

〈논 문〉

# 구속된 시스템 운동방정식의 수치해석에 관한 연구

A Study on Numerical Analysis of Equation of Motion for Constrained Systems

은희창\* · 정현수\*\*

Eun Hee-Chang and Chung Heon-Soo

(1997년 3월 28일 접수 ; 1997년 7월 19일 심사완료)

**Key Words :** Constraint(구속식), Eigenvalue(고유치), Generalized Inverse Method(일반화된 역행렬 방법), Moore-Penrose Inverse(무어 펜로즈 역행렬)

## ABSTRACT

Using Generalized Inverse Method presented by Udwadia and Kalaba in 1992, we can obtain equations to exactly describe the motion of constrained systems. When the differential equations are numerically integrated by any numerical integration scheme, the numerical results are generally found to veer away from satisfying constraint equations. Thus, this paper deals with the numerical integration of the differential equations describing constrained systems. Based on Baumgarte method, we propose numerical methods for reducing the errors in the satisfaction of the constraints.

## 1. 개 요

로 오차를 줄이기 위한 새로운 수치해석법을 제시하는데 연구의 목적이 있다.

17세기 Newton 이후 구속된 시스템의 운동을 묘사하기 위한 많은 시도가 있었으나 이를 명확하게 결정하지는 못하였다. 1992년 Udwadia와 Kalaba는 Generalized Inverse Method<sup>(1)</sup>에 의해 그 운동을 묘사하는 2차미분 방정식을 제안함으로써 명확하게 그 운동을 결정할 수 있게 되었다. 이는 다른 접근방식에 의하여 그 타당성이 검증되고 있다.<sup>(2,3)</sup>

그러나 미분방정식을 수치적으로 적분을 취할 경우 주어진 구속식을 만족하지 않는 오차가 발생하였으며, 이는 시간이 증가함에 따라 점점 증가함을 보인다.<sup>(4)</sup> 따라서 본 연구에서는 이를 오차를 줄이기 위한 구속된 시스템의 운동방정식에 대한 수치해석법을 고려하였으며, 이는 Baumgarte 방법<sup>(5)</sup>을 근거

## 2. Generalized Inverse Method(GIM)

$n$ -벡터  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T$ 로 그 운동이 묘사되는 시스템을 고려하자. 이 시스템의 자유 운동방정식은 Newton이나 Lagrange 역학으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{M}$ 은  $n \times n$  대칭인 질량행렬이고,  $\mathbf{F}$ 는  $n \times 1$  외력벡터이다. 위의 식으로부터 자유운동의 가속도는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{a}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2)$$

만약 이 시스템이 다음의  $m$ 개의 구속식에 의해 구속된다고 가정하자.

$$\phi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3)$$

이 식에서 구속식은 모든 시간  $t$ 에서도 반드시 만족

\* 정희원, 제주대학교 건축공학과

\*\* 중앙대학교 건축공학과

하여야 함을 알 수 있다.

위의 구속식들이 미분이 가능하다고 가정하여 시간에 관해 적절하게 미분을 취하면 다음형태의 수식을 얻을 수 있다.

$$A(q, \dot{q}, t)\ddot{q} = b(q, \dot{q}, t) \quad (4)$$

여기서  $A$ 는  $m \times n$  행렬이 된다.

자유운동방정식 (1)과 구속식 (4)를 적절하게 조합하면<sup>(1)</sup> 구속된 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\ddot{q} = a(q, \dot{q}, t) + M^{-1/2}(AM^{-1/2})^+(b - Aa) \quad (5)$$

여기서 ' $+$ '는 Moore-Penrose Inverse<sup>\*</sup>를 일컫는다. 이 식은 1992년 Udwadia와 Kalaba가 제안한 식으로 구속된 시스템의 운동을 명확하게 묘사할 수 있는 장점이 있다.

이 때 식 (5)를 수치적으로 적분을 할 경우 그 수치해석의 결과들은 반드시 구속식 (3)을 만족해야만 한다. 그러나 실제 그 수치해석 결과들은 구속식을 불만족하는 오차가 발생하며 이 오차는 시간이 증가함에 따라 점점 증가하는 경향이 있다.

따라서 이러한 오차를 줄이기 위한 방법을 holonomic과 nonholonomic 시스템으로 구분하여 다음에서 제시한다.

