

< 논 문 >

동심원내에서 진동하는 내부 실린더에 작용하는 유체유발력의 근사적 해법

An Approximate Analytical Method for Hydrodynamic Forces on Oscillating
Inner Cylinder in Concentric Annulus

심 우 건*

Woo-Gun Sim

(1997년 7월 7일 접수 ; 1997년 9월 1일 심사완료)

Key Words : Fluid Inertia Force(유체관성력), Fluid Damping Force(유체감쇠력), Added Mass Coefficient(부가질량계수), Penetration Depth(침투깊이), Oscillating Reynolds Number (진동 레이놀즈 수)

ABSTRACT

An approximate analytical method has been developed for estimating hydrodynamic forces acting on oscillating inner cylinder in concentric annulus. When the rigid inner cylinder executes translational oscillation, fluid inertia and damping forces on the oscillating cylinder are generated by unsteady pressure and viscous skin friction. Considering the dynamic-characteristics of unsteady viscous flow and the added mass coefficient of inviscid fluid, these hydrodynamic forces including viscous effect are dramatically simplified and expressed in terms of oscillatory Reynolds number and the geometry of annular configuration. Thus, the viscous effect on the forces can be estimated very easily compared to an existing theory. The forces are calculated by two models developed for relatively high and low oscillatory Reynolds numbers. The model for low oscillatory Reynolds number is suitable for relatively high ratio of the penetration depth to annular space while the model for high oscillatory Reynolds number is applicable to the case of relatively low ratio. It is found that the transient ratio between two models is approximately 0.2 ~ 0.25 and the forces are expressed in terms of oscillatory Reynolds number, explicitly. The present results show good agreements with an existing numerical results, especially for high and low penetration ratios to annular gap.

1. 서 론

동심인 두 실린더의 진동에 의하여 발생하는 비정

상 환상 유동에 관한 연구는 저널 베어링의 불안정성⁽¹⁾ 및 원자로 구조물의 유체유발진동^(2~4)과 관련하여 최근 많은 관심이 집중되고 있다. 편심량을 변화시키면서 실린더의 일차원 진동에 의한 얻은 유체유발력을 저널 베어링의 oil whirl과 관련하여 응용할 수 있다⁽⁵⁾. oil whirl에 의한 진동특성은 진동

* 정회원, 한국전력기술주식회사 안전계통설계분야

에 따른 편심량의 변화에 의한 부하의 변화와 유체의 압착에 따른 유체유발력에 의하여 영향을 받는다. 구조물에 유체유발진동이 발생될 때에는 비정상 환상 유동에 의하여 진동체에 작용하는 유체유발력을 구하고 이로부터 유체에 의한 부가질량과 감쇠계수를 구하여 진동체의 동적 특성을 예측할 수 있다. 구조물의 유체유발진동을 유발시키는 유체유발력은 일반적으로 질량항, 감쇠항 및 탄성항으로 분류되며 음의 감쇠항 혹은 탄성항에 의하여 진동체는 불안정하게 된다⁽⁶⁾. 유체에 의한 부가질량에 의하여 진공 중에서 예측되는 계통의 고유진동수를 낮추게 된다. 비정상 환상류가 내부 실린더의 일차원 횡진동에 의하여 생성되면 원주방향과 반경방향의 비정상류 및 비정상 압력이 존재한다. 진동체의 표면에 작용하는 압력과 유체의 전단응력을 원주방향으로 적분하면 비정상 관성항과 감쇠항을 구할 수 있다. 진동체의 진동 진폭이 비교적 작다고 가정하면 유체유발력은 진동에 대하여 선형적이며 진동체의 동적 특성을 선형적으로 구할 수 있다⁽⁷⁾.

유체유발력에 의한 진동체의 동적 특성에 관한 연구는 상당히 진전되었으며 비선형 동적 특성에 관한 연구까지도 수행되고 있다⁽⁸⁻⁹⁾. 일반적으로 실린더가 불안정하게 되는 유체의 임계유속은 선형적으로 예측할 수 있으나 구조물의 진동 진폭이 크거나 (예: 임계유속 이상에서의 진동특성) 주변 구조물에 부딪히어 비선형 외력이 진동체에 작용할 때에는 비선형 해석을 수행하여 구조물에 미치는 피로 충격력 및 마모 등등을 고려하여야 한다. 또한 진동을 야기시키는 유체유발력의 원인을 규명하여야 한다. 유체유발력에 의한 진동은 와류, 난류, 유체유발탄성력 및 점성력 등 그 원인이 다양하다⁽⁶⁾. 따라서 진동체의 진동을 동반하는 비정상유동의 동적특성을 정성화하고 정량화 하는 것은 매우 중요하다.

실린더가 일차원 횡진동을 할 때, 포텐셜 이론에 의하여 부가질량계수를 이론적으로 예측할 수 있으며 최근 개발된 수치해석 방법을 사용하여 점성효과를 고려한 관성항과 점성 감쇠항을 구할 수 있다⁽¹⁰⁾. 점성에 의하여 부가질량계수는 증가하고 감쇠항이 생성되며 진동 레이놀즈 수와 원환의 기하학적 형상의 함수로서 표시된다. 원환의 반경비(외경/내경)가 증가하면 부가질량계수와 감쇠계수는 지수적으로 감소한다. 그러나 수치해석방법에 의하면 부가질량과 감쇠계수가 진동 레이놀즈와 반경비의 암시적(implicit) 함수로 표시되기 때문에 진동체의 동적 특성을 구할 때 어려움이 동반된다. 즉 진동 레이놀즈 수는 진동체의 진동수의 함수이고 진동체의 진동수는 유체의 동적 해석의 결과이기에 많은 반복

계산이 요구된다. 따라서 관성항과 감쇠항이 진동 레이놀즈 수와 반경비의 명시된 외부(explicit)함수로 표시되면 이와 같은 어려움을 줄일 수 있고, 또한 두 함수에 대하여 관성항과 감쇠항을 정량적으로 표시할 수 있다.

