

< 논 문 >

# 분포형 압전필름 감지기와 압전세라믹 작동기를 이용한 보의 진동 제어

Vibration Control of Beam using Distributed PVDF Sensor  
and PZT Actuator

유 정 규\* · 박 근 영\*\* · 김 승 조\*\*\*

Jung-Kyu Ryou, Keun-Young Park and Seung-Jo Kim

(1997년 5월 22일 접수 ; 1997년 8월 22일 심사완료)

**Key Words** : Distributed Transducer (분포형 변환기), Spill-over (스필오버), Vibration Control (진동 제어)

## ABSTRACT

Distributed piezoelectric sensor and actuator have been designed for efficient vibration control of a cantilevered beam. Both PZT and PVDF have been used in this study, the former as an actuator and the latter as a sensor for the integrated structure. We have optimized the position and the size of the PZT actuator and the electrode shape of the PVDF sensor. Finite element method is used to model the structure that includes the PZT actuator and the PVDF sensor. The PZT actuator is optimized by deciding on or off of each PZT segment. Considering both of the host structure and the optimized actuators, we have designed the active electrode width of the PVDF sensor along the span of the beam. Actuator design is based on the criterion of minimizing the system energy in the control modes under a given initial condition. Modal control forces for the residual(uncontrolled) modes have been minimized during the sensor design to minimize the observation spill-over. Genetic algorithm and sequential quadratic programming technique have been utilized as an optimization scheme. Discrete LQG control law has been applied to the integrated structure for real time vibration control. Performance of the sensor, the actuator, and the integrated smart structure has been demonstrated by experiments.

## 1. 서 론

최근 들어 압전재료가 능동 진동 제어의 감지기, 작동기로 흔히 쓰이고 있다. 이 중 압전세라믹

(PZT)과 압전필름(PVDF)의 사용이 가장 많다. PZT는 PVDF에 비하여 큰 작동력을 낼 수 있는 장점으로 인하여 상대적으로 더 많은 연구가 행해졌다. PZT 감지기, 작동기에 대한 연구는 주로 대상 구조물의 효율적인 진동 제어를 위한 PZT의 위치나 크기 선정<sup>(1)</sup>에 대하여 이루어졌다. 이에 비하여 PVDF에 대한 연구는 전극 형상을 이용하여 원하는 성능을 가지는 감지기, 작동기를 설계하는 데에 관심이 집중되어왔다. Lee는 1차원 구조물에서 전극

\* 서울대학교 항공우주공학과

\*\* 정희원, 현대자동차(주) 승용 1 연구소

\*\*\* 정희원, 서울대학교 공과대학 항공우주공학과

의 폭을 이용하여 특정 모드만을 감지, 작동할 수 있는 모달감지기, 작동기(modal sensor, actuator)<sup>(2)</sup>를 제안하였다. 이 모달감지기, 작동기는 Bailey등이 제안한 분포형 감지기, 작동기<sup>(3)</sup>의 일종이라고 할 수 있다.

본 연구는 작동기로서는 PZT를 사용하고 감지기로서는 PVDF를 사용하여 다수의 모드를 제어하는 것에 목적을 두고 있다. 작동기 설계는 genetic algorithm(4)을 이용하여 원하는 모드들에 대하여 제어 효과를 최대화하는 방향으로 이루어졌다. 한편 감지기 설계의 경우 복수의 제어 대상 모드를 감지하면서 제어모드에 인접한 비제어 모드들에 스펀오버(5)가 일어나지 않도록 하였다. 압전감지기, 작동기를 포함한 구조물을 유한요소법을 사용하여 모델링하고, 최적화 기법을 사용하여 감지기, 작동기를 설계하였다. 설계된 감지기, 작동기를 시편으로 제작하여 실험을 통하여 성능을 확인하였다.

## 2. 유한 요소 모델

압전감지기, 작동기를 포함하는 구조물을 유한요소법을 사용하여 모델링 하였다. 유한요소 정식화에 관한 상세 내용은 부록에 수록하였다. 각 절점에서 수직 방향 변위와 회전각 및 수평 방향 변위를 자유도로 고려하였고, 전단 변형이 없는 Euler Beam으로 가정하였다. 수평 방향 변위는 PZT를 한쪽 면에만 부착하였을 경우와 같이 중립면에 대하여 비대칭인 구조를 모델링하기 위하여 도입하였다.

