

< 논 문 >

회전 창문함수를 적용한 위그너-빌 분포함수와 그 특성

Wigner-Ville Distribution Applying the Rotating Window and Its Characteristics

박 연 규* · 김 양 한**

Y.-K. Park and Y.-H. Kim

(1997년 2월 24일 접수 ; 1997년 4월 26일 심사완료)

Key Words : Wigner-Ville Distribution(위그너-빌 분포함수), Ambiguity Function(앰비규이티 함수) Rotating Window(회전 창문함수), Smoothing(스므딩)

ABSTRACT

Wigner-Ville distribution which is a time-frequency analysis has a fatal drawback, when the signal has multiple components. This is the cross-talk and often causes a negative value in the distribution. Wigner-Ville distribution is an expression of power, therefore the cross-talk must be avoided. Smoothing the Wigner-Ville distribution by convoluting it with a window, is most commonly used to reduce the cross-talk. There can be infinite number of distributions depending on the windows. But, the smoothing reduces resolution in time-frequency plane: this motives to design a more effective window in reducing cross-talk while remaining resolution. The domain in which the cross-talk and legitimate components can be easily distinguished, is the ambiguity function. In the ambiguity function domain, the legitimate components appear as linear lines passing through the origin. But, the cross-talk is widely distributes in the ambiguity function plane. Based on the relative distributions of cross-talk and legitimate components, rotating window can be designed to minimize cross-talk. Applying the rotating window to the ambiguity function corresponds to smoothing the Wigner-Ville distribution. Therefore, the effects of rotating window is estimated in terms of the bias error due to smoothing the Wigner-Ville distribution. By applying the rotating window, not only the Wigner-Ville distribution but also its properties are changed. The properties of the new distribution are checked, in order to complete analyzing the rotating window.

1. 서 론

시간-주파수 분석 기법의 예로서는 순간 진동수 (instantaneous frequency)^(1,2), 스펙트로그램 (spectrogram)⁽³⁾, 웨이블릿 변환(wavelet transform)⁽⁴⁾, 그리고 위그너-빌 분포함수 (Wigner - Ville distribution)⁽⁵⁾

등을 들 수 있다. 이중 위그너-빌 분포함수는 시간과 주파수 변수들과 관련된 우수한 성질을 갖고 있으며, 다른 시간-주파수 분석 기법을 표현하는 기본 함수가 된다^(3, 6). 그러나, 위그너-빌 분포함수는 이중 선형 변환(bilinear transform)이기 때문에 여러 성분이 결합되어 있는 신호의 경우 혼신성분(cross-talk)을 발생시킨다^(6~8). 혼신성분은 시간-주파수 평면상에서 진동하는 특성을 갖기 때문에 위그너-빌

* 한국과학기술원 기계공학과

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

분포함수로 하여금 음의 값을 갖게 하여, 시간-주파수 평면에서의 파워의 분포라는 시간-주파수 분석 기법으로서의 기본 성질을 위해 시킬 가능성이 있다.

위그너-빌 분포함수에서 혼신성분의 문제를 해결하기 위한 하나의 방법으로는 위그너-빌 분포함수에서의 스므딩(smoothing)을 들 수 있다^(9, 10). 스므딩은 위그너-빌 분포함수와 스므딩 창문함수의 시간과 주파수 양 방향으로의 2차원 컨볼루션(convolution)을 의미하는데, 스므딩에 의해 혼신성분의 감소를 가져올 수는 있지만 위그너-빌 분포함수에서 시간과 주파수의 분해능이 나빠진다는 피할 수 없는 문제점을 안게 된다.

위그너-빌 분포함수를 대신하여 실제성분과 혼신성분의 분리가 가능한 영역이 존재한다면, 이는 분해능에의 손실을 줄이면서 혼신성분의 감소를 달성하는 효과적인 방법을 제공할 수 있다. 본 논문에서는 이를 위하여 앰비규이티 함수(ambiguity function)^(6, 8, 11, 12)를 도입하고자 한다. 앰비규이티 함수는 시간-주파수 분석 기법의 입장에서 볼 때 위그너-빌 분포함수의 역상(mirror image)으로서 존재하며, 시간지연(time delay)과 주파수지연(frequency delay)의 함수로 표시된다. 또한, 위그너-빌 분포함수에서의 스므딩은 앰비규이티 함수에 창문함수를 적용함을 의미한다. 앰비규이티 함수에서 혼신성분과 실제성분의 상대적 위치에 대한 정량적 해석에 관한 연구^(11, 12)가 있었고, 그로부터 혼신성분은 시간지연-주파수지연 평면상에 넓게 분포하는 반면, 실제성분은 원점을 통과하는 선분들의 조합으로 표현된다는 사실을 알 수 있었다.

본 논문에서는 앰비규이티 함수에서의 실제성분과 혼신성분의 상대적 위치에 대한 정보를 바탕으로 설계된 혼신성분의 감소에 효과적인 창문함수를 소개하고자 한다. 이 창문함수는 회전 창문함수라 불리며, 이를 본 논문의 제 2장에서 기술할 것이다. 또한, 회전 창문함수 적용의 영향을 위그너-빌 분포함수에서의 스므딩에 의한 바이어스 오차면에서 살펴본 있는데, 이를 제 3장에서 다룰 것이다. 마지막으로, 제 4장에서는 회전 창문함수를 적용한 분포함수의 성질들에 대하여 기술하고자 한다.

2. 회전 창문함수

정상상태 신호(stationary signal)의 자기상관함수가 시간지연만의 함수로 표현되는 반면, 비정상상태 신호(nonstationary signal)의 자기상관함수는 시간지연 뿐만 아니라 절대시간의 함수로 표현된다. 이

때, 기대값(expectation)의 유무, 절대시간과 시간지연의 상대적 관계등에 의해 다양한 형태의 시간중속 자기상관함수(time-dependent autocorrelation)가 존재할 수 있으나, 그중 다음과 같은 표현이 가능하다.

$$r(t, \tau) = x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) \quad (1)$$

여기서, t 와 τ 는 각각 절대시간과 시간지연을 나타내며, $x(t)$ 는 신호를 나타낸다. 또한, 상첨자 *는 공액 복소수를 나타낸다.