최근에 유체유발력의 탄성항과 감쇠항을 진동 레이놀즈 수와 반경비의 외부함수로 표시하기 위하여 수치해석 방법에 의하여 구하고 유체의 동적 특성을 분석하였으며 비정상 원주방향 유속의 일반성을 규명하였다⁽¹¹⁾. 즉 일반적으로 원주방향 유속의 진폭의 구배는 진동 레이놀즈 수에 따라 포물선형(층류) 혹은 난류의 구배와 유사하며 반경방향 유속은 반경방향에 대한 일차함수로서 선형적임을 알 수 있었다. 이러한 유동 특성을 활용하여 비교적 낮은 레이놀즈 수와 높은 레이놀즈 수를 위한 두 개의 모델을 개발하였고 근사적으로 감쇠계수를 예측하였다. 그러나 최근의 근사적 모델은 포텐셜 이론의 수치해석 결과를 사용하였기 때문에 아직 응용에 어려움이 동반된다.

본 근사방법은 포텐셜 이론의 수치해석 결과를 이용하지 않고 엄밀해⁽¹²⁾를 사용하여 감쇠항은 물론이거니와 관성항까지 예측하였다. 부가질량계수는 비정상 운동 에너지를 고려하여 진동문제에 응용되는 Lagrange 방정식을 사용하여 구하였고 점성 감쇠계수는 진폭의 구배에 따른 비정상 전단응력을 고려하여 어렵게 계산하였다. 결과적으로 탄성항과 감쇠항은 반경비와 진동 레이놀즈 수의 외부함수로 매우 간단하게 표시되었다. 반경비와 진동 레이놀즈 수를 변화시키면서 부가질량과 감쇠계수를 구하였고 수치해석 결과와 비교하여 두 모델의 정확성과 사용할 수 있는 범위를 규명하였다.

2. 비정상 유동장 특성 및 근사적 해법

2.1 비정상 유동장 특성

동심인 두 실린더의 사이에 이차원 비정상 환상류가 내부 실린더의 일차원 횡진동에 의하여 발생될 수 있으며 유동장의 특성은 이론적 혹은 수치해석적 방법에 의하여 구할 수 있다.

Fig. 1의 내 외부 실린더의 반경은 각각 a, b 이며 환의 간격(annular clearance)은 $H=b-a$ 이므로 표시된다. 원주방향의 좌표, θ ,는 진동 축에 대한 방위각을 나타낸다. 진동체의 진동변위와 속도는 각각

$$e_o = a\epsilon e^{i\omega t}, \quad \frac{de_o}{dt} = ia\Omega\epsilon e^{i\omega t} \quad (1)$$

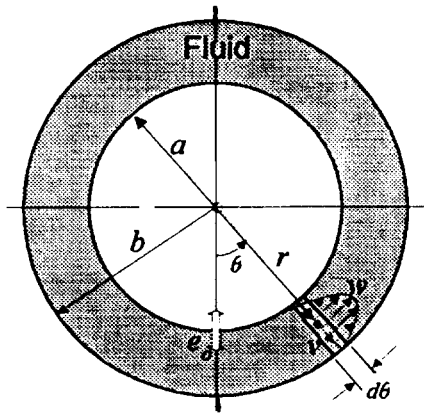


Fig. 1 Geometry of the fluid annulus, showing elementary control volume and velocity components

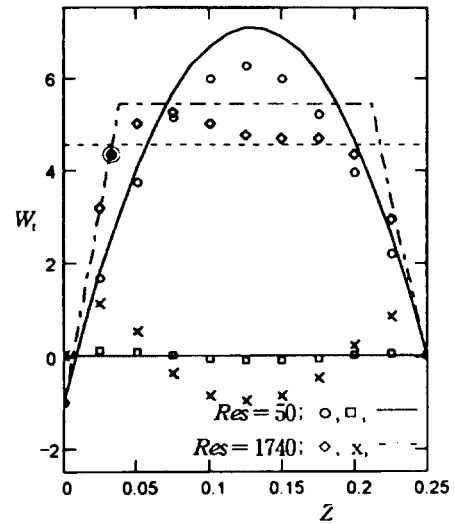
이때 Ω 는 진동 회전 주기(circular frequency)를 표시하고 ϵ 은 무차원 변위를 나타낸다. 유동장의 유체변수는 진동속도에 대하여 다음과 같이 무차원화 할 수 있다:

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{p}{\rho a^2 \Omega^2 \epsilon e^{i\Omega t}} = P \cos \theta, \\ \hat{w} &= \frac{w}{ia\Omega \epsilon e^{i\Omega t}} = W(Z) \sin \theta, \\ \hat{v} &= \frac{v}{ia\Omega \epsilon e^{i\Omega t}} = V(Z) \cos \theta \end{aligned} \quad (2)$$