### 3. Holonomic 시스템

어떠한 시스템이 다음과 같이 표현가능한  $h$ 개의 holonomic 구속식에 의해 그 운동이 구속된다고 가정하자.

$$\psi_i(q, t) = 0, \quad i=1, 2, \dots, h \quad (6)$$

이들 구속식이 시간에 관해 미분가능하다고 가정하여 시간에 관해 한 번 미분을 취하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0, \\ i &= 1, 2, \dots, h. \end{aligned} \quad (7)$$

위의 식을 시간에 관해 다시 한 번 미분을 취하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right) \dot{q}_k \end{aligned}$$

\* Moore-Penrose Inverse는 다음과 같이 정의된다.

- (1)  $AA^+A = A$ , (2)  $A^+AA^+ = A^+$
- (3)  $(AA^+)^T = AA^+$ , (4)  $(A^+A)^T = A^+A$

$$+ \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = 0, \quad i=1, 2, \dots, h. \quad (8)$$

위의 식 (8)은 행렬식 (4)의 형태로 표현된다.

구속된 시스템의 운동방정식 (5)에서는 구속식과 관련하여 단지 식 (8)만을 고려하였다. 구속식을 불만족하는 오차는 이에 근거하여 발생하는 것으로 사료되어 식 (6)과 (7)을 운동방정식 (5)에 포함시킬 경우 오차를 줄일 수 있을 것이다. 따라서 구속식 (6)과 이를 시간에 관해 각각 한 번, 두 번 미분을 취한 식 (7)과 (8)을 포함하여 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$\ddot{H} + S\dot{H} + TH = 0. \quad (9)$$

여기서

$$H = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_h]^T,$$

$$S = \text{diag}[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_h],$$

$T = \text{diag}[\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_h]$ 이며  $\alpha_i$ 와  $\beta_i$ 는 양의 실수이다. 또한 식 (4)와 (5)는 다음의 형태로 대신된다.

$$A\ddot{q} = b - S\dot{H} - TH \quad (10)$$

$$\ddot{q} = a + M^{-1/2}(AM^{-1/2})^+(b - S\dot{H} - TH - Aa) \quad (11)$$

그리하여 구속된 운동방정식 (5)는 식 (11)에 의해 대신되며 새로운 계수들  $\alpha_i$ 와  $\beta_i$ 의 적절한 선택에 의해 오차를 줄일 수 있을 것이다. 계수들의 선택에 관해서 다음 예제를 통해 살펴보기로 한다.

**(예제 1)** X-Y 평면상을 움직이는 Fig. 1의 단진자 운동을 고려하자. 그림에서 보는 바와 같이 이 추의 질량  $m=1$ 이며  $(x, y)$ 에 의해 그 운동이 묘사된다. 또한 이 단진자 추의 길이  $L=1$ 에 의하여 그 운동이 구속되고 있다. 중력가속도  $g=9.8$ 는 아래 방향으로 작용한다. 가정하여 자유운동시의 가속도는 다음으로 쓸 수 있다.

$$a = [0 \ g]^T. \quad (12)$$

또한 이 단진자의 운동을 구속하는 구속식은 다음으로 정의된다.

$$f(x, y, t) = x^2 + y^2 - L^2 = 0 \quad (13)$$

이를 시간에 관해 한 번 미분을 취하면 다음을 얻는다.

$$\dot{f}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad (14)$$

이를 시간에 관하여 한 번 더 미분을 취하면 다음과 같은 형태로 표현이 가능하다.

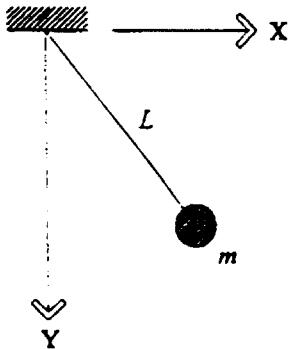
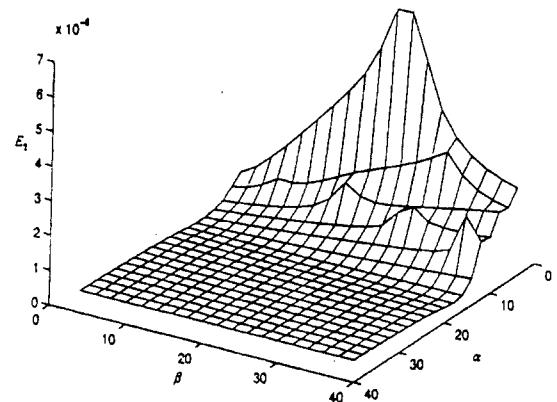
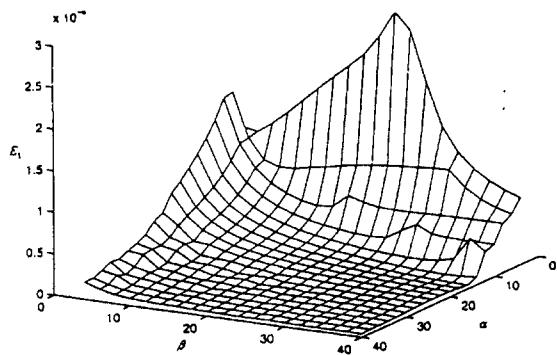