위그너-빌 분포함수와 앰비규이티 함수는 각각 (1)식에 표현된 시간중속 자기상관함수의 시간지연과 절대시간에 대한 푸리에 변환(Fourier transform)으로 정의되며, 그 표현은 다음과 같다.

$$W(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t, \tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2)$$

$$A(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t, \tau)e^{-j\xi t} dt \quad (3)$$

여기서, ω 와 ξ 는 각각 주파수와 주파수지연을 나타낸다.

위그너-빌 분포함수와 앰비규이티 함수를 나타낸 식 (2)와 식 (3)으로부터 이중 푸리에 변환(double Fourier transforms)으로 특징지어지는 두 함수 사이의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$W(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\xi t - \omega\tau)} A(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (4)$$

$$A(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\xi t - \omega\tau)} W(t, \omega) dt d\omega \quad (5)$$

위그너-빌 분포함수는 이중 선형 변환으로서, 여러 성분이 결합되어 있는 신호의 경우 혼신성분을 발생시킨다는 단점을 갖는다. 앰비규이티 함수 평면에서 볼 때, 실제성분은 원점 근처에, 혼신성분은 상대적으로 원점으로부터 떨어진 위치에 존재하게 된다^(6, 8). 따라서, 혼신성분을 감소시키기 위한 한가지 방법은 보통 커널(kernel)이라고 부를 수 있는 창문함수를 앰비규이티 함수에 적용하는 것이 될 수 있다. 이는 다음식과 같이 앰비규이티 함수에 2차원 창문함수를 곱함을 의미한다.

$$A_w(\xi, \tau) = G(\xi, \tau)A(\xi, \tau) \quad (6)$$

여기서, $A_w(\xi, \tau)$ 는 창문함수가 적용된 앰비규이티 함수를, $G(\xi, \tau)$ 는 2차원 창문함수를 의미한다. 앰비규이티 함수에서의 창문함수의 적용에 의해 변형된 위그너-빌 분포함수는 식 (6)의 이중 푸리에 변환을 수행함으로써 얻어질 수 있으며, 그 표현은 다음과 같

다.

$$W_s(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t-t', \omega-\omega') S(t', \omega') dt' d\omega' \quad (7)$$

여기서, $S(t, \omega)$ 는 스므딩 창문함수로서 앰비규이티 함수에 적용된 창문함수의 이중 푸리에 변환이 된다.

$$S(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\xi t - \omega \tau)} G(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (8)$$

식 (7)에서 알 수 있듯이, 앰비규이티 함수에의 창문함수 적용에 의한 변형된 위그너-빌 분포함수는 원래의 위그너-빌 분포함수와 2차원 창문함수의 시간과 주파수 축을 따른 2차원 컨볼루션으로 나타남을 알 수 있다. 즉, 앰비규이티 함수에의 창문함수 적용은 위그너-빌 분포함수의 스므딩을 의미하는 것이다. 이러한 스므딩된 위그너-빌 분포함수를 *generalized Cohen's class*⁽⁶⁾라 지칭한다.

앰비규이티 함수에 적용되는 창문함수의 크기가 클 경우 상대적으로 많은 혼신성분을 포함하게 된다. 그러나, 이는 위그너-빌 분포함수에의 스므딩 창문함수의 크기가 작은 것을 의미하여 상대적으로 좋은 분해능을 유발한다. 반대로 작은 창문함수는 적은 혼신성분을 포함하지만 위그너-빌 분포함수에서의 나쁜 분해능을 유발할 것임을 알 수 있다. 이와 같이 시간-주파수 분석기법에서의 분해능과 혼신성분의 정도는 상호 배타적인 관계를 가지게 되며, 이는 새로운 효과적인 창문함수의 구현에 직접적인 동기가 된다.

앰비규이티 함수에서 실제성분과 혼신성분의 상대적 위치에 대한 정보는 효과적인 창문함수의 설계를 위한 유용한 정보가 될 수 있다. 이를 정량적으로 해석하기 위하여 임의의 형상을 갖는 위그너-빌 분포함수를 여러개의 선분들의 조합으로 표현하였으며, 이로부터 앰비규이티 함수상에서 혼신성분은 넓게 분포하여 나타나는 반면, 실제성분은 원점을 통과하며 각각의 기울기를 갖는 선분들의 조합으로 나타난다는 사실을 알 수 있었다^(11,12). 이는 실제성분이 갖는 매우 중요한 성질로서 실제성분이 각도에 따른 분포를 갖는 것을 의미한다. 즉, 각도에 따라 실제성분의 존재 유무 및 그 크기가 달라지게 된다. 이상의 고려를 통해, 실제성분을 유지한 채 혼신성분만을 소거하기 위한 효과적인 창문함수는 실제성분의 각도에 따른 정보를 반영할 수 있는 형태가 되어야 함을 알 수 있다. Fig. 1에 이러한 창문함수의 기본 개념을 나타내었다.

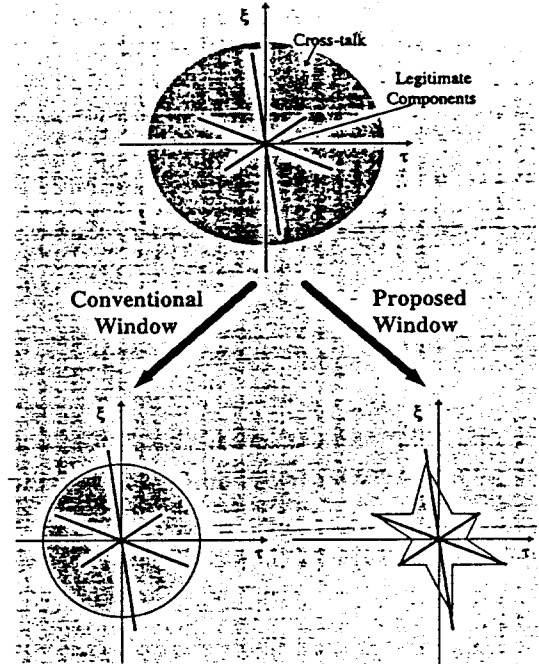


Fig. 1 Basic concept of the rotation window.