PZT 작동기에 의한 작동력은 Fig. 1과 같이 보 구조물의 각 유한 요소에 분포된 PZT 조각의 on, off에 의하여 결정된다. 각 조각의 on, off를 결정하여 압전 작동기를 설계하며, 이 때 on인 영역에는 PZT를 부착하고, off인 영역에는 PZT를 부착하지 않는다. PZT 작동기에 의한 작동력은 다음과 같다.

$$F_{PZT} = \sum_i S_{PZT}(i) F_{PZT}^{(i)} \quad (1)$$

여기에서

$$S_{PZT}(i) = \begin{cases} 1, & \text{if the PZT segment is on.} \\ 0, & \text{if the PZT segment is off.} \end{cases}$$

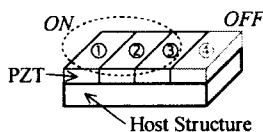


Fig. 1 Beam element with PZT segments

예를 들어 Fig. 1에서와 같이 PZT조각 ①,②,③은 on으로, ④는 off로 결정되면, 압전작동기는 영역 ①,②,③에만 부착되고, 이 작동기에 의한 작동력은

$$F_{PZT} = 1 \times (F_{PZT}^{(1)} + F_{PZT}^{(2)} + F_{PZT}^{(3)}) + 0 \times F_{PZT}^{(4)} \quad (2)$$

이고 PZT조각의 분포 형상을 나타내는 벡터,  $S_{PZT}$ 가 작동기의 설계변수이다. 따라서 작동기 설계는 각 조각의 on, off를 결정하는 이산화된 문제이다.

PVDF 감지기의 형상을 유한요소 모델링하기 위하여 유효 전극의 폭을 한 개의 유한요소에 대하여 4개의 전극 폭( $S_1, S_2, S_3, S_4$ )으로 보간 한다. 전극의 폭은 보 구조물 전체의 폭인  $b$ 를 넘을 수 없고, 전극 폭이 음수인 경우는 그 부분이 반대 극성으로 극화(poling)된 경우이다. 보 구조물을  $n$ 개의 유한 요소로 모델링 하였을 경우 여기에 분포하는 PVDF 감지기의 작동력은

$$F_{PVDF} = \sum_i H_{PVDF}^{(i)} S_{PVDF}(i) \quad (3)$$

로 표현되고, 이때  $S_{PVDF}$ 는 감지기의 전극 형상을 나타내는 설계변수이다. 압전 감지기와 작동기의 대칭성<sup>(2)</sup>을 이용하면 변형  $u$ 에 의하여 이 감지기에 발생하는 전하량은 식 (4)와 같다.

$$q = F_{PVDF}^T u = (H_{PVDF} S_{PVDF})^T u \quad (4)$$

## 3. 시스템 모델

압전작동기와 감지기를 포함한 전체 시스템은 Fig. 2와 같다. 압전감지기에 생성되는 전하는 연결된 전하증폭기(charge amplifier)에 의해 감지 신호로 변환되고, 이 신호는 저역통과필터를 통하여 제어기에 입력된다. 제어기로부터 출력되는 제어 신호는 다시 저역통과필터와 전압증폭기를 거쳐 압전 작동기에 가해진다. 제어기의 입력 신호는 A/D변환기에서 이산화되고, 이산 제어 신호는 영차 홀딩(ZOH)되어 출력된다. 본 연구에서는 한 개의 감지기와 두 개의 작동기를 고려한다.

압전감지기와 작동기를 포함한 보 구조물의 운동 방정식과 전하증폭기를 통한 감지기 출력 신호는 식 (5)로 표현된다.