Fig. 1 A simple pendulum

Fig. 3 E<sub>2</sub> corresponding to  $\alpha$  and  $\beta$ Fig. 2 E<sub>1</sub> corresponding to  $\alpha$  and  $\beta$ 

$$[x \ y] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \alpha f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) - \frac{\beta}{2} f(x, y) \quad (15)$$

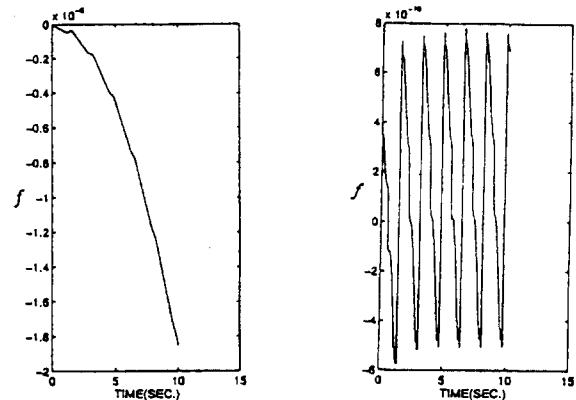
여기서  $\alpha$ ,  $\beta$ 는 양의 실수이다.

단진자의 운동은 구속식 (13)에 의해 단지 구속되기 때문에 식 (9)는 감쇠계수  $\alpha$ 와 강성계수  $\beta/2$ 인 SDOF (single-degree-of-freedom) 시스템으로 고려할 수 있다. 구속식에 의해 주어진 궤도를 벗어나는, 즉 구속식을 불만족하는 오차를 제거하여 가장 빨리 원래의 궤도로 잡아당기기 위한 계수의 선택이 필요할 것이다. 이 선택은 시스템이 임계감쇠(critically damped)진동, 과감쇠(overdamped)진동, 저감쇠(underdamped)진동중에 가장 빨리 0에 수렴하는 진동에 의해 그 계수들이 결정될 것이다.

계수 선택에 관해 다음과 같은 초기조건을 설정하여 수치해석이 실시되었다.

$$x=1, y=0, \dot{x}=0, \dot{y}=4 \quad (16)$$

이 초기조건은 주어진 구속식을 만족하도록 선택되었다. 초기조건 및 물성치와 식 (12)와 (15)를 운



(a)

(b)

Fig. 4 Error in the satisfaction of the constraint  $f$  corresponding to (a)  $\alpha = \beta = 0$  and (b)  $\alpha = \beta = 40$ 

동방정식 (11)에 대입하여 지배방정식을 결정하였다. 이를 소프트웨어인 MATLAB ODE45 (Runge-Kutta 수치적분법)에 의하여 20초까지 단진자의 거동을 고려하였으며 이 때의 tolerance는  $10^{-10}$ 을 사용하였다. 수치해석의 결과를 구속식 (13)과 (14)에 대입하였을 경우 구속식을 만족하지 않는 오차들의 크기를 다음과 같이 정의하여 계수  $\alpha$ ,  $\beta$ 에 따른 그 분포를 비교하였다.

$$E_1(\alpha, \beta) = \left[ \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f^2(x, y, \dot{x}, \dot{y}) d\tau \right]^{1/2} \quad (17)$$

$$E_2(\alpha, \beta) = \left[ \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \dot{f}^2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}) d\tau \right]^{1/2} \quad (18)$$