위에 언급한 각도에 따른 정보를 반영할 수 있는 새로운 창문함수를 설계하는 가장 쉬운 방법은 기존의 창문함수로 하여금 이러한 정보를 반영할 수 있도록 수정을 가하는 것임을 쉽게 생각할 수 있다. 가우시안 창문함수(Gaussian window)는 시간과 주파수 영역에 있어 대칭적인 특징을 갖기 때문에, 스므딩 창문함수로 많이 이용되어 왔으며^(9,10), 따라서 본 논문에서는 새로운 창문함수의 설계에 있어 가우시안 창문함수를 기본 창문함수로 하여 수정을 시도하고자 한다. 모든 창문함수는 각각의 형상을 결정짓는 인자를 갖게 되는데, 가우시안 창문함수의 경우 표준편차(standard deviation: σ)가 창문함수의 형태를 결정짓는 인자가 된다. 따라서, 가우시안 창문함수를 변형하여 각도에 따른 정보를 반영하도록 한다면, 그 표준편차가 각도 정보를 반영하도록 변형되어야 한다. 그 결과 새로운 창문함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R(\xi, \tau) = e^{-(\xi^2 + \tau^2)/2\sigma^2 f^2(\theta)} \quad (9)$$

여기서, $f(\theta)$ 는 각도에 따른 정보를 나타내는 인자, 즉 각도 종속 인자(angle dependency factor)로서 뒤에 정의될 것이며, θ 는 $\theta = \tan^{-1}(\xi/\tau)$ 로 정의되는 각도가 된다. 식 (9)로부터 알 수 있는 사실은 새로운 창문함수의 설계에 있어 가우시안 창문함수의

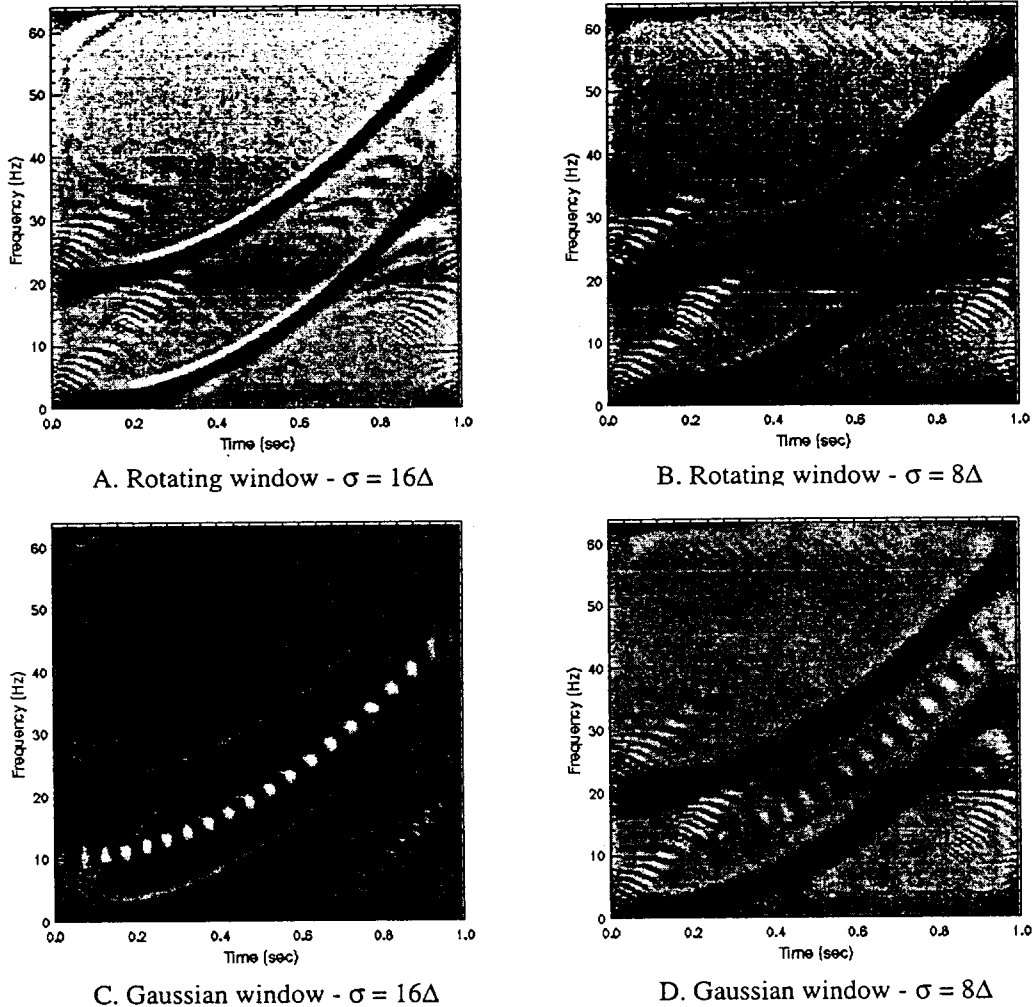


Fig. 2 Comparison of the rotating window and Gaussian window for a signal with two parallel 2-nd order time-varying frequency components
 $(\omega_1(t) = 2\pi \cdot 40t^2, \omega_2(t) = 2\pi \cdot (20 + 40t^2), N = 128, f_s = 128\text{Hz}, \sigma_s = 1)$

형태를 결정짓는 표준편차만이 각도 정보를 반영하도록 수정되었다는 것이다. 즉, 표준편차 σ 만이 $\sigma(\theta)$ 로 바뀌었음을 알 수 있다. 각도 종속 인자는 실제성분의 각도에 따른 정보를 반영해야 한다는 제한조건 내에서 임의적으로 정의될 수 있다. 본 논문에서는 목적 함수인 위그너-빌 분포함수가 파워를 나타내는 함수라는 사실을 고려하여, 각도에 따른 파워의 비를 각도 종속 인자로 정의하고자 한다. 즉,

$$f(\theta) = \frac{P(\theta)}{P_{max}} \quad (10)$$

여기서, $P(\theta)$ 는 각도 θ 에 따른 파워를, P_{max} 는 $P(\theta)$ 중 가장 큰 값을 나타낸다.