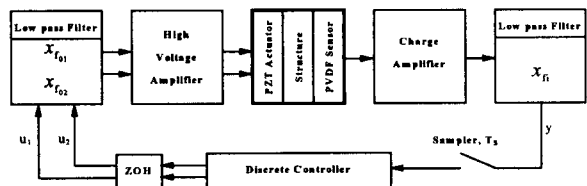


Fig. 2 Overall system construction

$$\begin{aligned} M\ddot{u} + K u &= F_{PZT} V_{PZT} \\ y_{ca} &= (1/C_a) F_{PVDF}^T u \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서  $V_{PZT}$ 는 압전작동기에 가해진 전압이고  $y_{ca}$ 는 전하 증폭기의 출력이다.  $1/C_a$ 는 전하증폭기의 이득을 나타낸다. 모달 감쇠를 가정하고,  $u = \Phi \eta$ 의 좌표 변환을 통하여 식 (5)를 모달 공간에서 표현하면 식 (6)과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} + C \dot{\eta} + A \eta &= \Phi^T F_{PZT} V_{PZT} \\ y_{ca} &= (1/C_a) F_{PVDF}^T \Phi \eta \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $\Phi^T M \Phi = I$ ,  $\Phi^T K \Phi = \Lambda = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ , ( $C = \text{diag}(2\zeta_1 \omega_1, \dots, 2\zeta_n \omega_n)$ ) 이고  $\zeta$ 는 모달감쇠 계수이다.

본 연구에서는 구조물의 진동 특성에 중요한 영향을 미치는 5개의 저차 모드를 고려하여 모드 축약(modal reduction)하였다. 제어기 설계 시에는 이들 모드 중 1차와 2차 모드를 제어모드(control mode)로서 고려하였다. 따라서 나머지 3개의 모드는 잔류모드(residual mode)가 되어 이들 모드에 의해 스피illo버(spill-over)가 발생할 수 있으며 이를 고려한 감지기 설계가 요구된다.

시스템에서 3개의 저역통과필터를 고려하였으며 이들은 모두 2차 Butterworth형이다. 식 (7)과 같은 상태변수를 사용하여 전체 시스템의 동역학적 특성을 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$z = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \dot{\eta}_1 \ \dot{\eta}_2 \ \dots \ x_{f1} \ \dot{x}_{f1} \ x_{f01} \ \dot{x}_{f01} \ x_{f02} \ \dot{x}_{f02}] \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -\Lambda & -C & 0 & K_a F(:,1) C_f & K_a F(:,2) C_f \\ B_f (1/C_a) F_{PVDF}^T \Phi & 0 & A_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_f \end{bmatrix} z \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_f & 0 \\ 0 & B_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y &= [0 \ 0 \ C_f \ 0 \ 0] z \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $F(:,1)$ 과  $F(:,2)$ 는 각각 첫번째와 두번째 작동기의 모달 작동력 벡터이다. 즉 본 연구에서 사용하는 압전 작동기의 작동력 행렬은 두개의 열 벡터로 구성되어 있으므로  $i$ -번째 작동기의 작동력

벡터를  $F_{PZT}(:, i)$ 라 하면  $F(:, i) = \Phi^T F_{PZT}(:, i)$ 이다. 또  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$ 는 저역통과 필터의 상태 공간형 특성 행렬이고,  $K_a$ 는 전압증폭기의 이득,  $u_1$ 과  $u_2$ 는 제어기로부터의 제어 출력 신호,  $y$ 는 제어기의 입력 신호이다.

#### 4. 최적화

수치해석과 실험을 위한 시편의 형상 및 사용된 물성치는 각각 Fig. 3 및 Table 1과 같다. PVDF, PZT 및 기본 구조물의 두께는 각각 254μm, 52μm, 3mm이다. 보 전체를 20개의 유한 요소로 나누고 각 요소마다 PZT 작동기의 유무를 결정한다. 따라서 PZT 작동기의 설계 변수는 20개이다. PVDF 감지기는 각각의 유한 요소를 3등분하여 그 유효 전극 폭을 결정하게 되므로 설계 변수는 203+1=61개이다.

##### 4.1 PZT 작동기 설계 및 결과

전술한 바와 같이 작동기 설계는 각 조각의 on, off를 결정하는 이산화된 문제이므로 Genetic Algorithm이 최적화 기법으로 사용되었다. 성능지수는 시스템의 각 모드 초기 에너지와 페루프 시스템의 에너지를 이용하여 식 (9)와 같이 구성하였다. 모드별 초기 에너지는 작동기의 모달 작동력의 모드별 가중치를 설정하기 위하여 도입하였다. 즉 초기 조건이 1차 모드로만 이루어져 있다면 설계된 결과는 1차 모드에 대하여 위의 성능지수에 의거해 최대의 효과를 발휘하는 작동기가 된다.