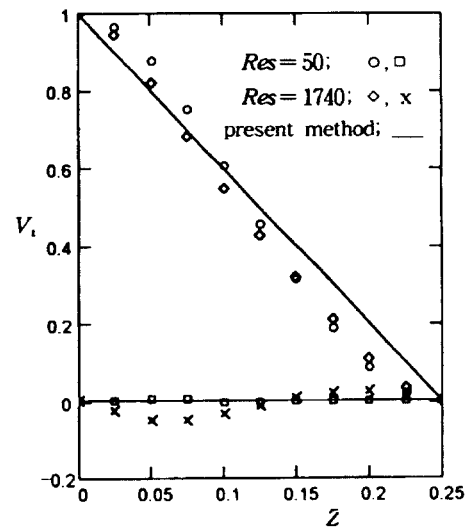
여기서 p , u 및 v 는 각각 압력, 원주방향 및 반경 방향의 유속을 나타내며 $Z = r - a$ 이다. 또한 각각의 진폭은 P , $W(Z)$ 및 $V(Z)$ 로 표시되며 점성유동의 진동면에서의 경계조건을 고려하면 위 식과 같이 삼각함수로 표시할 수 있다. 무차원 간격비와 진동 레이놀즈 수는 다음과 같이 표시된다.

$$h = \frac{H}{a}, \quad Res = \frac{\Omega a^2}{\nu} \quad (3)$$

수치해석 방법에 의하여 구한 원주방향과 반경 방향의 무차원 유속의 진폭을 Fig. 2에 나타내었다. 비정상 유동장은 실수부와 허수부로 나누어지며 허수부는 실수부에 비하여 작음을 알 수 있다. 원주방향 유속의 진폭은 진동 레이놀즈 수에 의하여 영향을 받으며 낮은 진동 레이놀즈 수인 경우에는 층류의 포물선 형태이며 높은 진동 레이놀즈 수의 경우에는 난류의 구배에 유사함을 보이고 있다. 진동체 표면, $Z=0$,에서의 값은 진동체와 유체의 미끄럼이 없는 경계조건을 나타낸다. 반경방향의 비정상 유속의 진폭은 비교적 일차 함수임을 알 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 2 Radial variation of the nondimensional amplitude of unsteady flow velocities in (a) circumferential and (b) radial directions for $b/a=1.25$, by the present method (lines: —, - - -) and the numerical method (symbols: viscous theory.....; potential theory): realparts (\circ, \diamond ,), and imaginary parts (x, \square)

2.2 근사적 해법

유체의 비정상 유동에 의하여 진동체에 작용하는 유체유발력은 일반적으로 비정상 압력과 전단응력을 원주방향으로 적분하여 구할 수 있다. 본 논문에서는 진동체에 작용하는 관성력을 유체의 운동 에너지

를 고려하여 근사적으로 구하였다. 또한 유체의 점성에 의한 감쇠력은 진동체의 표면에 작용하는 유체의 전단응력과 이와 관련된 비정상 압력을 고려하여 구하였다. 전단응력과 관련된 비정상 압력은 운동량 방정식을 사용하고 평균 원주방향 유속과 유속의 구배를 고려하여 정량화 하였다. 무한히 긴 진동체의 일차원 진동에 대한 유체의 유동장은 이차원이며 길이방향의 영향은 고려하지 않았다.

(a) 부가 질량계수

진동하는 내부 실린더의 진동 변위가 $e_o(t)$ 일 때 유체에 의하여 진동체에 작용하는 힘은 Lagrange 방정식을 사용하여

$$F_{mv} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_v}{\partial \dot{e}_o} = -\rho\pi a^2 \alpha_v \frac{d^2 e_o}{dt^2},$$

$$F_{mp} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_p}{\partial \dot{e}_o} = -\rho\pi a^2 \alpha_p \frac{d^2 e_o}{dt^2} \quad (4)$$

로 표시된다. T 는 원환 사이의 유체가 가지는 전체 운동에너지를 표시하고 α 는 부가질량을 나타낸다. 또한 아래첨자 v 와 p 는 각각 점성유동과 포텐셜 흐름을 나타내며 dot는 시간에 대한 미분을 표시한다. 유체의 전체 운동에너지는 원주방향과 반경방향의 유속에 의한 운동에너지를 원환 면적에 대하여 적분함으로써 구할 수 있다.

$$T = \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{2} \rho r (w^2 + v^2) dr d\theta \quad (5)$$

원환내에서 내부실린더의 진동에 의한 비정상 포텐셜 흐름의 경우에 원주방향의 유속은 근사적으로

$$w_p \approx W_p \dot{e}_o \sin \theta e^{i\omega t} \quad (6)$$

표시되며 원주방향 유속의 무차원 진폭은

$$W_p = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = \alpha_p = \text{constant} \quad (7)$$

이다⁽¹¹⁾. 좁은 환의 경우 일반적으로 원주방향의 유속에 비해 반경방향의 유속은 비교적 작다. 따라서 포텐셜 흐름에 의한 전체 운동에너지는 다음과 같이 표시된다:

$$T_p \approx \int_0^{2\pi} \int_0^H \frac{1}{2} \rho a (w_p^2 + v_p^2) dZ d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \rho a \int_0^{2\pi} \int_0^H (w_p^2 + v_p^2) dZ d\theta \quad (8)$$

$$\approx \frac{1}{2} \rho \pi a H \dot{e}_o^2 W_p^2$$

이와 마찬가지로 점성 유동에 의한 전체 유동장의 단위 길이당 운동에너지는

$$T_v \approx \int_0^{2\pi} \int_0^H \frac{1}{2} \rho a (w_v^2 + v_v^2) dZ d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi a \dot{e}_o^2 \int_0^H (W_v^2 + V_v^2) dZ \quad (9)$$

으로 표시된다. 여기서 점성 유체의 비정상 유속의 진폭에 대한 성향은 앞 절에서 기술하였듯이 원주방향 유속의 진폭은 비교적 낮은 레이놀즈 수의 경우 반경방향 구배는 층류의 구배와 유사하며 높은 레이놀즈 수의 경우에는 난류의 구배에 가깝다⁽¹⁰⁾. 또한 반경방향 유속의 진폭은 근사적으로 일차함수로 표시할 수 있다. 식 (4)을 고려하고 식 (8)과 (9)를 비교하면 점성유체에 의한 부가 질량계수는

$$\alpha_v \approx \frac{\alpha_p}{W_p^2 H} \int_0^H (W_v^2 + V_v^2) dZ \quad (10)$$

으로 간략화 할 수 있다.