Fig. 2와 3은  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 2부터 40까지 각각 변화시킬 경우 이에 따른  $E_1$ 과  $E_2$ 의 분포를 나타낸다. 이 그림에 의하면  $E_1$ 은  $\alpha = 40$ ,  $\beta = 40$ 에서,

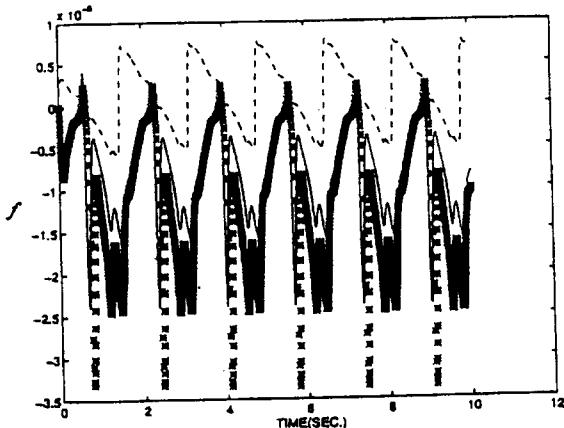


Fig. 5 Error in the satisfaction of the constraint  $f$ . The dashed line shows a plot of  $\alpha = \beta = 40$ , the solid line  $\alpha = 40$ ,  $\beta = 800$ , and the asterisked line  $\alpha = 40$ ,  $\beta = 1000$ .

$E_2$ 는  $\alpha = 14$ ,  $\beta = 4$ 에서 최소의 오차를 각각 보여 준다. 이들  $\alpha$ 와  $\beta$  값은 과감쇠 (overdamped) 진동에 의해 선택된 계수임을 알 수 있다.

Fig. 4는  $\alpha = \beta = 0$ 과  $\alpha = \beta = 40$ 일 때의 구속식 (13)을 만족하지 않는 오차를 비교하였다. 이 그림으로부터 구속식 (13)과 (14)를 운동방정식에 포함시킬 경우, 분명히 그 오차가 감소함을 알 수 있다.

과감쇠일 경우에 오차가 감소함을 보이기 위해 Fig. 5는 고정된  $\alpha = 40$ 에 대하여  $\beta$ 를 변화시켜 저감쇠, 임계감쇠, 과감쇠 진동에 의한 오차를 비교하였다. 과감쇠에 대하여  $\beta = 40$ 을, 임계감쇠에 대하여  $\beta = 800$ 을, 저감쇠에 대하여  $\beta = 1000$ 의 값을 사용하였다. 그림에서 볼 수 있듯이 과감쇠 시스템일 경우에 가장 작은 오차를 보여준다. 이 결과는 Baumgarte가 제안하였던 임계감쇠 시스템에서 가

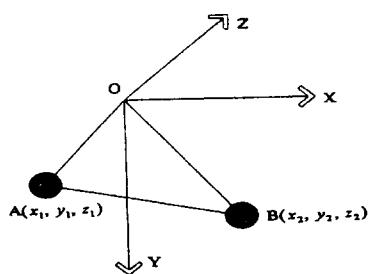


Fig. 6 A two particle system connected by three weightless rods

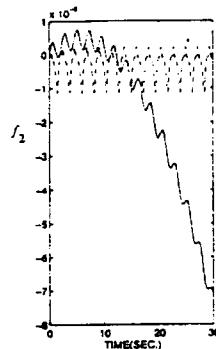


Fig. 7 Error in the satisfaction of the constraint  $f_2$ . The solid line shows the error corresponding to  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$  and the dashed line the error corresponding to  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 10$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = \beta_3 = 100$ .

장 작은 오차를 보인다는 것과 다른 결과를 보인다. 다음에는 둘 이상의 구속식에 의해 그 운동이 구속되는 시스템을 고려하자.

(예제 2) Fig. 6에 보여주는 시스템을 고려하자. 단단하고(Rigid) 무게가 없는 길이  $l_1$ 에 의해 질량이  $m_1$ 과  $m_2$ 인 추가 서로 연결되었다고 하자. 또한  $m_1$ 과  $m_2$ 는 회전축으로부터 길이가  $l_2$ 와  $l_3$ 인 단단하고(Rigid) 무게가 없는 OA와 OB에 의해 연결되었으며 중력이 양의 y방향으로 작용하고 있다고 가정하자.