임의의 각도에 따른 파워, 즉 $P(\theta)$ 를 다음과 같

이 계산할 수 있다.

$$P(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\xi, \tau)| s_{\theta}(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (11)$$

여기서, $s_{\theta}(\xi, \tau)$ 는 각도 θ 로 방향지어진 좁은 띠를 나타낸다. 좁은 띠를 회전시키면서 앰비규이티 함수의 절대값에 곱함으로써 각도에 따른 파워의 분포를 계산하게 되는데, 좁은 띠를 회전시킨다는 사실로부터 “회전 창문함수”라는 이름이 지어지게 되었다. 이때 앰비규이티 함수의 절대값을 사용한 이유는, 비록 앰비규이티 함수 자체는 물리적으로 의미있는 양이 아니라 할 지라도 파워나 에너지와 같은 2차함수이기 때문이다.

본 논문에서는 회전 창문함수를 설계하기 위한 기

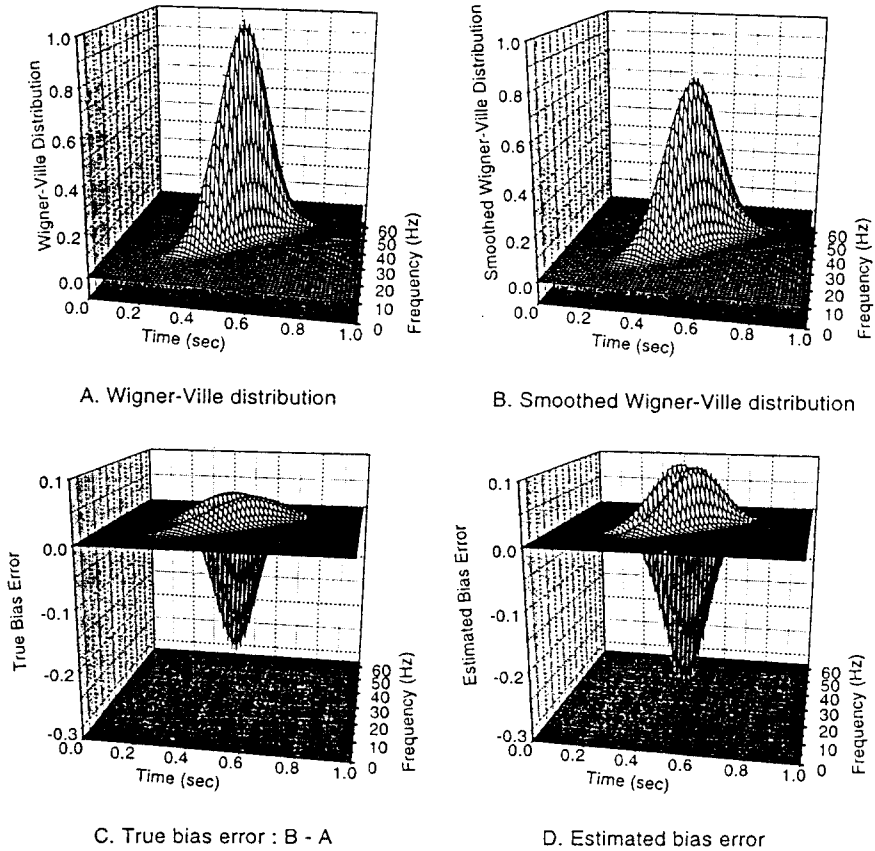


Fig. 3 Wigner-Ville distribution and bias error due to smoothing using the rotating window ($\sigma = 8 \Delta / 128 \Delta$)

본 창문함수로 가우시안 창문함수를 사용한 바 있는데, 수식 전개에 일관성을 위하여 띠의 형태 역시 가우시안 형태를 사용하는 것이 논리의 하자(欠)가 없을 것이다. 그 결과 좁은 띠는 다음식과 같이 정의된다.

$$s_{\theta}(\xi, \tau) = e^{-\frac{[\cos(\theta)\tau + \sin(\theta)\xi]^2}{2\sigma^2}} \times e^{-\frac{[-\sin(\theta)\tau + \cos(\theta)\xi]^2}{2\sigma_s^2}} \quad (12)$$

여기서, σ 는 띠의 길이 방향을 따른 표준편차를 나타내는데 회전 창문함수의 크기와 관련된다. σ_s 는 띠의 폭 방향을 따른 표준편차로서, 각도에 따른 분해능을 높이기 위하여 σ 에 비해 가능한 범위 내에서 작을수록 좋다.

회전 창문함수는 식 (9)에서 식 (12)까지를 연속적으로 적용함으로써 완전하게 구현될 수 있다.

본 논문에서는 회전 창문함수의 적용성을 전산기

모의실험을 통하여 살펴보았다. Fig. 2는 회전 창문함수와 가우시안 창문함수의 비교를 나타낸다. 이때 시간의 2차함수 형태의 주파수 성분 두개가 결합된 신호가 사용되었다. 같은 크기의 창문함수를 사용하였을 때, 회전 창문함수를 적용한 분포함수가 가우시안 창문함수를 적용한 분포함수에 비해 시간-주파수 평면상에서 같은 분해능을 유지하면서 혼신성분의 감소면에서 더 우수한 성능을 나타내고 있다.

3. 회전 창문함수 적용의 영향

제 2장에서 기술하였듯이 앰비규이티 함수에서 회전 창문함수 적용은 위그너-빌 분포함수에의 스무딩을 의미한다. 스무딩에 의해 새롭게 구현된 시간-주파수 분석기법은 원래의 위그너-빌 분포함수의 변형된 형태로 표현될 것인데, 그 변형된 정도를 파악하는 것은 원래의 위그너-빌 분포함수와 새로이 구현된 분포함수와의 관계를 파악한다는 점에서 중요한 의미

를 가짐을 쉽게 인식할 수 있다. 제 3장에서는 이와 같은 변형정도, 즉 분포함수간의 관계를 스므딩에 의한 바이어스 오차(bias error) 면에서 살펴보고자 한다.

