac{2}{h} [\phi(n+1, s) - \phi(n, s)], \quad n=0, 1, 2, \dots, N \quad (23. b)$$

m, v, ϕ 는 각각 굽힘 모멘트, 전단력, 굽힘각이다. 식 (23)을 z 변환하여 정리하면 다음의 연립방정식이 얻어진다.

$$A(z) U(z) = B(z) \quad (24)$$

윗식의 행렬 및 벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$A(z) = \begin{bmatrix} (z+1) - a_6(z-1) & 0 & 0 & 0 \\ (z-1) - a_3(z+1) - a_2(z+1) & 0 & & \\ 0 & -a_5(z+1) & (z+1) & a_4(z-1) \\ 0 & 0 & (z-1) & a_1(z+1) \end{bmatrix}, \quad B(z) = \begin{bmatrix} \beta_1 z \\ \beta_2 z \\ \beta_3 z \\ \beta_4 z \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$U(z) = [M(z, s) \quad \phi(z, s) \quad V(z, s) \quad W(z, s)]^T$$

여기서 $M(z, s), \phi(z, s), V(z, s), W(z, s)$ 는 각각 $m(z, s), \phi(z, s), v(z, s), w(z, s)$ 변환형이며, 행렬 및 벡터 요소들의 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{h}{2} \rho A s^2, & a_2 &= \frac{h}{2}, & a_3 &= \frac{h}{2} \rho I s^2, & a_4 &= \frac{2}{h} kAG, \\ a_5 &= kAG, & a_6 &= \frac{2}{h} EI \\ \beta_1 &= m(0, s) - a_6 \phi(0, s), \\ \beta_2 &= m(0, s) - a_2 v(0, s) - a_3 \phi(0, s), \\ \beta_3 &= v(0, s) + a_4 w(0, s) - a_5 \phi(0, s), \\ \beta_4 &= v(0, s) + a_1 w(0, s) \end{aligned} \quad (26. a)$$

$m(0, s), \phi(0, s), v(0, s), w(0, s)$ 는 이동정리에 의해 도입된 경계조건이다. 본연구에서는 Fig. 5에 보인 바와 같이, 한쪽단은 고정되고 다른 자유끝단에

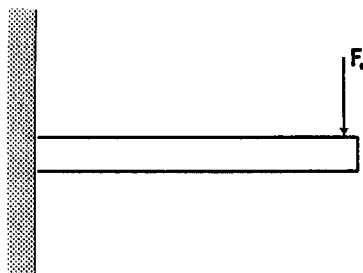


Fig. 5 Schematic diagram of fixed-free beam

는 하중 F_0 가 작용하고 있는 보의 응답특성을 살펴 보기로 한다. 따라서 경계조건은 다음과 같이 정리 된다.

$$\begin{aligned} w(0, s) &= \phi(0, s) = m(N, s) = 0, \\ v(N, s) &= F_0 \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)를 식 (25)에 대입하여 정리한 후, 역 z변환 을 수행하면 다음과 같은 보의 응답함수를 얻을 수 있다.

$$\frac{w(n, s)}{F_0} = \frac{b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31}}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{22}}, \quad n=0, 1, 2, \dots, N \quad (28)$$

식 (28)의 계수들은 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} b_{11} &= (m_1 + e_4 - e_1) \cosh \lambda n + [(m_1 + e_4 - e_1) \cosh \lambda \\ &+ m_1 e_4 + 1 - e_2] \frac{\sinh \lambda n}{\sinh \lambda} \\ &+ (e_1 - e_4 - m_2) \cosh \delta + [(e_1 - e_4 - m_2) \cosh \delta \\ &+ (e_2 - 1 - m_2 e_4)] \frac{\sinh \delta n}{\sinh \delta}, \end{aligned} \quad (29. a)$$

$$b_{12} = (m_1 + 2) e_3 \frac{\sinh \lambda n}{\sinh \lambda} - (m_2 + 2) e_3 \frac{\sinh \delta n}{\sinh \delta},$$