A에 위치한  $m_1$ 의 좌표는  $(x_1, y_1, z_1)$ 으로 B에 위치한  $m_2$ 의 좌표는  $(x_2, y_2, z_2)$ 이라 하자. 이 시스템은  $q = [x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2]^T$ 인 6개의 좌표에 의한 자유운동방정식은 다음과으로 표현된다.

$$M\ddot{q} = F \quad (18)$$

여기서,  $M = diag[m_1 \ m_1 \ m_1 \ m_2 \ m_2 \ m_2]$  을,  $F = [0 \ m_1 g \ 0 \ 0 \ m_2 g \ 0]^T$ , 자유운동가속도  $a = [0 \ g \ 0 \ 0 \ g \ 0]^T$ 가 되며, 다음과 같은 식에 의해 구속되고 있다.

$$f_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0 \quad (19)$$

$$f_2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - l_3^2 = 0 \quad (20)$$

$$f_3 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2 = 0 \quad (21)$$

구속식들은 식 (10)의 형태로 다음과 같이 계수를 얻었다.

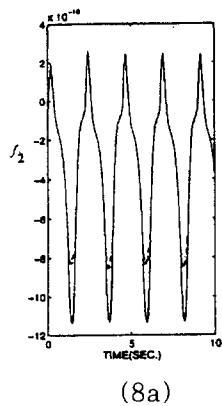
$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

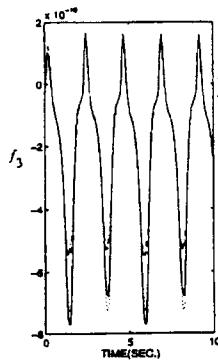
$$b - SH - TH = - \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 \\ (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 \\ - \alpha_1 f_1 - (\beta_1/2) f_1 \\ - \alpha_2 f_2 - (\beta_2/2) f_2 \\ + (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 - \alpha_3 f_3 - (\beta_3/2) f_3 \end{array} \right\} \quad (23)$$

여기서  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 는 각각 양의 실수이다. 이 시스템은 세 개의 구속식에 의해 그 운동이 구속됨으로 식 (9)의 비연계된 운동방정식으로 고려된다.

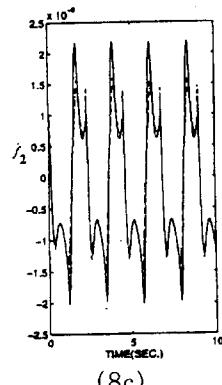
수치해석을 위해 초기조건을 다음과 같이 가정하자.



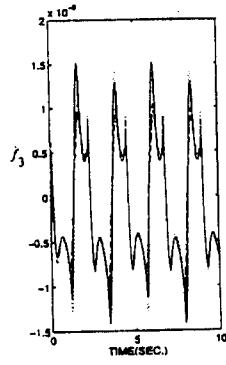
(8a)



(8b)



(8c)



(8d)

Fig. 8 Error in the satisfaction of the constraint (a)  $f_2$ , (b)  $\dot{f}_2$ , (c)  $f_3$ , (d)  $\dot{f}_3$ . With the fixed value of  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 10$  and  $\beta_2 = \beta_3 = 100$ , the solid line shows a plot of  $\beta_1 = 0$ , the dashed line  $\beta_1 = 40$ , the dash-dot line  $\beta_1 = 50$ , the dotted line  $\beta_1 = 100$ .

$$\begin{aligned} x_1 &= -6/\sqrt{13}, \quad y_1 = \sqrt{13} - (4/\sqrt{13}), \quad z_1 = 0, \\ x_2 &= 6/\sqrt{13}, \quad y_2 = \sqrt{13} + (4/\sqrt{13}), \quad z_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = \dot{z}_1 = \dot{x}_2 = \dot{y}_2 = \dot{z}_2 = 0. \quad (24)$$

초기조건들은 구속식을 만족하는 값으로 설정되었으며 수치적인 결과를 얻기 위하여 이를 초기조건의 다음의 변수값을 사용하였다.

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 4, \quad g = 9.8$$

$$l_1 = 4, \quad l_2 = 3, \quad l_3 = 5. \quad (25)$$

위의 값을 사용하여 이 시스템의 운동은 앞선 예제와 같이 Runge-Kutta 수치적분법에 의해 적분하였다.