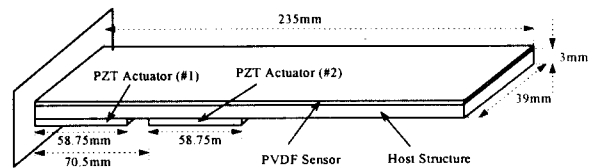


Fig. 3 Dimension of the specimen

Table 1 Material properties

	Density (kg/m <sup>3</sup> )	Youngs Modulus (GPa)	d <sub>31</sub> (m/V)
PZT	7700	61	171e-12
PVDF	1780	3	23e-12
AL2024-T3	2767.5	72.3	N/A

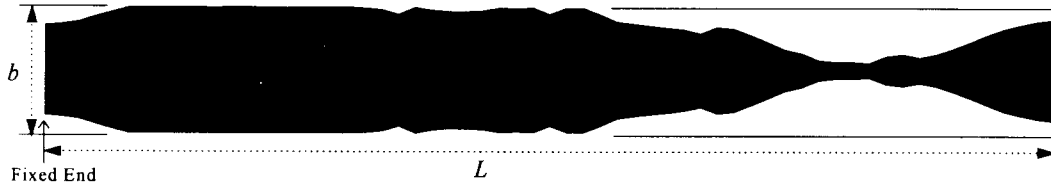


Fig. 4 Electrode shape of the optimized sensor

$$J_{actuator} = \left[ \sum_{k=control\ modes} E_0^k \right] / \int_0^{\infty} (\dot{\eta}_c^T \dot{\eta}_c + \eta_c^T \Lambda_c \eta_c + \rho V_{PZT}^T V_{PZT}) dt \quad (9)$$

여기서  $E_0^k$ 는  $k$ 번째 모드의 초기 에너지,  $\rho$ 는 제어 신호에 대한 가중치이다. 아래 첨자  $c$ 는 제어 모드를 나타낸다. 페루프 시스템 에너지 최소화값은 LQR 문제를 풀어서 얻는다. 작동기 성능지수에 관한 상세한 내용은 부록에 수록하였다.

두 개의 압전작동기 각각의 길이가 보 전체 길이의 1/4을 넘지 못한다는 제한조건을 적용하고 1차와 2차 모드에 대하여 같은 양의 초기 에너지를 주었을 때의 최적 설계 결과는 다음과 같다.

$$S_{PZT} = \underbrace{11111}_0 \underbrace{011111}_{Actuator\ #2} \underbrace{0000000000}_{Actuator\ #1}$$

보의 고정 단으로부터 5개의 유한요소 위에 첫번째 작동기가 위치하고 한 개의 유한요소 길이 만큼 떨어진 곳부터 다시 같은 길이(크기)의 두번째 작동기가 위치한다.(Fig. 3 참조)

### 4.2 PVDF 감지기 설계 및 결과

압전감지기 설계 시에는 전술한 스플오버를 고려하여 성능지수를 선정하였다. 즉 제어 대상 모드(1차 및 2차)에 대해서는 모드별 제어력을 최대화하고, 인접한 비제어 모드들(3-5차)에 대해서는 모드별 제어력을 최소화한다.

$$J_{sensor} = -\min(\Phi_c^T F_{PVDF}) + \max(\Phi_u^T F_{PVDF}) \quad (10)$$

여기서  $\Phi_c^T F_{PVDF}$   $\Phi_u^T F_{PVDF}$  는 제어모드 및 비제어모드에 대한 모드별 제어력으로 reciprocity에 의해서 해당 모드에 대한 제어력이 클 경우 그 모드에 의해서 감지기에 발생하는 전하량도 커지게 된다. 즉 제어를 원하는 모드에 대해서는 큰 감지기 출력을 얻는 동시에 인접한 비제어모드에 대해서는 감지기 출력을 최소화 하도록 최적화를 수행한다. 최적화

방법으로는 Sequential Quadratic Programming (SQP)기법을 사용하였다. 제어모드를 한 모드만 취하고 다른 모든 모드를 비제어모드로 선정하면 모달 감지기를 얻게 된다. Fig. 4는 최적 설계된 PVDF 감지기의 전극 형상을 나타낸다. Table 2의 모드별 제어력으로부터 감지기의 3-5차 모드의 제어력이 1, 2차 모드에 비하여 현저히 작은 것을 볼 수 있다.