$$b_{21} = (m_1 f_4 - 2f_2) \frac{\sinh \lambda n}{\sinh \lambda} + (2 - m_2) f_2 \frac{\sinh \delta n}{\sinh \delta},$$

$$\begin{aligned} b_{22} &= (m_1 + f_4 - f_1) \cosh \lambda n + [(m_1 + f_4 - f_1) \cosh \lambda \\ &+ (m_1 f_4 + 1 - f_3)] \frac{\sinh \lambda n}{\sinh \lambda} \\ &+ (f_1 - f_4 - m_2) \cosh \delta + [(f_1 - f_4 - m_2) \cosh \delta + (f_3 \\ &- 1 - m_2 f_4)] \frac{\sinh \delta n}{\sinh \delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{31} &= (g_4 - g_1) \cosh \lambda n + [(g_4 - g_1) \cosh \lambda - m_1 g_1] \\ &\frac{\sinh \lambda n}{\sinh \lambda} + 2g_1 \cosh \delta + [2g_1 \cosh \delta \\ &+ (m_1 + 2) g_3] \frac{\sinh \delta n}{\sinh \delta}, \end{aligned}$$

$$b_{32} = (m_1 g_4 - g_2) \frac{\sinh \lambda n}{\sinh \lambda} + (g_2 - m_2 g_4) \frac{\sinh \delta n}{\sinh \delta}$$

$$e_1 = \frac{1}{\Pi} (3a_1 a_2 a_5 + a_3 a_4 + 3a_1 a_3 - a_1 a_6 - 3a_4 a_6), \quad (29. b)$$

$$e_2 = \frac{1}{\Pi} (3a_1 a_2 a_5 + a_3 a_4 + 3a_1 a_3 + a_1 a_6 + a_4 a_6),$$

$$e_3 = \frac{1}{\Pi} (2a_2 a_4 a_6),$$

$$e_4 = \frac{1}{\Pi} (a_1 a_2 a_5 - a_3 a_4 + a_1 a_3 + a_1 a_6 - a_4 a_6),$$

$$f_1 = \frac{1}{\Pi} (3a_1 a_2 a_5 - a_3 a_4 + 3a_1 a_3 + a_1 a_6 - 3a_4 a_6),$$

$$f_2 = \frac{1}{\Pi} (-2a_1 a_5),$$

$$f_3 = \frac{1}{\Pi} (3a_1 a_2 a_5 + a_3 a_4 + 3a_1 a_3 + a_1 a_6 + 3a_4 a_6),$$

$$f_4 = \frac{1}{\Pi} (a_1 a_2 a_5 + a_3 a_4 + a_1 a_3 - a_1 a_6 - a_4 a_6),$$

$$g_1 = \frac{2}{\Pi} (a_5), \quad g_2 = \frac{4}{\Pi} (a_3 + a_2 a_5 + a_6), \quad g_3 = \frac{2}{\Pi} (a_5 a_6),$$

$$g_4 = \frac{2}{\Pi} (a_3 + a_2 a_5 - a_6)$$

$$m_1 = 2A_1 + \sqrt{4A_1^2 - 6A_2 + 2} = -2 \cosh \lambda, \quad (29. c)$$

$$m_2 = 2A_1 - \sqrt{4A_1^2 - 6A_2 + 2} = -2 \cosh \delta$$

$$A_1 = \frac{1}{\Pi} (a_1 a_2 a_5 + a_1 a_3 - a_4 a_6), \quad (29. d)$$

$$A_2 = \frac{1}{\Pi} (a_1 a_2 a_5 + a_1 a_3 + \frac{1}{3} (a_3 a_4 + a_1 a_6) + a_4 a_6),$$

$$\Pi = a_1 a_2 a_5 - a_3 a_4 + a_1 a_3 - a_1 a_6 + a_4 a_6,$$

Table 2는 보에 대한 수치해석을 위해 입력된 자료를 보인 것이다. Fig. 6은 제안된 방법을 이용하여 얻어진, 자유단에서의 응답함수를 Timoshenko 보, Rayleigh 보, Euler 보에 대해 도시한 것이다. Fig. 7은 보의 두께를 Fig. 6의 경우에 비해 1/5로 줄였을