Fig. 7은 구속식  $f_2$ 를 만족하지 않는 오차를 보인다. 그럼에서 실선은 모든 계수들이 0인 경우, 점선은  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 10, \beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 100$ 인 경우를 각각 나타낸다. 이들로부터  $\alpha_i$ 와  $\beta_i$ 의 존재는 분명히 오차를 줄일 수 있음을 볼 수 있다.

앞서 언급한 바와 같이 구속식에 의한 비연계된 2차 미분방정식에서  $\psi$ 와  $\dot{\psi}$ 를 만족하지 않는 오차는 단지  $\alpha_i$ 와  $\beta_i$ 에 의해 독립적으로 영향을 받음을 의미한다. 즉,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3$ 를 고정하고  $\beta_1$ 을 변화시켰을 경우  $f_2, \dot{f}_2, f_3, \dot{f}_3$ 는 일치하여야 한다.

Fig. 8은  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 10, \beta_2 = \beta_3 = 100$ 으로 고정하고  $\beta_1 = 0, 40, 50, 100$ 으로 변화시키면서 그 때의 오차를 보여준다. 이 그림에서 각 구속식을 만족하지 않는 오차들은 모든 계수들에 의해 영향을 받고 있음을 알 수 있다. 즉, 식 (9)는 비연계된 방정식이 아니고 연계된 방정식임을 알 수 있다.

계수들에 의한 연계성을 고려하여 다음의 새로운 수치해석방법을 유도할 수 있다. 식 (9)의 S와 T는 다음으로 대신된다.

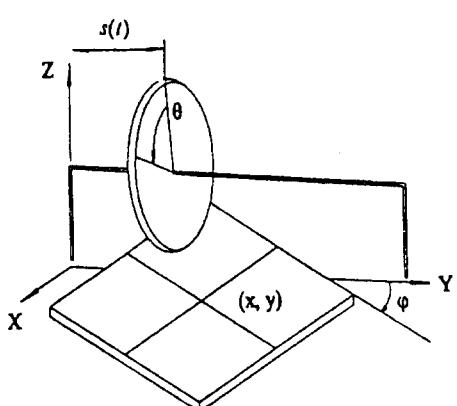


Fig. 9 A system of disk and plate

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1h} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{h1} & \alpha_{h2} & \cdots & \alpha_{hh} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$T = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1h} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{h1} & \beta_{h2} & \cdots & \beta_{hh} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$H = e^{\lambda t}U$ 를 식 (9)에 사용하면 이는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\lambda^2 I + \lambda S + T)Ue^{\lambda t} = 0 \quad (28)$$

여기서  $\lambda$ 는 고유치(eigenvalue)를 나타낸다. 그러나  $U \neq 0$ 이기 때문에 시간  $t$ 가  $\infty$ 로 증가함에 따라  $H$ 가 0에 접근할 수 있도록 고유치  $\lambda$ 는 반드시 음의 실수(negative real part)이어야만 한다. 이 경우에 구속식을 만족하지 않는 오차는 제거될 수 있을 것이다.

#### 4. Nonholonomic 시스템

본 절은 앞선 방법과 유사하게 nonholonomic 시스템의 경우를 고려한다. 만약 이 시스템이  $r$ 개의 nonholonomic 구속식에 의해 그 운동을 구속하고자 가정하자.

$$\phi_j(q, \dot{q}, t) = 0, \quad j=1, 2, \dots, r. \quad (29)$$

앞선 절에서 언급한 바와 같이 위의 구속식을 시간에 관하여 한 번 미분을 취한 것만을 운동방정식에 사용한다면 그 수치해석 결과들이 구속식을 만족하지 못하여 오차가 발생한다. 따라서 구속식 (29)와 이를 시간에 관해 한 번 미분을 취한 구속식을 다음과 같이 포함시켜야 한다.

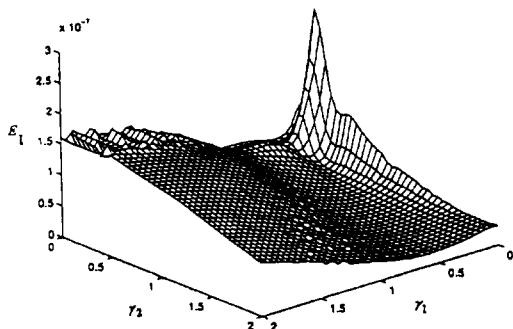


Fig. 10  $E_1$  corresponding to  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$

$$\dot{R} + LR = 0. \quad (30)$$

또한 이 식으로부터 식 (4)는 다음으로 대체한다.

$$A\dot{q} = b - LR. \quad (31)$$

여기서

$$L = \text{diag}[\gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_r].$$

$R = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_r]^T$ 이다. 여기서  $\gamma_i$ 는 양의 실수이다. 위의 식 (30)은 분명히 비연계이다. 따라서 식 (30)의  $r$ 개 계수  $\gamma_i$ 의 존재로 인하여 구속식 (29)를 불만족하는 오차를 감소시킬 수 있을 것이다. 이들 계수의 적절한 선택을 위해 다음의 예제를 고려하자.

