

〈논 문〉

순환대칭으로 다중연결된 구조물의 유한요소 진동해석

Finite Element Vibration Analysis of Multiply Interconnected Structure
with Cyclic Symmetry

김 창 부* · 안 종 섭** · 심 수 섭**

Chang-Boo Kim, Jong-Seob Ahn and Su-Seob Shim

(1997년 3월 28일 접수 ; 1997년 5월 26일 심사완료)

Key Words : Cyclic Symmetry (순환대칭), Simply Interconnected Structure (단순연결 구조물), Multiply Interconnected Structure (다중연결 구조물), Discrete Fourier Transform (이산 푸리에 변환), Number of Nodal Diameter (절직경수)

ABSTRACT

In this paper, a method of finite element analysis is presented for efficient calculation of vibration characteristics of not only simply interconnected structure with cyclic symmetry but also multiply interconnected structure with cyclic symmetry by using discrete Fourier transform by means of a computer with small memory in a short time. Simply interconnected structure means it is composed of substructures which are adjacent themselves in circumferential direction. On the other hand, multiply interconnected structure means it is composed of substructures which are not adjacent themselves in circumferential direction. First, a mathematical model of multiply interconnected structure with cyclic symmetry is defined. The multiply interconnected structure is partitioned into substructures with the same geometric configuration and constraint equations to be satisfied on connecting boundaries are defined. Nodal displacements and forces are transformed into complex forms through discrete Fourier transform and then finite element analysis is performed for just only a representative substructure. In free vibration analysis, natural frequencies of a whole structure can be obtained through a series of calculation for a substructure along the number of nodal diameter. And in forced vibration analysis, forced response of whole structure can be achieved by using inverse discrete Fourier transform of results which come from analysis for a substructure.

1. 서 론

순환대칭구조는 원주방향으로 동일한 형상이 반복되는 특징을 가지고 있다. 이런 순환대칭구조는 원자력 발전소의 냉각탑, 터빈익차, 펌프 임펠러, 발전기 회전자, 선박 프로펠러, 치차등에서 흔히 찾아

볼 수 있다.

순환대칭 구조물의 정적해석 또는 진동해석을 구조물 전체를 유한요소로 모델링하여 수행하는 경우에는 컴퓨터의 작업용량이 커지고 계산시간이 길게 된다. 이와같은 단점을 회피하기 위해서 순환대칭 구조물을 원주방향으로 주기적인 부분구조로 분할하여 대표적인 부분구조 한 개만을 유한요소로 모델링하고 부분구조의 순환대칭성을 이용하여 전체구조물의 정적특성 및 진동특성을 해석하는 방법에 관한 연구가 많이 수행되었다^(1~5). 그러나 이와 같은 연구

*정회원, 인하대학교 공과대학 자동화공학과

**인하대학교 대학원

결과의 거의 대부분은 부분구조가 인접하는 다른 부분구조에 단순하게 연결된 구조물의 경우에만 적용 가능하고 인접하지 않는 부분구조에도 연결된 즉 다중연결된 구조물에 대해서는 적용이 어렵다.

따라서, 본 논문에서는 순환대칭으로 다중연결된 구조물의 수학적 모델을 단순연결은 물론 다중연결의 경우도 포함할 수 있도록 정의함으로써 단순연결로만 이루어진 경우보다 일반적인 모델을 제안한다. 그리고 이와같은 다중연결된 구조물의 진동특성을 작은 작업용량의 컴퓨터에서 짧은 시간에 해석할 수 있는 방법을 제시하고자 한다. 그 방법으로는 순환대칭으로 단순연결 혹은 다중연결된 구조물을 원주 방향으로 주기적인 부분구조로 분할하여 대표적인 부분구조 한 개만을 유한요소로 모델링하고 이산푸리에 변환을 이용하여 부분구조의 운동방정식과 분할에 의해 생성된 부분구조의 경계면에서 만족되어야 하는 구속방정식을 유도하고 유한요소 상용 프로그램 EMRC NISA II⁽⁶⁾를 사용하여 시험모델의 진동특성을 해석한다. 부분구조로 분할하여 유한요소로 모델링해서 계산된 결과와 전체구조를 유한요소로 모델링해서 계산된 결과를 비교한다.