스므딩된 위그너-빌 분포함수를 나타내는 식 (7)에서 원래 위그너-빌 분포함수 $W(t, \omega)$ 가 연속적이고 미분가능하다는 가정하에, $W(t-t', \omega-\omega')$ 를 다음과 같이 Taylor 전개식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 W(t-t', \omega-\omega') &= W(t, \omega) \\
 &- \{t'W_t(t, \omega) + \omega'W_\omega(t, \omega)\} \\
 &+ \frac{1}{2} \{t'^2W_{tt}(t, \omega) + 2t'\omega'W_{t\omega}(t, \omega) + \omega'^2W_{\omega\omega}(t, \omega)\} \\
 &+ \dots \tag{13}
 \end{aligned}$$

여기서, 하첨자 t, ω 는 각각 t 와 ω 에 대한 미분을 의미한다.

식 (13)을 식 (7)에 대입하여 스므딩된 위그너-빌 분포함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 W_s(t, \omega) &= W(t, \omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(t', \omega') dt' d\omega' \\
 &- \left\{ W_t(t, \omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t' S(t', \omega') dt' d\omega' + W_\omega(t, \omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega' S(t', \omega') dt' d\omega' \right\} \\
 &+ \left\{ \frac{1}{2} W_{tt}(t, \omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t'^2 S(t', \omega') dt' d\omega' \right. \\
 &+ W_{t\omega}(t, \omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t'\omega' S(t', \omega') dt' d\omega' \\
 &+ \left. \frac{1}{2} W_{\omega\omega}(t, \omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'^2 S(t', \omega') dt' d\omega' \right\} \\
 &+ \dots \tag{14}
 \end{aligned}$$

스므딩시에 신호의 에너지가 보존되기 위하여는 다음식을 만족하여야 한다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(t', \omega') dt' d\omega' = 1 \tag{15}$$

(15)식은 엠비규이티 함수에서 원점의 값, 즉 $A(0, 0)$ 가 1이 되어야 함을 의미하기도 한다. 식 (15)로부터 식 (14)의 우변 첫번째 항은 바로 $W(t, \omega)$ 가 됨을 알 수 있다. 또한, 식 (8)에 나타난 $S(t, \omega)$ 와 $G(\xi, \tau)$ 의 관계와 식 (9)에 나타난 회전 창문함수에 관한 식을 이용하여, 식 (14)으로부터 스므딩에 의한 바이어스 오차를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 E_s(t, \omega) &= W_s(t, \omega) - W(t, \omega) \\
 &= \frac{1}{2\sigma^2 f^2(90^\circ)} W_{tt}(t, \omega) + \frac{1}{2\sigma^2 f^2(0^\circ)} \\
 &\times W_{\omega\omega}(t, \omega) + (CM)W_{t\omega}(t, \omega) \\
 &+ \dots \tag{16}
 \end{aligned}$$

여기서, CM 은 스므딩 창문함수의 크로스 모멘텀(cross momentum)을 나타내며 다음과 같은 값을 갖는다.

$$CM = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t'\omega' S(t', \omega') dt' d\omega' \tag{17}$$

식 (17)에 나타낸 크로스 모멘텀은 창문함수의 비정형화되고 회전하는 정도를 나타내는 지수로 가우시안 창문함수, 한 창문함수(Hann window)등 시간과 주파수축에 대해 대칭인 기존의 창문함수들에서는 0의 값을 갖는다. 따라서, 식 (16)의 우변 세번째 항 역시 기존의 창문함수 적용시 소멸되는 항이 되며, 회전 창문함수를 다른 창문함수와 구별짓는 중요한 요소가 된다. 즉, 크로스 모멘텀이 갖는 성질과 같이 회전 창문함수의 비정형화되고 회전한 정도를 반영하는 항이 됨을 알 수 있다.

식 (16)의 우변 첫번째 항과 두번째 항으로부터, 스므딩에 의한 바이어스 오차는 위그너-빌 분포함수의 2차 미분값에 비례하며 엠비규이티 함수에서의 창문함수 크기(σ)에 반비례함을 알 수 있다. 위그너-빌 분포함수의 2차 미분값이 크다는 것은 뾰족한 피크를 의미하며 이는 스므딩의 영향을 많이 받게 된다. 또한, 엠비규이티 함수에서의 큰 창문함수, 즉 작은 스므딩 창문함수를 적용할 경우 스므딩의 영향은 작게 됨 역시 쉽게 파악할 수 있다.

간단한 신호의 경우에도 회전 창문함수를 수학적으로 계산하는 것은 많은 노력을 필요로 하는 어려운 작업이다. 따라서, 본 논문에서는 식 (16)의 타당성을 검증하기 위한 방법으로 전산기 모의실험을 수행하고자 한다. 모의실험시 연속적이고 미분가능한 위그너-빌 분포함수를 얻기 위한 목적으로 가우시안 형태를 갖는 위그너-빌 분포함수를 사용하였으며, 그에 대한 모의실험 결과를 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3의 A는 위그너-빌 분포함수를 나타내는데, 시간-주파수 평면상에서 45°의 각도를 따라 길게 분포하는 특성을 보이고 있다. B는 A의 위그너-빌 분포함수에 회전 창문함수를 적용하여 스므딩된 위그너-빌 분포함수를 나타낸다. 이때 회전 창문함수의 크기, 즉 $\sigma = 8\Delta$ 로하였는데, Δ 는 시간-주파수 평면상에서 샘플링 간격을 나타내며 전체 샘플수는 시간과 주파수

축 모두 128 개로 하였다. C는 B에서 A를 직접 감소하여 구한 실제 바이어스 오차를 나타내며, D는 A에 식 (16)의 2차 미분항까지만을 적용하여 구한 예측 바이어스 오차를 나타낸다. C와 D를 비교해 볼 때, 절대값에서는 약간의 차이를 보이지만 그 형태는 비슷한 경향을 보이고 있으며, 따라서 스므딩에 의한 바이어스 오차를 예측하는 식 (16)의 적용 가능성이 있다고 할 수 있다.