비교적 낮은 레이놀즈 수의 경우에는 원주방향 유속의 진폭은 반경방향으로 일차함수로 표시할 수 있으며 따라서 점성 유체의 원주방향 유속의 진폭은

$$W_{vl}(Z) = AZ^2 + BZ + C \quad (11)$$

으로 근사화 할 수 있다. 아래첨자 l 은 낮은 레이놀즈 수의 경우를 나타낸다. 식에서 미지수 A , B 및 C 는 진동체와 유체의 경계조건과 평균 원주방향 속도를 고려하면 구할 수 있다:

$$W_{vl}(0) = -1,$$

$$W_{vl}(ah) = 0,$$

$$W_p \approx \frac{1}{H} \int_0^H W_{vl} dZ \quad (12)$$

마지막 식은 원주방향 유속의 진폭을 반경방향에 따라 적분한 평균값은 포텐셜 흐름으로 구한 평균 진폭과 거의 같음을 표시한다. 따라서 미지수는

$$A = -\frac{3}{H^2} (2W_p + 1)$$

$$B = \frac{2}{H} (3W_p + 2)$$

$$C = -1 \quad (13)$$

임을 알 수 있다. 또한 점성 유동의 반경방향 유속의 진폭의 실수부는 레이놀즈 수에 비교적 영향을 받지 않으며 다음과 같이 일차함수로 표시할 수 있다 (Fig. 2(b) 참조):

$$V_v(Z) \approx 1 - \frac{Z}{H} \quad (14)$$

유동장내에 비정상 유속에 의한 운동에너지는 낮은 레이놀즈 수의 경우에 식 (11)과 (14)를 식 (9)에 대입하면

$$\begin{aligned} T_{vi} &\approx \frac{1}{2} \rho \dot{e}_o^2 \int_0^{2\pi} \int_0^H a [(AZ^2 + BZ + C)^2 \\ &\quad \times \sin^2 \theta + (1 - \frac{Z}{H})^2 \cos^2 \theta] dZ d\theta \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi a \dot{e}_o^2 \\ &\quad \times \int_0^H [(AZ^2 + BZ + C)^2 + (1 - \frac{Z}{H})^2] dZ \end{aligned} \quad (15)$$

으로 표시된다. 따라서 식 (7), (10) 및 (13)을 고려하면 비교적 낮은 레이놀즈 수의 경우에 부가 질량계수는

$$\begin{aligned} \alpha_{vi} &\approx \frac{\alpha_p}{W_p^2 H} \int_0^H [(AZ^2 + BZ + C)^2 \\ &\quad + (1 - \frac{Z}{H})^2] dZ \\ &= 1.2 W_p + 0.2 + \frac{0.4667}{W_p} \end{aligned} \quad (16)$$

을 사용하여 간단하게 계산할 수 있다.

비교적 높은 레이놀즈 수의 경우에는 원주방향 유속의 진폭의 구배는 난류의 구배에 유사하며 Fig. 2에 보이듯이 구조물과 유체의 경계면에서의 전단응력은 침투깊이(Penetration Depth: $\delta_p = a\sqrt{2/Res}$)⁽¹¹⁾에 의하여 영향을 받는다. 즉 침투깊이에서의 원주방향 유속의 진폭의 실수부는 포텐셜 이론으로 구한 진폭의 값과 거의 일치한다 (Fig. 2(a) ● 참조). 따라서 실린더 표면에서의 원주방향 유속의 진폭의 반경방향 기울기는 포텐셜 이론으로부터 얻은 평균 진폭을 침투깊이로 나눔으로서 근사적으로 예측할 수 있다. 또한 점성 유동과 포텐셜 흐름에서 원주방향 유속의 진폭의 평균값이 같다고 가정하면 점성유동의 침투깊이 밖에서의 진폭은 그만큼 증가된다. 이와 같은 유동특성을 고려하면 원주방향 유속의 진폭은

$$\begin{aligned} W_{vh} &\approx W_p + \frac{\delta_p W_p}{H - 2\delta_p}, \quad \delta_p < Z < H - \delta_p \\ W_{vh} &\approx \frac{W_p + 1}{\delta_p} Z - 1, \quad Z < \delta_p \\ W_{vh} &\approx \frac{W_p}{\delta_p} (H - Z), \quad H - \delta_p < Z \end{aligned} \quad (17)$$

으로 표시할 수 있다. 식에서 아래첨자 h 는 높은 레이놀즈 수를 의미한다.

낮은 레이놀즈 수의 경우와 같이 원주방향과 반경방향의 유속의 진폭을 고려하면 높은 레이놀즈 수의 경우에도 운동에너지는

$$\begin{aligned} T_{vh} &\approx \frac{1}{2} \rho a \dot{e}_o^2 \\ &\quad \times \left[\int_0^{2\pi} \int_{\delta_p}^{H-\delta_p} W_p^2 \left(1 + \frac{\delta_p}{H-2\delta_p}\right)^2 \sin^2 \theta dZ d\theta \right. \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta_p} \left(\frac{W_p+1}{\delta_p} Z - 1\right)^2 \sin^2 \theta dZ d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_{H-\delta_p}^H \left(\frac{W_p}{\delta_p}\right)^2 (H-Z)^2 \sin^2 \theta dZ d\theta \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \int_0^H W_p^2 \left(1 - \frac{Z}{H}\right)^2 \cos^2 \theta dZ d\theta \right] \end{aligned} \quad (18)$$

으로 구할 수 있으며 높은 레이놀즈 수의 경우의 부가 질량계수는

$$\begin{aligned} \alpha_{vh} &\approx W_p + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{Res}} \frac{a}{H} \\ &\quad \times \left(W_p - 0.5 + \frac{1}{2W_p}\right) + \frac{1}{3W_p} \end{aligned} \quad (19)$$

으로 표시된다.