Table 2 Modal forces per unit voltage of optimized actuator and sensor

	PZT Actuator #1	PZT Actuator #2	PVDF Sensor
1st Mode	1.34e-2	6.90e-3	-1.27e-4
2nd Mode	-4.01e-2	5.45e-2	-3.07e-4
3rd Mode	3.00e-2	-8.41e-2	9.39e-9
4th Mode	-5.18e-2	1.80e-1	1.57e-8
5th Mode	1.61e-1	-3.07e-1	-1.57e-8

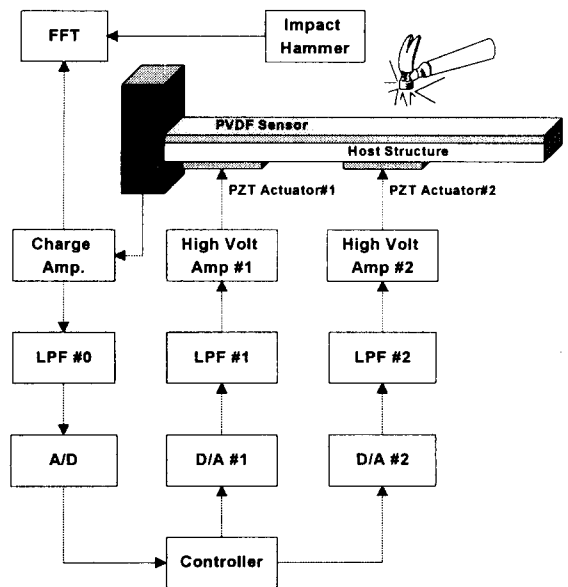


Fig. 5 Experimental setup

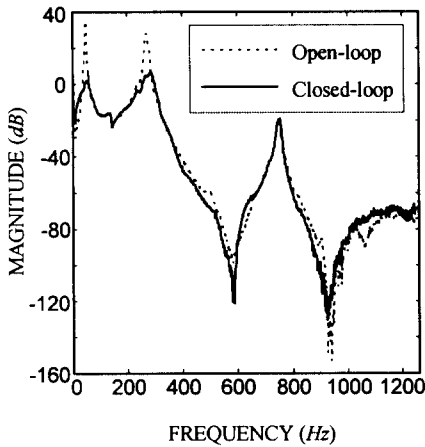


Fig. 6 Open-loop and closed-loop transfer function

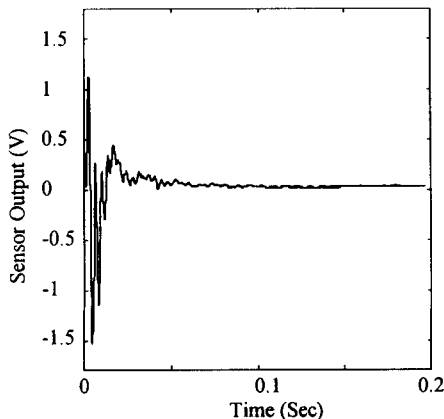
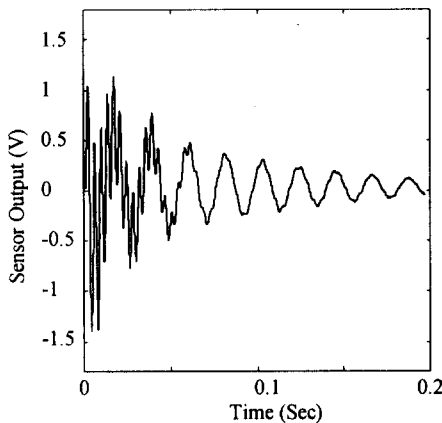


Fig. 7 Time response of the open-loop and closed-loop system

## 5. 실험 및 결과

설계된 압전감지기, 작동기의 특성의 확인 및 실시간 제어를 위하여 실험을 수행하였다. 실험 구성은 Fig. 5와 같다. 복잡한 형상의 PVDF 감지기를 제작하는 과정은 참고문헌<sup>(6)</sup>에 수록되어 있다.