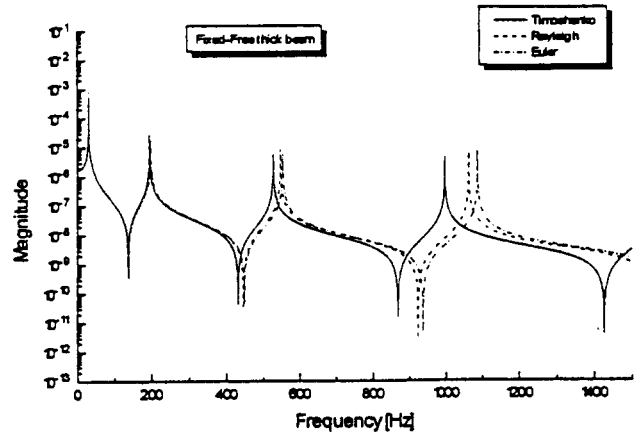


Fig. 6 Dynamic response of fixed-free thick beam

Table 2 Simulation Data for the Beam

Timoshenko 보		
길	이	1.6m
두	께	10cm
	폭	5cm
영계수 (Young's modulus)		200GN/m ²
포아송비 (Poisson's ratio)		0.3
보정계수 (shape factor)		5/6
밀	도	8000kg/m ³

경우에 대한 보의 응답함수를 도기한 것이다. Fig. 8은 Fig. 7의 경우와 같은 얇은 보에 대해 경계조건을 양단자유(free-free)로 변경하였을 때의 자유단에서의 보의 응답함수를 도기한 것이며, Table 3은 유한요소법에서 구한 Rayleigh보의 고유진동수와 제안된

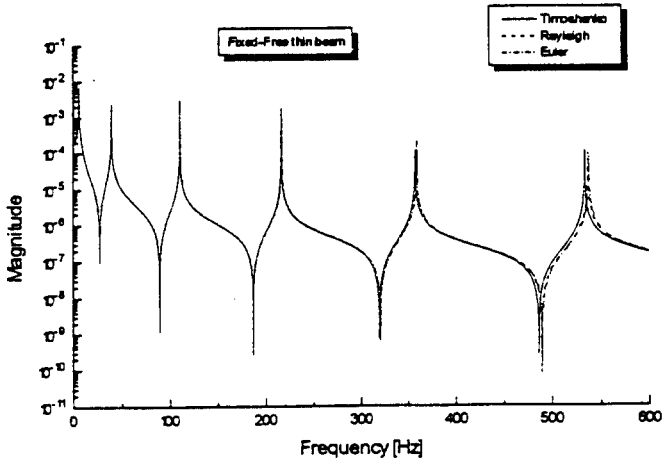


Fig. 7 Dynamic response of fixed-free thin beam

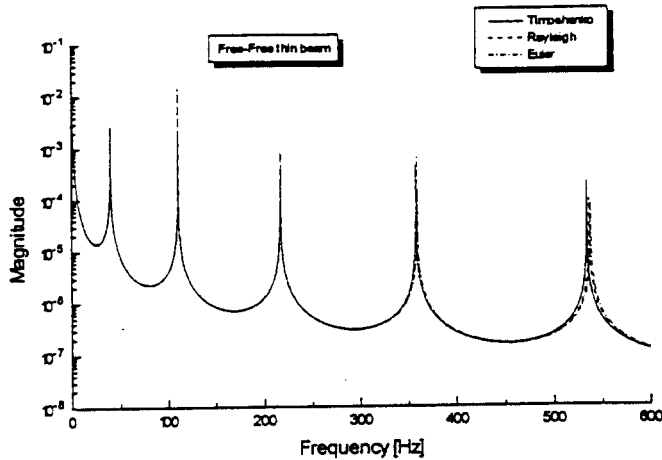


Fig. 8 Dynamic response of free-free thin beam

Table 3 The Natural Frequencies Analyzed by FEM and the Proposed

모드 (Hz.)	FEM		BLM	
	Rayleigh	Euler	Rayleigh	Timoshenko
1차	40.15	40.15	40.15	40.15
2차	110.51	110.70	110.70	110.50
3차	218.50	217.50	217.20	216.75
4차	359.83	359.85	359.25	358.05