(b) 점성 감쇠계수

원환 내부 실린더의 일차원 진동에 의한 이차원 유동에 의하여 생성되는 전단응력과 관련된 원주방향의 압력 강하에 의하여 진동체에 점성 감쇠력이 작용한다. Fig. 1에서 보인 원주방향의 미소면적에 작용하는 운동량 방정식은 진동의 진폭이 작다고 가정하면 유속의 곱의 항과 시간에 대한 미분항은 무시된다. 따라서 운동량 방정식은 다음과 같이 간단히 표시된다.

$$-\frac{H}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \tau_a - \tau_b = 0 \quad (20)$$

위 식에서 진동체 표면에서의 유체의 전단응력은

$$\tau_a = \mu \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad \tau_b = -\mu \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=h} \quad (21)$$

으로 표시되며 전 질에서 구한 원주방향 유속의 진폭의 구배를 나타내는 식 (11)과 (17)을 사용하면 전단응력을 구할 수 있고 이로부터 전단응력에 의하여 감소되는 원주방향의 압력 구배를 계산할 수 있다.

진동체에 작용하는 유체의 감쇠력은 진동체 표면에서의 전단응력과 비정상 압력을 원주방향으로 적분하여 구할 수 있다:

$$F_d = -a \int_0^{2\pi} \left(p \cos \theta + \mu \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=a} \sin \theta \right) d\theta \quad (22)$$

여기서 $p \cos \theta = \frac{d}{d\theta} (p \sin \theta) - \frac{dp}{d\theta} \sin \theta$ 으로 표
시되고 무차원 변수를 고려하면 유체 감쇠력은

$$F_d = \rho a^2 \Omega^2 a \epsilon \epsilon^{i\omega t} \times \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} - i \frac{a}{Res} \frac{\partial \hat{w}}{\partial Z} \Big|_{z=0} \right] \sin \theta d\theta = i \rho \pi a^2 \Omega^2 a \epsilon \epsilon^{i\omega t} \hat{F}_d \quad (23)$$

으로 표시된다. 따라서 진동 레이놀즈 수에 따라 전
절에서 수식화 된 원주방향의 유속을 고려하면 감쇠
력을 계산할 수 있다. 또한 감쇠계수는 다음과 같이
무차원 감쇠력의 항으로 나타낼 수 있다:

$$C_{df} = -\rho \pi a^2 \Omega \hat{F}_d \quad (24)$$

낮은 레이놀즈 수의 경우에는 내 외부 실린더 표
면에서의 전단응력은 점성계수와 표면에서의 속도구
배로 표시되며 식(11)을 고려하면 원주방향 유속의
무차원 진폭의 반경방향의 구배는

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial Z} \Big|_{z=0} \approx \frac{2}{H} (3W_p + 2) \sin \theta, \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial Z} \Big|_{z=H} \approx \frac{-1}{H} (6W_p + 2) \sin \theta \quad (25)$$

로 표시된다. 따라서 원주방향의 무차원 압력의 변
화율은 식 (20)과 (25)을 고려하고 무차원화 하면
다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\frac{\partial \hat{p}_l}{\partial \theta} = -i \frac{\mu}{\rho a \Omega} \frac{1+h/2}{h} \times \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial Z} \Big|_{z=0} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial Z} \Big|_{z=H} \right) = i \frac{-1}{Res} \frac{1+h/2}{h^2} (12W_p + 6) \sin \theta \quad (26)$$

진동체 표면에서의 전단응력과 이와 관련된 원주방
향의 압력 변화율 알고 있으면 식 (23)을 사용하여
진동체에 작용하는 유체에 의하여 부가되는 무차원
감쇠력을 계산할 수 있다.

$$\hat{F}_{dl} = \frac{-1}{Res} \left[\frac{1+h/2}{h^2} (12W_p + 6) + \frac{2}{h} (3W_p + 2) \right] \quad (27)$$

여기서 대괄호 안의 첫째항은 압력구배에 의한 항이
고 둘째항은 표면 전단응력에 의한 항으로서 $h < 1$
일 때 압력항이 전단응력항에 비해 크을 알 수 있다.

비교적 높은 레이놀즈 수일 때 원주방향의 유속의
구조물 표면에서의 기울기는 침투깊이와 평균 원주
방향 유속의 진폭과 관계되며 Fig. 2를 참조하면

근사적으로 나타낼 수 있다:

$$\frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=a} \approx \frac{W_p \dot{e}_o \sin \theta + \dot{e}_o \sin \theta}{\delta_p} e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=b} \approx -\frac{W_p}{\delta_p} \dot{e}_o \sin \theta e^{i\omega t} \quad (28)$$

따라서 무차원 변수를 대입하면 무차원화 된 원주방
향 유속의 기울기는

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial Z} \Big|_{z=0} = \sqrt{\frac{Res}{2}} \frac{W_p + 1}{a} \sin \theta, \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial Z} \Big|_{z=H} = -\sqrt{\frac{Res}{2}} \frac{W_p}{a} \sin \theta, \quad (29)$$

으로 간단하게 표시된다. 낮은 레이놀즈 수의 경우
에 적용한 동일한 방법을 사용하면 무차원 압력의
원주방향의 기울기는

$$\frac{\partial \hat{p}_h}{\partial \theta} = -i \sqrt{\frac{1}{2Res}} \frac{1+h/2}{h} (2W_p + 1) \sin \theta \quad (30)$$

임을 알 수 있다. 마찬가지로 진동체에 작용하는 무
차원화 된 감쇠력은

$$\hat{F}_{dh} = -\sqrt{\frac{1}{Res}} \left[\frac{1+h/2}{h} \sqrt{2} (W_p + 0.5) + \sqrt{\frac{1}{2}} (W_p + 1) \right] \quad (31)$$

으로 간단하게 표시된다.