사용한 전하증폭기의 이득은 108 Volt/Farad 이고 전압증폭기의 이득은 18 Volt/Volt이다. PZT 작동기에 가해지는 전압은  $\pm 90$  Volt로 제한하였다. 알리아싱(aliasing)을 막기 위한 저역통과필터 차단주파수(cut-off frequency)는 380 Hz이다. A/D변환기의 샘플링 주파수는 5,000 Hz이다. 충격 해머(impact hammer)로 고정 단으로부터 35 mm 떨어진 위치를 타격한 후 이에 대한 PVDF 감지기의 출력으로부터 개루프 및 폐루프의 전달함수를 구하였다. 제어 법칙으로는 LQG를 사용하였다.<sup>(7,8)</sup> Fig. 6은 개루프 및 폐루프의 전달함수이다. 개루프의 반응으로부터 감지기의 최적 설계 효과를 확인할 수 있다. 개루프 특성으로부터 제어 모드의 감지 신호가 비제어모드의 신호에 비해 40 dB 이상 큰 것을 볼 수 있다. 능동 제어에 의하여 제어 모드에서는 20~30 dB의 진동 감쇠 효과를 얻었고 비제어 모드인 3차 모드에 스피로버가 일어나지 않는 것을 확인할 수 있다. 시간 영역에서의 능동 제어 효과는 Fig. 7과 같다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 PZT를 작동기로, PVDF를 감지기로 사용하여 진동 제어를 행하였다. PZT 작동기는 Genetic Algorithm을 이용하여 최적 위치 및 크기를 설계하였고, PVDF 감지기는 SQP를 사용하여 전극의 형상을 최적화하였다. 유한요소법을 이용한 구조 및 감지기/작동기의 설계 및 해석 결과는 실험 결과와 좋은 일치를 보이고 있다. 실험을 통하여 설계된 감지기가 비제어 모드로부터의 신호를 효과적으로 차단함을 관찰하였고 이로부터 감지기/작동기 설계 기법의 타당성을 확인하였다.

## 후 기

이 논문은 1996년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

참고 문헌

- (1) S. Devasia, T. Meressi, B. Paden, and E. Bayo, 1993, Piezoelectric Actuator Design for Vibration Suppression: Placement and Sizing, J. of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.16, No.5, pp.859~864.
- (2) C.K. Lee, 1992, Piezoelectric Laminates : Theory for Distributed Sensors and Actuators, Intelligent Structural Systems, edited by H.S. Tzou, G. L. Anderson, Kluwer Academic Publishers, pp. 75~167.
- (3) T. Bailey and J.E. Hubbard, Jr., 1985, Distributed Piezo-electric Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam, J. Guidance, Control, and Dynamics, Vol.8, No.5, pp.605~611.
- (4) David E. Goldberg, 1989, Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning, Addison-Wesley.
- (5) Mark J. Balas, 1978, Feedback Control of Flexible Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-23, No. 4, pp. 673~679.
- (6) 유정규, 박근영, 김승조, 1997, "복합재 적층판의 진동 제어를 위한 분포형 압전 감지기/작동기 설계 최적화," 한국복합재료학회지 제10권 제3호, pp. 98~108
- (7) 김종식, 1988, 선형 제어 시스템 공학, 청문각.
- (8) J.M. Maciejowski, 1989, Multivariable Feedback Design, Addison-Wesley.

부 록

A-1 유한요소법을 이용한 질량, 강성 및 압전 작동력 행렬

보의 두께 방향 기준 위치에서의 면내 변위를  $u_0$ ,

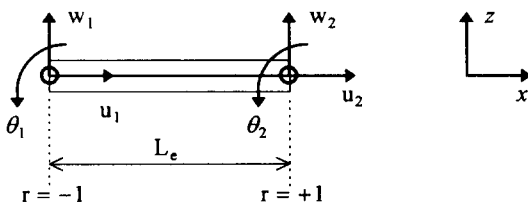


Fig. A-1 Degrees of freedom at nodal points

수직 변위를  $w$ 라 하면, 두께 방향 임의 위치에서의 면내 변위,  $u_x$ 는 식 (A1)과 같다.

$$u_x = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \tag{A1}$$

길이가  $L_e$ 인 Fig. A-1과 같은 유한요소에서 면내 변위( $u_x$ )와 수직 변위( $w$ )는 다음과 같은 형상함수를 이용하여 절점에서의 자유도,  $u^e$ 로 보간된다.