Fig. 4는 식 (16)의 분석 결과를 나타낸다. A는 Fig. 3의 C와 D의 차이를 나타내고 있는데, 원래의 위그너-빌 분포함수의 값이 급격히 변하는 지점에서 상대적으로 큰 차이를 나타내고 있다. 이 부분의 정확한 예측을 위하여는 더 고차의 항까지를 필요로 함을 추론할 수 있을 것이다. Fig. 4의 B, C, D는 각각 식 (16)의 우변 첫번째, 두번째, 세번째 항을 나타낸다. D를 볼 때, B나 C의 값에 비교될 정도의 크기를 가지고 있으며, 따라서 D에 나타난 크로스모우멘텀항이 회전 창문함수에 의한 스므딩시에 상대적으로 큰 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

4. 회전 창문함수를 적용한 시간-주파수 분석기법의 기본 성질

제 2 장에서는 엠비규이티 함수의 성질을 이용하여 혼신성분을 감소시키기 위한 목적으로 제안된 회전 창문함수를 살펴보았다. 회전 창문함수의 적용에 의한 스므딩된 위그너-빌 분포함수는 어떤 형태로든 변형을 겪게 되며, 이를 제 3 장에서 다룬 바 있다. 이때, 위그너-빌 분포함수의 변형에 따라 원래 위그너-빌 분포함수가 갖는 시간과 주파수 변수들에 관련된 성질들 또한 변화를 겪게 될 것임을 쉽게 유추할 수 있으며, 제 4 장에서는 회전 창문함수의 적용에 의해 변형된 위그너-빌 분포함수의 성질들에 대하여 살펴보려고 한다.

논의하고자 하는 성질에 대하여, 그 성질을 만족하기 위한 엠비규이티 함수에서의 창문함수가 가져야 하는 제한조건을 살펴본 후, 본 논문에서 논의되는 회전 창문함수가 그러한 조건을 만족하는지의 여부를 파악함으로써 성질의 만족여부를 판단하도록 하겠다. 이때, 제한조건들은 Claasen 과 Mecklenbräuker⁽³⁾을 참조하였다.

여러 성질들 중 첫번째로 논의하고자 하는 것은 시간 이동(time shift)에 관한 성질로서, 이는 신호에서 발생한 이동의 영향이 분포함수에서도 시간축에

대한 같은 양의 이동으로 나타나야 한다는 것이다. 즉, 이 성질은

$$\begin{aligned} \text{if } x(t) \rightarrow W_s(t, \omega), \text{ then} \\ x(t - t_0) \rightarrow W_s(t - t_0, \omega) \end{aligned} \quad (18)$$

으로 설명될 수 있다. 여기서, $x(t)$ 는 신호를, $W_s(t, \omega)$ 는 분포함수를 나타낸다. 시간 이동에 관한 성질을 만족하기 위한 엠비규이티 함수에서의 창문함수에 가해지는 제한조건은 절대시간 t 의 함수가 아니어야 한다는 것이다. 식 (9)에 나타난 회전 창문함수를 볼 때, 이는 시간의 함수가 아님을 알 수 있으며, 따라서 시간 이동에 관한 성질을 만족함을 알 수 있다.

시간축의 시간 이동에 대응하는 주파수축 상에서의 성질은 주파수 변조(frequency modulation)에 관한 것으로서, 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{if } x(t) \rightarrow W_s(t, \omega), \text{ then} \\ x(t)e^{j\omega_0 t} \rightarrow W_s(t, \omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (19)$$

또한, 이 성질을 만족하기 위하여 창문함수에 가해지는 제한조건은 주파수의 함수가 아니어야 한다는 것이고, 회전 창문함수는 이 성질을 만족함을 알 수 있다.

언급한 두 성질은 분포함수가 임의의 시간과 주파수에 대한 정보를 나타내기 위한 기본 조건이 된다. 즉, 임의의 시간과 주파수에서 발생한 현상을 시간-주파수 평면 상에서의 정확한 위치에 표현하기 위한 기본 성질이 되는 것이다.

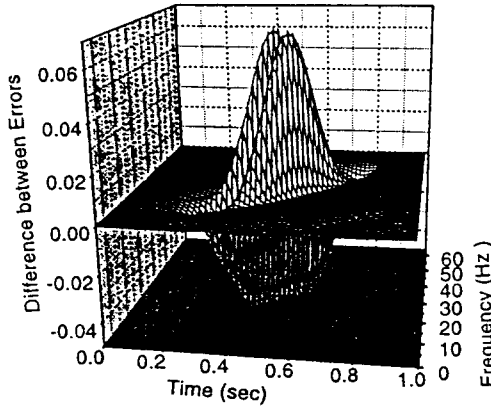
다음으로 생각할 수 있는 성질은 분포함수와 순간 파워(instantaneous power), 파워 스펙트럼(power spectrum)에 관련된 것들이다. 즉, 분포함수의 주파수축을 따른 적분결과는 시간의 함수로 표현되는 순간 파워가 되며, 시간축을 따른 적분결과는 주파수의 함수인 파워 스펙트럼이 되어야 한다는 것이다. 먼저 순간 파워에 대한 성질을 다음과 같이 표현할 수 있으며,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(t, \omega) d\omega = |x(t)|^2 \quad (20)$$

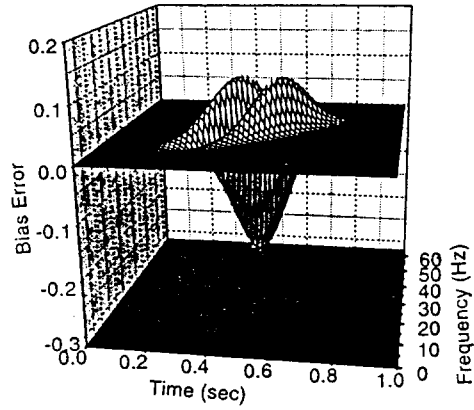
이 성질을 만족하기 위하여 창문함수에 가해지는 제한조건은 다음과 같다.

$$G(\xi, 0) = 1 \quad \text{for all } \xi \quad (21)$$

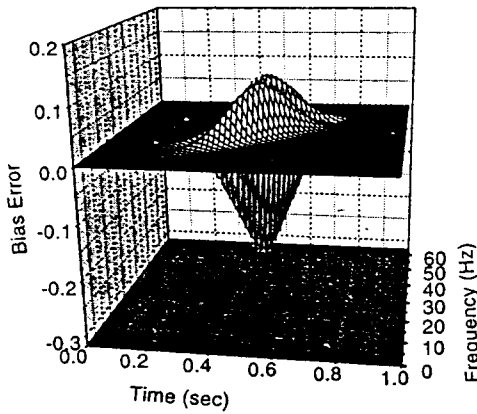
식 (21)을 회전 창문함수를 나타낸 식 (9)를 비교해 볼 때, 회전 창문함수는 식 (21)을 만족하지 않으며, 따라서 순간 파워에 관한 성질을 만족하지 않음을 알 수 있다.