식 (27)과 (31)에 의하면 감쇠력은 진동 레이놀
즈 수와 원주방향 유속의 평균 진폭의 항으로 표시
되며 레이놀즈 수의 크기에 따라 감쇠력은 레이놀즈
수에 반비례하거나 레이놀즈 수의 근에 반비례한다.
또한 일반적으로 포텐셜 흐름의 원주방향 유속의 평
균 진폭은 원환의 기하학적 형상에 의하여 지배받
는다. 결과적으로 감쇠력은 원환의 간격에 대한 침투
깊이의 비 ($\delta_p/H = \sqrt{2/Res} \cdot a/H$)와 기하학적 형상
에 의하여 근사적으로 계산할 수 있다.

3. 해석 결과 검토

동심인 두 실린더의 사이에 이차원 비정상 환상류
가 내부 실린더의 일차원 횡진동에 의하여 발생하는
유동장을 해석하여 진동체에 작용하는 유체유발력을
근사적으로 구하였다. 따라서 근사적으로 구한 유동
장의 해석 결과를 기존의 수치해석 결과와 비교하여
근사이론의 타당성을 검토해야 한다. 타당성을 입증
한 후에 부가질량과 무차원 감쇠력을 레이놀즈 수와
반경비에 따라 구하여 수치해석 결과와 비교하였다.

Table 1 Comparison of the added mass coefficients and the nondimensional damping forces obtained by the present method with the existing numerical results⁽⁹⁾.

b/a	Res	δ_p/H	Added Mass Coefficient (α)			Nondimensional Damping Force (\widehat{F}_a)		
			Present Result		Numerical Result	Present Result		Numerical Result
			α_{vh}	α_{vh}		$-\widehat{F}_{d1}$	$-\widehat{F}_{d2}$	
1.25	50	0.80	5.77	6.85	5.74	24.19	5.11	22.02
	500	0.25		5.33	5.65	2.42	1.62	2.44
	5000	0.08		4.85	5.02	0.24	0.51	0.55
1.5	50	0.40	3.50	3.34	3.50	4.23	1.91	3.89
	500	0.13		2.92	3.11	0.44	0.60	0.67
	5000	0.04		2.79	2.77	0.04	0.19	0.18
2.0	50	0.20	2.48	2.07	2.38	1.02	0.78	1.08
	500	0.06		1.93	1.92	0.10	0.29	0.28
	5000	0.02		1.89	1.74	0.01	0.09	0.08

비교적 낮은 혹은 높은 레이놀즈 수에 근거한 근사 모델의 결과를 수치해석 결과와 비교하여 두 모델의 적용범위를 예시하고 천이영역을 검토하였다.

본 근사방법을 사용하여 비교적 낮은 레이놀즈 수 ($Res = 50$)와 높은 레이놀즈 수($Res = 1740$)의 경우의 원주방향 유속의 진폭을 Fig. 2 (a)에 예시하였으며 두 경우에 적용할 수 있는 반경방향 유속의 진폭을 (b)에 도시하였다 (식 (11, 14 & 17) 참조). 해를 구하기 위하여 사용된 반경비는 $b/a = 1.25$ 이다. 수치 해석적으로 구한 해의 허수부는 실수부에 비하여 비교적 작으며 낮은 레이놀즈 수의 경우에는 무시할 수 있다. 따라서 본 근사적 방법에서는 허수부는 고려되지 않았다. 이전의 수치해석 모델을 사용하여 구한 원주방향 유속의 구배는 낮은 레이놀즈 수의 경우에는 포물선형이며 높은 레이놀즈 수의 경우에는 난류의 구배와 유사함을 보이고 있다. 또한 반경방향 유속의 실수부는 레이놀즈 수에 거의 무관하게 반경방향에 대한 일차원 함수로서 선형적임을 보이고 있다. 수치 해석해와 본 근사해의 실린더 표면에서의 원주방향 유속의 구배는 거의 일치하며 따라서 표면 전단응력에 의한 원주방향의 압력감소는 거의 일치할 것이 예상된다. 따라서 실린더에 작용하는 부가질량과 감쇠력을 본 근사적 방법을 사용하여 무리 없이 구할 수 있다. 일반적으로 점성에 의한 감쇠력은 전단응력에 의한 원주방향의 압력감소에 의하여 주로 영향을 받는다.

반경비와 진동 레이놀즈 수의 변화에 따른 부가질량의 변화를 Fig. 3에 도시하였으며 수치해석 결과와 비교하여 검토하였다.