2. 순환대칭구조

원주방향으로 동일한 형상이 반복되는 구조를 순환대칭구조라 한다. 즉 형상이 임의의 각에서 정의되어 있을 때 특정한 각도를 회전시켜도 동일한 형상을 갖게 된다. Fig. 1부터 Fig. 3까지는 단순연결된 구조물의 전체형상과 그것을 n 개의 동일한 형상의 부분구조로 분할하고 그 k 번째 부분구조를 나타낸 것이다. X 축은 순환대칭축이며 좌표계 $\{x_k, y_k, z_k\}$ 는 k 번째 부분구조에 고착된 좌표계이다.

앞에서 보았듯이 전체구조물로부터 분할된 부분구조의 경계면이 서로 이웃한 경우의 순환대칭구조를 단순연결된 순환대칭구조라고 정의한다. 이와는 달리 부분구조의 경계면이 서로 이웃하지 않는 경우를 포함하고 있는 순환대칭구조를 다중연결된 순환대칭구조라고 정의한다. 다중연결된 순환대칭구조에 대한 형상을 연결형태에 따라서 분류하여 보면 다음과 같다.

순환대칭구조가 3개의 부분구조로 분할될 때 Fig. 4에서 보이는 바와 같이 3가지 연결형태가 있을 수 있다. 첫 번째 그림은 부분구조가 공통연결경계 C 만을 갖는 형상을 나타낸 것이고 이와같은 연결형태를 공통연결형태 T_c 라고 정의한다. 두 번째 그림은

부분구조가 인접한 부분구조와 직접 연결된 즉 단순연결된 형상을 나타낸 것으로 이와같은 연결형태를 단순연결형태 T_1 이라고 정의한다. 여기서 부분구조의 연결경계는 음의 연결경계 N_1 과 양의 연결경계 P_1 으로 구분된다. 세 번째 그림은 공통연결형태 T_c 와 단순연결형태 T_1 을 동시에 갖는 경우이다.

Fig. 5는 전체구조를 4등분한 경우이다. 첫 번째와 두 번째 그림은 각각 공통연결형태 T_c 와 단순연결형태 T_1 만을 갖는 경우를 나타내고 세 번째 그림은 부분구조가 인접한 부분구조를 하나 건너서 다른 부분

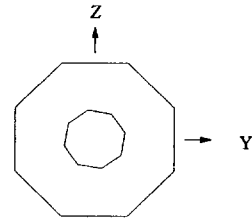


Fig. 1 Geometry of whole structure

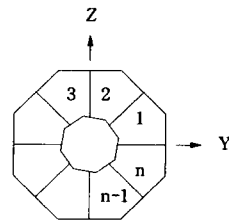


Fig. 2 Partition of whole structure

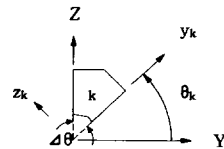


Fig. 3 Geometry of substructure

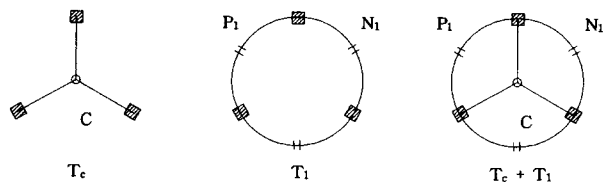


Fig. 4 Interconnected type of structure ($n=3$)

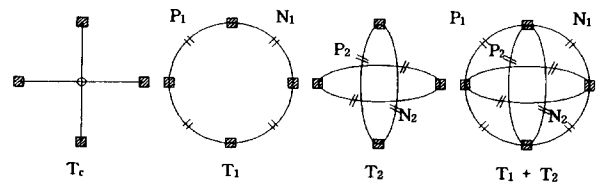


Fig. 5 Interconnected type of structure ($n=4$)

구조에 연결된 형상을 나타낸 것으로서 이와같은 연결형태를 다중연결형태 T_2 라고 정의하고 부분구조의 연결경계는 N_2 와 P_2 로 구분된다. 네 번째 그림은 단순연결형태 T_1 과 다중연결형태 T_2 를 동시에 갖고 있다. 그리고 Fig. 6과 Fig. 7는 여러형태로 연결된 순환대칭구조물의 예를 나타내고 있다. Fig. 6에서는 공통연결형태 T_c , 단순연결형태 T_1 및 다중연결형태 T_2 를 동시에 갖고 있으며 Fig. 7에서는 단순연결형태 T_1 및 다중연결형태 T_3 를 동시에 갖고있다.