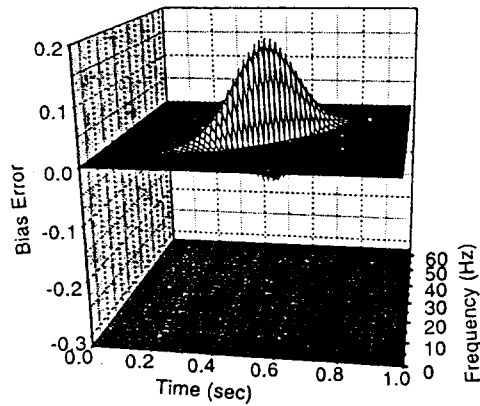
A. Discrepancy between true and estimated errors



B. Error : Second momentum along time



C. Error : Second momentum along frequency



D. Error : Cross momentum

Fig. 4 Discrepancy between true and estimated bias errors and the components of the estimated bias error

분포함수와 파워 스펙트럼에 관한 성질과, 그에 따른 제한조건은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_s(t, \omega) dt = |X(\omega)|^2 \quad (22)$$

$$G(0, \tau) = 1 \text{ for all } \tau \quad (23)$$

여기서, $X(\omega)$ 는 $x(t)$ 의 푸리에 변환을 나타낸다. 회전 창문함수는 (23)식을 만족하지 않으며, 따라서 순간 파워에 관한 성질과 더불어 파워 스펙트럼에 관한 성질 역시 만족하지 않음을 알 수 있다. 순간 파워와 파워 스펙트럼에 관련된 성질들은 marginals라 불리운다⁽⁶⁾.

분포함수와 순간 진동수(instantaneous frequency), 그룹 지연(group delay)에 관한 성질들 역시 시간과 주파수 변수들과 관련된 중요한 성질이 된다. 분포

함수에 대하여 각각 주파수와 시간축을 따른 1차 모멘텀으로 주어지는 순간 진동수와 그룹 지연은 시간-주파수 평면 상에의 정확한 파워의 분포 여부를 판단하는 한 척도가 되기 때문이다. 먼저, 순간 진동수에 관한 성질을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega W_s(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} W_s(t, \omega) d\omega} = \Omega(t) \quad (24)$$

여기서, $\Omega(t)$ 는 시간의 함수인 순간 진동수를 나타낸다. (24)식이 성립하기 위한 제한조건을 살펴보면 다음과 같다.

$$G(\xi, 0) = 1, \left. \frac{\partial}{\partial \tau} G(\xi, \tau) \right|_{\tau=0} = 0 \text{ for all } \xi \quad (25)$$

비슷한 고려를 통해, 그룹 지연에 관한 성질과 그에 따른 제한조건을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t W_s(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} W_s(t, \omega) dt} = T(\omega) \quad (26)$$

$$G(0, \tau) = 1, \left. \frac{\partial}{\partial \xi} G(\xi, \tau) \right|_{\xi=0} = 0 \text{ for all } \tau \quad (27)$$

식 (25)와 식(27)에 나타난 제한조건들과 식(9)의 회전 창문함수를 비교할 때, 회전 창문함수는 순간 진동수와 그룹 지연에 관한 성질을 모두 만족하지 않음을 알 수 있다.

시간-주파수 평면상에 파워의 분포를 나타내기 위한 분포함수는 복소수가 아닌 실수값을 가져야 할 것임을 쉽게 인지할 수 있다. 분포함수가 실수값을 갖기 위하여는 다음식을 만족하여야 하며,

$$W_s(t, \omega) = W_s^*(t, \omega) \quad (28)$$

이에 따른 창문함수에 가해지는 제한조건은 다음과 같다.

$$G(\xi, \tau) = G^*(-\xi, -\tau) \quad (29)$$

회전 창문함수는 식 (29)를 만족하며, 따라서 회전 창문함수를 적용한 분포함수는 실수값을 갖게 됨을 알 수 있다.

실제적인 기계공학의 문제에서 취득할 수 있는 대부분의 신호는 임의의 구간내에서만 값을 갖는 일정 구간 신호가 된다. 이와 같은 신호에 대한 시간-주파수 분석기법 역시 원 신호와 같은 시간 구간내에서만 존재하여야 함을 쉽게 생각할 수 있다. 즉,

$$\text{if } x(t) = 0, |t| > T, \text{ then} \\ W_s(t, \omega) = 0, |t| > T \quad (30)$$

와 같은 관계를 고려할 수 있으며, 이와 같은 성질을 만족하기 위한 창문함수에서의 제한조건은 다음과 같다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \tau) e^{j\xi t} d\xi = 0, |\tau| < 2|t| \quad (31)$$

회전 창문함수에 대하여 식 (31)의 푸리에 변환을 수학적으로 수행하는 것은 불가능하며, 따라서 회전 창문함수가 식 (31)을 만족하는지를 살펴보기 위하여는 정성적인 해석방법이 필요하게 된다. 회전 창문함수에서 임의의 τ 에 대하여 ξ 축을 따른 거동은 일종의 가우시안 함수가 되며, 그에 대한 푸리에 변환,

즉 t 축을 따른 거동 역시 가우시안 형태를 가질 것임을 알 수 있다. 가우시안 함수는 중심값으로부터 지수함수적 감소특성을 보이게 되므로, 엄밀한 의미에서 식 (31)이 나타내는 바와 같이 t 축의 어느 한 구간내로 한정될 수 없게 된다. 따라서, 회전 창문함수의 경우 식 (31)을 만족하지 않으며, 그 결과 식 (30)으로 나타낸 일정구간 신호에 관한 성질을 만족하지 않게 된다.