방법에 의해 얻어진 Timoshenko 보, Rayleigh 보, Euler 보에 대한 고유진동수를 보인 것으로서 유한요소법의 해석결과와 제안된 방법에 의한 해석결과가 비교적 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 6 ~ Fig. 8로부터 Timoshenko 보가 Rayleigh 보와 Euler 보의 경우에 비해 고유진동수가 낮으며, 이같은 현상은 보의 두께가 두꺼워져 질수록 두드러지게 됨을 알 수 있다. 상기 현상은 Timoshenko 보의 응답해석시 통상 나타나는 현상으로서, 보의 회전관성 및 전단변형효과를 고려함으로 인하여 강성이 상대적으로 낮아져서 이 결과 고유진동수도 낮아진 것이다.

4. 결 론

본 연구에서는 공간좌표에 대한 쌍일차 근사법을 통해 연속계를 이산화하고, 일련의 변환과정을 통해 이산화된 계를 해석하는 방법을 제안하였다. 비틀림 축 및 보의 응답해석에 제안된 방법을 적용하여 본 결과, 다음의 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 이산화된 연속계의 주파수 응답특성이 양해로 표현된다.
- (2) 제안된 방법의 수렴특성은 유한요소법의 경우와 유사하여 이산요소수의 증가에 따라 해석오차가 단조적으로 감소한다.
- (3) 제안된 방법에 의해 연속계를 해석할 경우에, 연산시간 및 소요메모리수가 설정된 이산요소수와 무관하게 일정하므로, 무한히 많은 요소수를 취하여 제안된 방법을 적용하면 실질적으로 엄밀해와 동일한 결과를 얻을 수 있다.
- (4) 제안된 방법의 적용범위 확대를 위해서는, 향후 다차원 진동계해석에 관한 추가적 연구가 필요할 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

- (1) L. Meirovitch, 1980, Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff & Noordhoff Company.
- (2) L. Meirovitch, 1967, Analytical Method in Vibrations, The Macmillan Company,
- (3) K. Ogata, 1987, Discrete-Time Control Systems, Prentice Hall.
- (4) S. L. Tchetourine, Z. Z. Liu, 1994, Digital-Analog Models for Dynamic Control Systems, St. Petersburg Computerized Publishing System.

- (5) S. L. Tchetourine, 1994, Lecture Note on Parametric Resonance and Digital Modeling, 금오공과대학교.
- (6) 이용관, 1996, "A New Modeling Technique for Distributed Parameter Systems-Digital Modeling", 금오공과대학교 석사학위 논문.
- (7) F. B. Hildebrand, 1976, Advanced Calculus for Applications, MIT Press Company.
- (8) R. Davis, R. D. Henshell and G. B. Warburton, 1972, "A Timoshenko Beam Element," Journal of Sound and Vibration, Vol. 22, pp. 475~487.
- (9) D. L. Thomas, J. M. Wilson and R. R. Wilson, 1973, "Timoshenko Beam Finite Elements," Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, pp. 315~330.
- (10) J. Thomas and B. A. Abbas, 1975, "Finite Element Model for Dynamic Analysis of Timoshenko Beam," Journal of Sound and Vibration, Vol. 41, pp. 291~299.
- (11) R. S. Gupta and S. S. Rao, 1978, "Finite Element Eigenvalue Analysis of Tapered and Twisted Timoshenko Beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 56, pp. 187~200.