(예제 3) Fig. 9의 반경  $r$ , 질량이  $m$ 인 원판의 운동을 고려하자. 이 원판의 길이가  $2a$ 이고 질량이  $M$ 인 정방형판과 접하고 있다고 가정하자. 원판은 고정된 수평대에 위치하고 그 수평대를 따라 그 원판이  $s(t)$ 로 움직이고 있다. 좌표  $x$ 와  $y$ 는 정방형판의 질량중심을,  $\theta$ 와  $\varphi$ 는 각각 원판과 정방형판의 운동회전각을 나타낸다.

이 시스템은 다음의 nonholonomic 구속식에 의해 그 운동이 구속되고 있다.

$$f_1 = \dot{x} + r\dot{\theta}\varphi - \dot{\varphi}(y-s) = 0, \quad (31)$$

$$f_2 = \dot{y} - \dot{s} + \dot{\varphi}x = 0. \quad (32)$$

이들 두 개의 구속식을 시간에 관하여 한 번 미분을 취하면 다음과 같은 형태를 취한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & r & s-y \\ 0 & 1 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(y-s) - r_1 f_1 \\ \dot{s} - \dot{x}\varphi - r_2 f_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

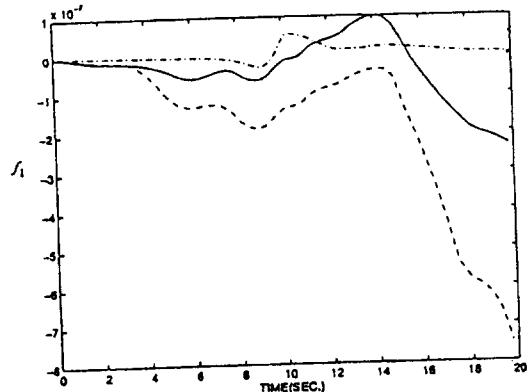


Fig. 11 Error in the satisfaction of the constraint  $f_1$ . The solid line shows a plot of  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , the dashed line  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0.2$ , and the dash-dot line  $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 1.8$ .

앞선 예제들과 같이 Runge-Kutta 수치해석법에 따라 20초동안의 적분을 취할 경우 그 결과는 주어진 구속식  $f_1$ 과  $f_2$ 를 만족하지 못하는 오차가 발생하였으며 그 크기를 다음과 같이 정의하였다.

$$E_1(\gamma_1, \gamma_2) = \left[ \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f_1^2(\tau) d\tau \right]^{1/2} \quad (34)$$

$$E_2(\gamma_1, \gamma_2) = \left[ \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} f_2^2(\tau) d\tau \right]^{1/2} \quad (35)$$

Fig. 10은 계수  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 의 변화에 따른  $E_1$ 의 값을 나타낸다.  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 는 0부터 0.05씩 2까지 각각 변화시켰다.  $E_1$ 은  $\gamma_1=0, \gamma_2=0.2$ 에서 최대의 오차를,  $\gamma_1=0.5, \gamma_2=1.8$ 에서 최소의 오차를 보인다.

Fig. 11은  $\gamma_1=\gamma_2=0, \gamma_1=0.5$ 와  $\gamma_2=1.8, \gamma_1=0$ 과  $\gamma_2=0.2$ 일 때에 구속식  $f_1$ 를 만족하지 않는 오차를 비교하였다. Fig.에서 볼 수 있듯이 구속식 (31)과 (32)를 운동방정식에 포함시키면 그들 오차가 분명히 감소하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 12는 구속식으로 이루어진 일차 미분방정식 (30)의 비연계성 여부를 확인하기 위하여  $\gamma_1=1.0$ 을 고정시키고  $\gamma_2=0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ 로 변화시켜 이 때의  $f_1$ 를 만족하지 않는 오차를 비교하였다. 이들 그림으로부터  $f_1$ 은 또한  $\gamma_2$ 에 종속적인 관계를 보임을 알 수 있다. 이로부터 계수에 의해 연계되었음을 알 수 있다. 이를 근거로 식 (30)의 L은 다음과 대신된다.