일반적으로 연결형태 T_j 는 서로 연결된 부분구조 번호의 차이가 양의 정수인 j 를 지수로 갖는 연결형태로서 부분구조는 음의 연결경계 N_j 와 양의 연결경계 P_j 를 갖는다. 따라서 순환대칭구조물의 연결형태는 공통연결형태가 있는 경우에 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$T_c + \sum_{j \in J} T_j \quad \text{with } J = \{j_1, j_2, j_3, \dots, j_r\} \quad (1)$$

여기서 J 는 연결형태 지수집합이고 r 은 연결경계 형태의 개수를 나타내며 j_i 는 J 의 i 번째 다중연결형태의 지수이다. 또한 r 과 j_i 는 각각 식 (2)와 식

(3)을 만족해야 한다.

$$0 \leq r \leq n/2 \quad (2)$$

$$j_1 < j_2 < \dots < j_r \quad (3)$$

$n+j$ 번째 부분구조는 j 번째 부분구조이므로 부분구조의 번호를 나타내는 첨자는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$n+j=j \quad (4)$$

연결형태 T_j 에서 k 번째 부분구조의 양의 연결경계와 $k+j$ 번째 부분구조의 음의 연결경계는 동일경계이므로 연결경계에서의 변위는 다음과 같은 조건을 만족시켜야 한다.

$$\vec{u}_{P_j}^k = \vec{u}_{N_j}^{k+j} \quad (5)$$

여기서, $\vec{u}_{P_j}^k$ 는 연결형태 T_j 에서 k 번째 부분구조의 양의 연결경계 P_j 상에 있는 질점의 변위벡터이고 $\vec{u}_{N_j}^{k+j}$ 는 $k+j$ 번째 부분구조의 음의 연결경계 N_j 상에 있는 질점의 변위벡터이다.

3. 운동방정식

3.1 좌표변환

전체 구조물로부터 분할된 부분구조 각각에 좌표계를 설정하면 순환대칭으로 $k+j$ 번째 좌표계는 k 번째 좌표계로부터 X 축에 대하여 θ_j 만큼 회전되어 있으므로 k 번째 좌표계에 대한 $k+j$ 번째 좌표계의 회전행렬은 다음과 같다.

$$R^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ 0 & \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서

$$\theta_j = j\Delta\theta \quad (7)$$

$$\Delta\theta = 2\pi/n \quad (8)$$

따라서 공통연결경계 C 에서의 질점변위 성분벡터는 다음식을 만족해야 한다.

$$\vec{u}_C^k = R^1 \vec{u}_C^{k+1} \quad (9)$$

또한 공통연결경계를 제외한 연결경계에서의 질점 변위 성분벡터는 다음식을 만족해야 한다.

$$\vec{u}_{P_j}^k = R^j \vec{u}_{N_j}^{k+j} \quad \text{for } j \in J \quad (10)$$

3.2 부분구조의 운동방정식

전체구조물을 부분구조로 분할하므로써 연결경계

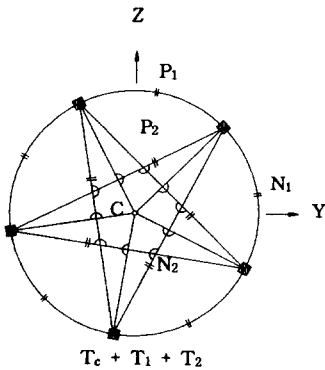


Fig. 6 Geometry of multiply interconnected structure ($n=5$)

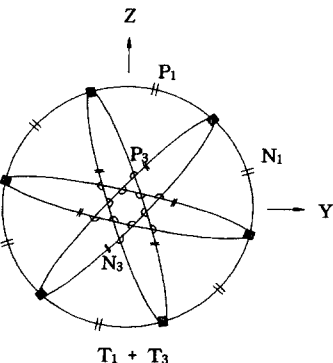


Fig. 7 Geometry of multiply interconnected structure ($n=6$)

는 부분구조의 경계를 이루게 된다. 이러한 연결경계에서의 구속조건을 고려하므로써 부분구조의 운동을 해석할 수 있다.

k 번째 부분구조의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M^s \ddot{v}^k(t) + C^s \dot{v}^k(t) + K^s v^k(t) = f^k(t) \quad (11)$$

식 (11)에서 $v^k(t)$ 는 k 번째 부분구조의 k 번째 좌표계 $\{x_k, y_k, z_k\}$ 에 대한 절점변위 성분벡터이며 내부절점성분벡터 v_i^k , 양의 경계절점변위 성분벡터 $v_{P_j}^k, j \in J$, 음의 경계절점변위 성분벡터 $v_{N_j}^k, j \in J$, 공통절점변위 성분벡터 v_c^k 로 구성된다. 또한 $f^k(t)$ 는 절점외력 성분벡터로서 $v^k(t)$ 와 대응되게 구성된다. 또한 M^s, C^s 및 K^s 는 부분구조의 질량행렬, 감쇠행렬 및 강성행렬로서 모든 부분구조에 대하여 동일하다.