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & -z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & -z \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & h_2 & -z \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & -z \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = N^e u^e \tag{A2}$$

여기서,  $h$ 는 면내 변위에 대한 형상함수이고,  $\varphi$ 는 회전각에 대한 형상함수이다. 즉,

$$h_1 = \frac{1}{2}(1-r), \quad h_2 = \frac{1}{2}(1+r) \tag{A3}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4}(1-r)^2(2+r), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{4}(1-r)^2(r+1)\left(\frac{1}{2}L_e\right), \\ \varphi_3 &= \frac{1}{4}(1+r)^2(2-r), \\ \varphi_4 &= \frac{1}{4}(1+r)^2(r-1)\left(\frac{1}{2}L_e\right) \end{aligned} \tag{A4}$$

이다. 좌표의 보간은 아래와 같다.

$$x = h_1 x_1 + h_2 x_2 \tag{A5}$$

식 (A2)에서 회전각의 미분은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{4}(-3+3r^2) \frac{2}{L_e}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{4}(-1-2r+3r^2), \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{4}(3-3r^2) \frac{2}{L_e}, \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_4}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{4}(-1+2r+3r^2) \end{aligned} \tag{A6}$$

따라서 보의 길이방향 변형도,  $\epsilon_x$ 는 식 (A7)으로

나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \frac{\partial h_2}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x^2} \\ u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$= B^e u^e \quad (A7)$$

여기서 형상함수의 미분은 아래와 같다.

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = -\frac{1}{L_e}, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{1}{L_e} \quad (A8)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = 6r \frac{1}{L_e^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = (-1+3r) \frac{1}{L_e^2},$$

$$\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} = -6r \frac{1}{L_e^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x^2} = (1+3r) \frac{1}{L_e^2} \quad (A9)$$

유한요소의 질량행렬( $M^e$ ), 강성행렬( $K^e$ )은 다음과 같이 표현된다.

$$M^e = b \sum_{t^{(i)}} \int_{L^{(i)}} \rho^{(i)} N^{eT} N^e dx dz \quad (A10)$$

$$K^e = b \sum_{t^{(i)}} \int_{L^{(i)}} Y^{(i)} B^{eT} B^e dx dz \quad (A11)$$

여기서  $b$ ,  $t^{(i)}$ ,  $L_e$ 는 각각 보 요소의 폭, 두께, 길이이고  $p^{(i)}$ 는 질량 밀도,  $Y^{(i)}$ 는 영률이다. 단위 전압 당 압전작동기의 힘 벡터( $F_{PZT}^e$ )와 압전감지기의 힘 벡터( $F_{PZT}^s$ )는 아래와 같다.

$$F_{PZT}^e = b \sum_{t^{(i)}} \int_{L^{(i)}} e_{31} B^{eT} / t^{(i)} dx dz \quad (A12)$$

$$F_{PZT}^s = \sum_{t^{(i)}} \int_{L^{(i)}} b(x) e_{31} B^{eT} / t^{(i)} dx dz$$

$$= \sum_{t^{(i)}} \int_{L^{(i)}} (N_s S_{PVDF}^e) e_{31} B^{eT} / t^{(i)} dx dz \quad (A13)$$

$$= H_{PVDF}^e S_{PVDF}^e$$

여기서 압전 감지기의 유효 전극 폭,  $b(x)$ 는 Fig. A-2와 같이 한 유한요소를 3등분하고 각 구간에서의 형상함수,

$$p_1 = \frac{1}{2}(1-n), \quad p_2 = \frac{1}{2}(1+n) \quad (A14)$$

를 이용하여 각 구간의 유효 전극 폭을 식(A15)와 같이 보간 한다.