$$L = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1r} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{r1} & \gamma_{r2} & \dots & \gamma_{rr} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$R = e^{\lambda t} U$ 를 식 (30)에 사용하면 다음을 얻는다.

$$(\lambda I + L)Ue^{\lambda t} = 0. \quad (37)$$

여기서  $\lambda$ 는 고유치를 나타낸다. 이 식으로부터  $U \neq 0$ 이기 때문에 시간  $t$ 가  $\infty$ 로 증가함에 따라 R이 0에 수렴하기 위하여 고유치  $\lambda$ 는 음의 실수 (negative real part)가 되어야 한다.

## 5. 구속식의 선택

앞선 단진자 진동에 관한 예제에서 구속식 (13)이 외에도 다음의 구속식도 가능하다.

$$f^2(x, y, t) = (x^2 + y^2 - L^2)^2 = 0. \quad (38)$$

이를 시간에 두 번 미분을 취할 경우 다음을 얻을 수 있다.

$$\ddot{f} = -f^2. \quad (39)$$

이 식은 자동적으로 만족을 할 뿐만 아니라  $A\ddot{q} = b$ 에서 A와 b의 각요소는 0이 되어 구속식에 대한 풀이가 불가능하다. 따라서 구속된 시스템의 운동을 결정하기 위하여 적절하게 그 구속식을 선택하는 것도 중요한 사항이 된다.

## 6. 결 론

구속된 시스템의 운동방정식을 수치적으로 적분을 취할 경우, 그 구속식을 만족하지 않는 오차가 발생하며 이는 시간이 증가함에 따라 증가한다. 본 연구에서는 이들 오차를 줄이기 위한 수치해석법을 제안하였다. 이 수치해석법은 Baumgarte의 방법을 근거로 하여 이를 수정하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 구속식을 시간에 관해 적절히 미분을 취한  $A\ddot{q} = b$ 를 운동방정식에 사용할 경우에 수치해석의 결과는 구속식을 불만족하는 오차가 발생하였다. holonomic 시스템의 경우 그 구속식과 일차 미분형태를, nonholonomic 시스템일 경우 구속식을 운동방정식에 포함시키고 적절한 계수의 선택은 오차의 감소를 보였다.

(2) 한 개의 구속식에 의해 구속된 holonomic 시스템의 경우 그 구속식들과 계수들로 이루어진 운동방정식은 Baumgarte가 제안한 임계감쇠 시스템보다 과감쇠 시스템의 계수들을 사용할 경우 그 오차를 줄일 수 있다.

(3) n개의 구속식들에 의해 시스템이 구속될 경우 개개의 구속식을 만족하지 않는 오차는 모든 계수들에 의해 영향을 받는다. 또한 계수들에 의한 고유치가 음의 실수를 취할 경우 오차를 줄일 수 있을 것이다.

(4) 구속식의 선택에 있어서 시간에 관해 미분을 하였을 경우  $0\ddot{q} = 0$ 이 되지 않도록 세심하게 선택해야만 한다.

(5) 본 연구에서 구속식을 만족하지 않는 오차는 분명히 제안된 수치해석법에 의해 감소될 수 있을 것으로 판단되나, 앞으로 이에 대한 연구가 보다 더 필요하다고 여겨진다.

## 참 고 문 헌

- (1) Udwadia F.E. and R.E. Kalaba, 1992, "A New Perspective on Constrained Motion," Proceedings of Royal Society of London, Vol. 439, pp. 407~410.
- (2) Udwadia F.E., Kalaba R.E., and Eun

- H. C., 1995 , "Equations of Motion for Constrained Mechanical Systems and the Extended D'Alembert's Principle," Journal of Quarterly Applied Mechanics, Feb..
- (3) Eun, H.C., 1995, "On The Dynamics and Control of Constrained Mechanical & Structural Systems," PhD. Thesis., Univ. of Southern California.
- (4) Baumgarte, J.W., 1972, "Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems," Journal of Comp. meth. in Appl. Mech. and Engineering, Vol. 1, pp. 1~16.