부분구조의 연결경계에서의 절점변위 성분벡터는 식 (9)와 식 (10)으로부터 얻어지는 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$v_c^k = A_c v_c^{k+1} \quad (12)$$

$$v_{P_j}^k = A_j v_{N_j}^{k+j} \quad \text{for } j \in J \quad (13)$$

3.3 자유도수

한 개의 부분구조의 내부절점 자유도수를 N_I , 부분구조가 공통으로 X 축 상에 절점을 갖고 있는 경우에 공통절점 자유도수를 N_C , 공통절점을 제외한 연결경계의 한쪽 경계절점 자유도수를 N_{P_j} 라고 하면 부분구조의 자유도수 N_S 는 다음과 같다.

$$N_S = N_I + N_C + 2 \sum_{j \in J} N_{P_j} \quad (14)$$

또한, 전체구조의 독립 자유도수 N_W 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_W &= nN_I + n \sum_{j \in J} N_{P_j} \\ &= nN_S - n \sum_{j \in J} N_{P_j} - (n-1)N_C \end{aligned} \quad (15)$$

부분구조의 운동방정식과 연결경계에서의 절점변위 관계식을 이용하여 전체구조의 운동방정식을 유도할 수 있다. 이와같은 경우 부분구조의 운동방정식 (11)의 자유도수는 N_S 이므로 n 개의 부분구조의 운동방정식으로 구성되는 전체 운동방정식의 자유도수는 nN_S 이고, 연결경계에서의 절점변위구속식 (12)와 (13)의 개수는 $N_C + \sum_{j \in J} N_{P_j}$ 이므로 n 개의 연결경계에서의 절점변위구속식으로 구성되는 전체변위구속식은 $n(N_C + \sum_{j \in J} N_{P_j})$ 개의 구속식에서 공통절점변

위의 순환구속식으로 인한 N_C 개의 종속식을 제외하면 $n(N_C + \sum_{j \in J} N_{P_j}) - N_C$ 개의 독립된 식으로 구성된다. 따라서 전체구조의 운동방정식의 독립된 자유도수는 전체 운동방정식의 자유도에서 독립된 전체 변위구속식의 개수를 빼면 식 (15)의 N_W 와 일치하게 된다.

4. 이산푸리에 변환

4.1 절점변위의 변환

이산 푸리에 변환(Discrete Fourier Transform)을 이용하여 순환대칭구조에 적용시키면 절점변위 성분벡터는 다음과 같은 원주방향 조화형으로 표현된다⁽⁵⁾.

$$v^k(t) = \sum_{m=0}^{n-1} \text{Re}(v_m^c(t) e^{im\theta_k}) \quad \text{for } k=1, \dots, n \quad (16)$$

여기서 i 는 $\sqrt{-1}$ 이고 지수 m 은 절직경수 (number of nodal diameter)^(2,3)를 나타낸다. 그리고 $v_m^c(t)$ 는 지수 m 에 따라서 변환된 복소절점변위 성분벡터로서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} v_m^c(t) &= v_m^r(t) + i v_m^i(t) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v^k(t) e^{-im\theta_k} \quad \text{for } m=0, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (17)$$

위의 식 (16)와 식 (17)은 이산 푸리에 변환의 짝을 이룬다.

식 (16)을 조화함수형으로 표현하면 다음과 같다.

$$v^k = v_0^r + \sum_{m=1}^n (v_m^r \cos m\theta_k - v_m^i \sin m\theta_k) \quad (18)$$

여기서

$$v_m^r = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (v^k \cos m\theta_k) \quad (19)$$

$$v_m^i = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (v^k \sin m\theta_k) \quad (20)$$

그런데 $(n-m)\theta_k = nk\Delta\theta - m\theta_k = 2\pi k - m\theta_k$ 이므로 식 (18)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} v^k &= v_0^r + 2 \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (v_m^r \cos m\theta_k - v_m^i \sin m\theta_k) \\ &\quad + (\text{if } n \text{ is even}) v_{n/2}^r \cos \frac{n}{2} \theta_k \end{aligned} \quad (21)$$

상기식에서

$$p = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{n}{2} - 1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \quad (22)$$