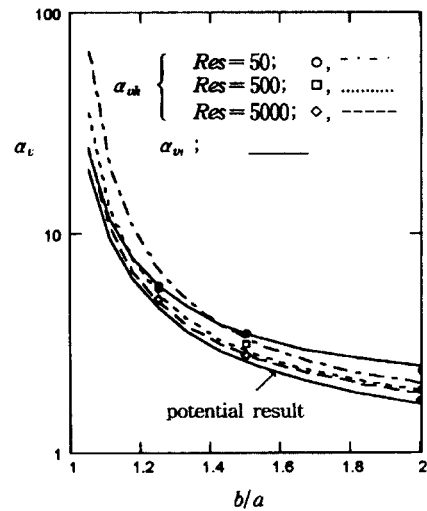


Fig. 3 Added mass coefficients for various oscillatory Reynolds numbers, given by the present method (lines) and the numerical method (symbols)

일반적으로 반경비와 진동 레이놀즈 수가 증가할수록 부가질량계수는 감소하고 있다. 식 (16)에 보듯이 비교적 낮은 레이놀즈 수의 경우에는 부가질량계수는 진동 레이놀즈 수에 영향을 받지 않고 오직 원환의 기하학적 형상의 함수로 표시된다. 이 경우에 얻은 결과는 $Res = 50$ 의 수치해석 결과와 잘 일치하고 있다. 그 이하의 진동 레이놀즈 수의 경우에 본 근사방법을 사용하여 얻은 부가질량계수는 수치해석결과와 비교하여 비교적 작다. 본 근사해법

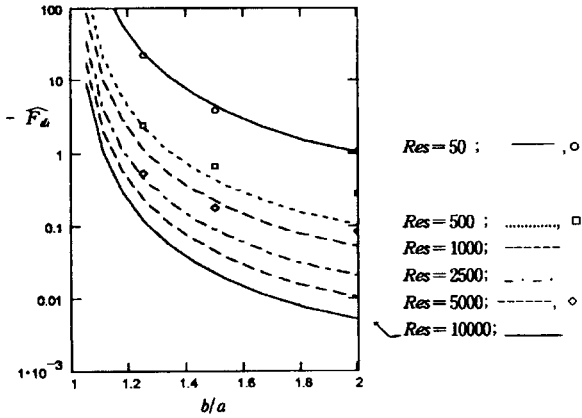


Fig. 4 Nondimensional damping forces for various oscillatory Reynolds numbers given by the present method (lines) developed for low oscillatory Reynolds number and by the numerical method (symbols)

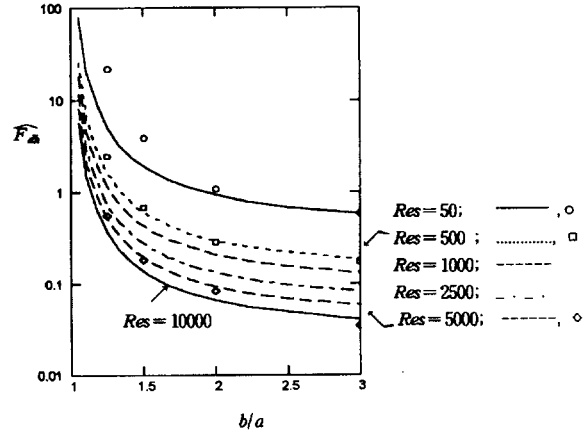


Fig. 5 Nondimensional damping forces for various oscillatory Reynolds numbers, given by the present method (lines) developed for high oscillatory Reynolds number and by the numerical method (symbols)

으로 구한 비교적 높은 레이놀즈 수의 경우 ($Res \geq 500$)에의 근사적 해는 반경비, b/a ,가 약 1.2에서 1.8까지 수치 해석해와 잘 일치하고 있다.

비교적 낮은 레이놀즈 수의 모델을 사용하여 얻은 무차원 감쇠력을 Fig. 4에 나타내었다. 부가질량계수와 마찬가지로 반경비와 레이놀즈 수가 증가할수록 감쇠력은 감소하고 있다. 수치해석 결과와 비교하여 진동 레이놀즈 수가 작거나 반경비가 작을 때 비교적 잘 일치함을 보이고 있다. Fig. 5에 비교적 높은 레이놀즈 수의 모델을 사용하여 얻은 무차원 감쇠력을 도시하였다. 진동 레이놀즈 수가 크거나 반경비가 클 때 수치해석 결과와 비교하여 비교적 잘 일치함을 보이고 있다. 수치해석결과와 비교하여 감쇠력이 진동 레이놀즈 수 혹은 반경비에 따라 두 모델의 응용 범위가 영향을 받음은 원환 간격에 대한 침투깊이의 비($\delta_p/H = \sqrt{2/Res} \cdot a/H$)에 직접적으로 관련됐음을 예측할 수 있다.

진동 레이놀즈 수와 반경비의 함수인 반경비에 대한 침투깊이 비를 Table 1에 나타내었다. 그리고 레이놀즈 수의 크기에 따른 유동특성을 고려하여 개발된 두 근사모델을 사용하여 얻은 부가질량계수와 무차원 감쇠력을 예시하고 수치해석적으로 구한 해와 비교 검토하였다. Fig. 3에서 설명하였듯이 비교적 낮은 진동 레이놀즈 수의 모델을 사용하여 얻은 부가질량계수는 오직 반경비에만 영향을 받는다(식(16) 참조). 원환의 간격에 대한 침투깊이의 비, δ_p/H ,가 비교적 작은 경우에는 비교적 높은 레이놀즈 수의 모델이 적합하고 침투깊이의 비가 비교적

큰 경우에는 비교적 낮은 레이놀즈 수의 모델을 사용할 수 있다. 두 모델의 사용범위를 경계짓는 천이 영역은 침투깊이의 비가 약 0.2~0.25 임을 알 수 있다.