이때 구간에서의 좌표( $r_j$ )와 유한 요소에서의 좌표( $r$ )의 관계는 첫 번째 구간에서는  $r = (r_1-2)/3$ , 두 번째와 세 번째 구간에서는 각각  $r = r_1/3$ ,  $r = (r_1-2)/3$ 이다.

segment - 1 :

$$b(x) = [p_1 \quad p_2 \quad 0 \quad 0] [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4]^T$$

segment - 2 :

$$b(x) = [0 \quad p_1 \quad p_2 \quad 0] [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4]^T$$

segment - 3 :

$$b(x) = [0 \quad 0 \quad p_1 \quad p_2] [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4]^T \quad (A15)$$

이와 같은 방법으로 압전 감지기의 유효 전극 폭은 아래와 같이 표현된다.

$$b(x) = N_s S^e \quad (A16)$$

### A-2 작동기 최적 설계를 위한 성능 지수

작동기 설계 시에는 제어모드만을 고려한다. 제어 모드에서의 시스템 에너지,  $E_c$ 는 식 (A17)과 같고 제어 모드 시스템에 대한 LQR 문제는 식 (A18)로 표현된다.

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} \eta_c \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_c \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} \right\} dt \quad (A17)$$

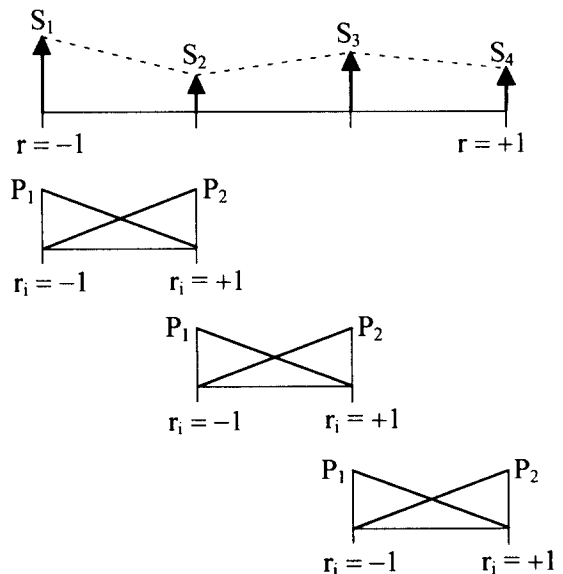


Fig. A-2 Interpolation of the electrode segments of PVDF sensor

$$\begin{aligned}
 \text{minimize } J &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} \eta_c \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \eta_c \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + V_a^T R V_a \right\} dt \\
 \text{with } \begin{bmatrix} \dot{\eta}_c \\ \ddot{\eta}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Lambda_c & -C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_c \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_c^T B_a \end{bmatrix} V_a \\
 &= A \begin{bmatrix} \eta_c \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + B V_a \quad (A18)
 \end{aligned}$$

여기서 Q와 R을 식 (A19)와 같이 선택하면 식 (A18)의 J는 시스템의 에너지를 나타내게 된다.

$$Q = \begin{bmatrix} \Lambda_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ and } R = \rho I \quad (A19)$$

J의 최소값, Jmin은 식 (A20)과 같이 초기 상태 변수에 의해 결정된다.

$$J_{\min} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta_c^0 \\ \dot{\eta}_c^0 \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \eta_c^0 \\ \dot{\eta}_c^0 \end{bmatrix} \quad (A20)$$

여기에서 P는 리카타방정식 ( $A^T P + PA + Q - P^T B R^{-1} B^T P = 0$ )의 해이다.

작동기 설계를 위한 성능 지수를 식 (A21)과 같이 선정한다.

$$J_{\text{actuator}} = \left[ \sum_{k=\text{control modes}} E_0^k \right] / J_{\min} \quad (A21)$$

여기에서  $E_0^k$ 는 k번째 모드의 초기 에너지이다. 초기 에너지 중에서 포텐셜 에너지만을 고려하면 초기 상태변수는 식 (A22)로 표현되고 이를 이용하여 Jmin을 계산할 수 있다.

$$\eta_k^0 = \sqrt{E_0^k} / \omega_k \text{ and } \dot{\eta}_k^0 = 0, k = 1, 2, \dots \quad (A22)$$

여기에서  $\omega_k$ 는 k번째 모드의 고유 진동수이다.

식 (A19)의 제어 입력에 대한 가중치, 는 Jmin의 크기에는 영향을 미친다. 그러나 이 가중치는 작동기의 설계 결과에는 영향을 미치지 않는다.