시간축상에서의 일정구간 신호에 대한 성질을 주파수축상에서의 일정대역 신호에 대하여 확장할 수 있다. 주파수축상에서의 일정대역 신호에 대한 성질과, 이를 만족하기 위한 제한조건은 다음과 같다.

if $X(\omega) = 0, |\omega| > \Omega$, then

$$W_s(t, \omega) = 0, |\omega| > \Omega \quad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = 0, |\xi| < 2|\omega| \quad (33)$$

시간축상의 일정구간 신호에 대한 해석과 비슷한 고려를 통해, 회전 창문함수는 일정대역 신호에 관한

Table. 1 Properties and satisfaction of the distribution applying rotating window

Properties	Satisfaction
if $x(t) \rightarrow W_s(t, \omega)$, then $x(t - t_0) \rightarrow W_s(t - t_0, \omega)$	O
if $x(t) \rightarrow W_s(t, \omega)$, then $x(t) e^{j\omega_0 t} \rightarrow W_s(t, \omega - \omega_0)$	O
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(t, \omega) d\omega = x(t) ^2$	X
$\int_{-\infty}^{\infty} W_s(t, \omega) dt = X(\omega) ^2$	X
$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega W_s(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} W_s(t, \omega) d\omega} = \Omega(t)$	X
$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t W_s(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} W_s(t, \omega) dt} = T(\omega)$	X
$W_s(t, \omega) = W_s^*(t, \omega)$ (Real value)	O
if $x(t) = 0, t > T$, then $W_s(t, \omega) = 0, t > T$	X
if $X(\omega) = 0, \omega > \Omega$, then $W_s(t, \omega) = 0, \omega > \Omega$	X

성질 역시 만족하지 않음을 보여준다.

이상에서 회전 창문함수를 적용한 분포함수의 성질들에 대하여 살펴보았으며, 이를 다시 Table 1에 정리하여 나타내었다. 스므딩에 의해 원래 위그너-빌 분포함수가 만족하였던 성질들에 변화가 발생하였음을 알 수 있는데, 이는 회전 창문함수 뿐만 아니라 가우시안 창문함수와 같은 기존의 창문함수를 적용하였을 경우에도 발생하는 문제가 된다. 다양한 목적을 위하여 위그너-빌 분포함수에 스므딩을 수행할 경우, 원래 위그너-빌 분포함수가 만족하였던 성질들의 위배는 피할 수 없는 현상이다. 그럼에도 불구하고 스므딩된 위그너-빌 분포함수는 특정 목적에 있어서 원래의 위그너-빌 분포함수를 능가하는 성능으로 인해, 각각의 고유한 가치를 갖는다.

5. 결론

본 논문에서는 엠비규이티 함수에서의 실제성분과 혼신성분에 대한 정량적 해석을 토대로 위그너-빌 분포함수에서의 혼신성분을 최소화하기 위한 목적으로 구현된 회전 창문함수를 도입하였다. 엠비규이티 함수에 적용되는 회전 창문함수는 실제성분이 갖는 각도에 따른 정보를 반영하여 효과적인 혼신성분의 감소를 이룰 수 있다.

엠비규이티 함수에 창문함수의 적용은 위그너-빌 분포함수의 스므딩을 의미하며, 따라서 본 논문에서는 회전 창문함수 적용의 영향을 스므딩에 의한 바이어스 오차 면에서 살펴보았다. 시간과 주파수축 모두에 대하여 대칭인 기존의 창문함수와는 달리, 회전 창문함수의 적용시 창문함수의 크로스 모멘텀이 중요한 역할을 함을 알 수 있었다.

회전 창문함수 해석의 완결을 위하여, 회전 창문함수를 적용한 분포함수의 특성을 파악하는 것이 필요하다. 이를 위하여 본 논문에서는 시간과 주파수 변수들과 관련된 성질들에 대하여, 그 성질을 만족하기 위해 창문함수에 가해지는 제한조건을 살펴보았다. 회전 창문함수를 특정 성질에 관련된 제한조건과 비교함으로써 성질의 만족 여부를 판단할 수 있었다.

참고 문헌

(1) Y.-H. Kim and B.-D. Lim, "Instantaneous Frequency of a Transient Mechanical Signa-

ture and Its Estimation by a Moving Window: Applicability and Physical Interpretation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8(3), pp.381~393, 1994.

(2) 박연규, 김양한, "순간 진동수 추정 방법론의 비교와 외팔보, 엔진 블록 및 자동차 문 진동에의 적용예," *한국소음진동공학회지*, 3(4), pp.341~352, 1993.

(3) T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbräuker, "The Wigner Distribution - A Tool for Time-Frequency Signal Analysis: Part III: Relations with Other Time-Frequency Signal Transformations," *Philips J. Res.*, 35, pp.372~389, 1980.

(4) D.E. Newland, *Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, Longman Singapore Publishers Pte Ltd., pp.295~370, 1993.

(5) E. Wigner, "On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium," *Physical Review*, 40, pp.749~759, 1932.

(6) L. Cohen, "Time-Frequency Distribution - A Review," *Proceedings of the IEEE*, 77(7), pp.941~981, 1989.

(7) T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbräuker, "The Wigner Distribution - A Tool for Time-Frequency Signal Analysis: Part I: Continuous-Time Signals," *Philips J. Res.*, 35, pp.217~250, 1980.

(8) H.-I. Choi and W.J. Williams, "Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-37(6), pp.862~871, 1989.

(9) Y.-K. Park and Y.-H. Kim, "Bias Error due to Windows for the Wigner-Ville Distribution Estimation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 9(6), pp.675~684, 1995.

(10) T.J. Wahl and J.S. Bolton, "The Application of the Wigner Distribution to the Identification of Structure-Borne Noise Components," *J. of Sound and Vibration*, 163(1), pp.101~122, 1993.

(11) Y.-K. Park and Y.-H. Kim, "A Method to Minimize the Cross-Talk of Wigner-Ville Distribution," Accepted for *Mechanical Systems and Signal Processing*.

(1) 박연규, 김양한, "위그너-빌 분포함수에서의 혼신성 분저감 방법: 회전 창문함수," *한국소음진동공학회 투고*