4. 결 론

동심인 두 실린더의 사이에 이차원 비정상 환상류가 내부 실린더의 일차원 횡진동에 의하여 발생할 때 진동 실린더에 작용하는 유체유발력을 예측할 수 있는 근사적 모델을 개발하였다. 비정상 유동의 유동 특성은 진동 레이놀즈 수와 반경비에 따라 크게 달라 구분되며 각각의 유동장의 특성을 고려하여 두 개의 모델을 개발하였다. 즉 유속의 진폭의 실수부는 허수부와 비교하여 크며 원주방향 유속의 진폭의 반경방향 구배는 작은 레이놀즈 수의 경우에 포물선형으로 표시되고 비교적 큰 진동 레이놀즈 수의 경우에는 난류의 구배와 유사하다. 또한 반경방향 유속의 진폭의 구배는 진동 레이놀즈 수에 영향을 비교적 적게 받으며 반경방향에 대한 일차함수로서 선형적임을 보이고 있다. 원주방향의 평균유속은 포텐셜 이론의 결과를 사용하여 쉽게 구할 수 있다. 부가질량은 유동장의 속도에너지에 고려하여 Lagrange 방정식으로부터 구하였고 감쇠력은 운동량 방정식을 사용하여 유도하였다. 유체유발력은 부가질량계수와 무차원 감쇠력의 항으로 표시되며 반경비와 진동 레이놀즈 수에 따른 변화율을 예시하였다. 유체와 실린더 표면에서의 전단응력에 의하여 원주방향으로

압력이 변하며 이에 의한 압력변화율과 전단응력을 고려하여 감쇠력을 구하였다. 일반적으로 원환의 간격비가 작을 때 감쇠력은 주로 압력변화율에 의하여 영향을 받는다.

본 근사적 해법을 검증하기 위하여 기존의 수치해석 결과와 비교 검토하였다. 원환의 간격에 대한 침투깊이의 비, δ_p/H ,가 두 모델의 적합성을 결정하는 중요한 변수임을 알 수 있었고, 침투깊이의 비가 비교적 작은 경우에는 높은 레이놀즈 수의 모델이 적합하고 침투깊이의 비가 비교적 큰 경우에는 낮은 레이놀즈 수의 모델이 적합함을 보이고 있다. 두 모델의 천이 영역은 침투깊이의 비가 약 0.2~0.25 임을 알 수 있었다. 또한 감쇠력은 침투깊이의 비가 작은 경우에는 진동 레이놀즈 수의 근에 반비례하며 침투깊이 비가 큰 경우에는 진동 레이놀즈 수에 반비례함을 보이고 있다. 본 근사해법으로 구한 부가질량계수는 낮은 레이놀즈 수의 경우에는 오직 원환의 기하학적 형상에 의하여 영향을 받고 진동 레이놀즈 수가 50일 때에 아주 적합하다. 그러나 아주 낮은 진동수의 경우 ($Res \ll 50$)에는 점성효과를 비교적 적게 고려된 결과를 얻는다. 비교적 높은 레이놀즈 수의 경우에는 부가질량계수는 기하학적 형상과 진동 레이놀즈 수의 근의 역수로 표시된다.

공학적 응용 측면에서 기존의 모델을 사용하여 점성효과를 고려한 유체유발력을 예측하려면 일반적으로 상당한 어려움이 동반된다. 본 근사모델을 사용하면 쉽게 점성효과를 고려한 부가질량계수와 무차원 감쇠력을 구하여 유체유발력을 예측할 수 있고 비교적 해가 정확하여 공학적 응용 측면에서 상당히 기여할 것이 예측된다.

참 고 문 헌

- (1) Myers, C., 1984, "Bifurcation Theory Applied to Oil Whirl in Plain Cylindrical Journal Bearings", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.51, pp.245~250.
- (2) Mulcahy, T.M., 1983, "A Review of Leakage-Flow-Induced Vibration of Reactor Components", Argonne National Laboratory Report, ANL-83-43.
- (3) Chen, S.S., Wambsgann, M.W. and Jendrzejczyk, A.Z., 1976, "Added Mass and Damping of a Vibrating Rod in Confined Viscous Fluid", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 325~329.
- (4) Hobson, D.E., 1982, "Fluid-Elastic Instabilities Caused by Flow in an Annulus", *Third International Conference on Vibration in Nuclear Plant*, Keswick, UK.
- (5) Cameron, A. and Ettles, C.M.M., 1981, *Basic Lubrication Theory*, Ellis Horwood Limited, 1st ed., Chichester.
- (6) Blevins, R.D., 1990, *Flow-induced Vibration*, Van Nostrand Reinhold, New-york
- (7) Garner, G. and Chandra, S., 1984, "Fluid-Structure Coupling between a Finite Cylinder and a Confined Fluid", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp.857~862.
- (8) Botez, R.M. and Paidoussis, M.P., 1996, "Dynamics of an Articulated Cylinder in Annular Flow via Non-linear and Partially linearized Versions of an Analytical Model", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 192(3), pp.645~668.
- (9) 박철희, 홍성철, 김태정, 1997, "조화진동유동을 포함한 파이프 계의 혼돈 운동 연구" *한국소음진동 공학회지*, 제 7 권 제 3 호, pp 489~498.
- (10) Mateescu, D., Paidoussis, M.P. and Sim, W.G., 1994, "Spectral Solutions for Unsteady Annular Flows between Eccentric Cylinders Induced by Transverse Oscillations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.177(5), pp.635~649.
- (11) Sim, W.-G., 1994, "Damping Forces of Vibrating Cylinder in Confined Viscous Fluid by a Simplified Analytical Method", *KSME Journal*, Vol.8 No.1, pp.44~51.
- (12) Fritz, R.J., 1972, "The Effect of Liquids on the Dynamic Motions of Immersed Solids", *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol.94, pp.167-173.