4.2 외력의 변환

절점외력 성분벡터를 절점변위 성분벡터의 변환과 유사하게 변환시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^k &= \mathbf{f}_0^R + 2 \sum_{m=1}^p (\mathbf{f}_m^R \cos m\theta_k - \mathbf{f}_m^I \sin m\theta_k) \\ &+ (\text{if } n \text{ is even}) \mathbf{f}_{n/2}^R \cos \frac{n}{2} \theta_k \end{aligned} \quad (23)$$

여기서

$$\mathbf{f}_m^R = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mathbf{f}^k \cos m\theta_k) \quad (24)$$

$$\mathbf{f}_m^I = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mathbf{f}^k \sin m\theta_k) \quad (25)$$

4.3 운동방정식 및 변위 구속식의 변환

n 개의 부분구조에 대한 선형운동방정식 및 연결경계에서의 변위구속식을 이산 푸리에 변환하면 임의의 부분구조에 대하여 변환된 선형운동방정식 및 변환된 변위구속식이 얻어진다. 즉, $k=1, \dots, n$ 에 대하여 부분구조의 운동방정식 (11) 및 연결경계 변위 구속식 (12) 및 (13)에 식 (21) 및 식 (23)를 대입하여 지수 m 에 따라서 정리하면 임의의 부분구조에 대하여 다음과 같이 변환된 변위구속식과 함께 $1+2p$ (if n is even) $1=n$ 개의 변환된 운동방정식을 얻을 수 있다.

(1) $m=0$ 일 때

부분구조의 변환된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}^S \ddot{\mathbf{v}}_0^R + \mathbf{C}^S \dot{\mathbf{v}}_0^R + \mathbf{K}^S \mathbf{v}_0^R = \mathbf{f}_0^R \quad (26)$$

그리고 공통절점에서의 변환된 변위 구속식은 다음과 같다

$$\mathbf{v}_{0c}^R = \mathbf{A}_c \mathbf{v}_{0c}^R \quad (27)$$

공통절점을 제외한 연결경계에서의 변환된 변위 구속식은 다음과 같다.

$$\mathbf{v}_{0P_j}^R = \mathbf{A}_j \mathbf{v}_{0N_j}^R \quad \text{for } j \in J \quad (28)$$

(2) $1 \leq m \leq p$ 일 때

부분구조에 대한 변환된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^S \ddot{\mathbf{v}}_m^R + \mathbf{C}^S \dot{\mathbf{v}}_m^R + \mathbf{K}^S \mathbf{v}_m^R &= \mathbf{f}_m^R \\ \mathbf{M}^S \ddot{\mathbf{v}}_m^I + \mathbf{C}^S \dot{\mathbf{v}}_m^I + \mathbf{K}^S \mathbf{v}_m^I &= \mathbf{f}_m^I \end{aligned} \quad (29)$$

그리고 공통절점에서의 변환된 변위 구속식은 다음과 같다

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{mc}^R &= \mathbf{A}_c (\mathbf{v}_{mc}^R \cos \theta_m - \mathbf{v}_{mc}^I \sin \theta_m) \\ \mathbf{v}_{mc}^I &= \mathbf{A}_c (\mathbf{v}_{mc}^R \sin \theta_m + \mathbf{v}_{mc}^I \cos \theta_m) \end{aligned} \quad (30)$$

공통연결경계를 제외한 연결경계에서의 변환된 변위구속식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{mP_j}^R &= \mathbf{A}_j (\mathbf{v}_{mN_j}^R \cos j\theta_m - \mathbf{v}_{mN_j}^I \sin j\theta_m) \\ \mathbf{v}_{mP_j}^I &= \mathbf{A}_j (\mathbf{v}_{mN_j}^R \sin j\theta_m + \mathbf{v}_{mN_j}^I \cos j\theta_m) \quad \text{for } j \in J \end{aligned} \quad (31)$$

여기서

$$\theta_m = m\Delta\theta \quad (32)$$

(3) n 이 짝수이고 $m=n/2$ 일 때

부분구조에 대한 변환된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}^S \ddot{\mathbf{v}}_{n/2}^R + \mathbf{C}^S \dot{\mathbf{v}}_{n/2}^R + \mathbf{K}^S \mathbf{v}_{n/2}^R = \mathbf{f}_{n/2}^R \quad (33)$$

그리고 공통절점에서의 변환된 변위 구속식은 다음과 같다

$$\mathbf{v}_{n/2c}^R = -\mathbf{A}_c \mathbf{v}_{n/2c}^R \quad (34)$$

공통절점을 제외한 연결경계에서의 변환된 변위 구속식은 다음과 같다.

$$\mathbf{v}_{n/2P_j}^R = (-1)^j \mathbf{A}_j \mathbf{v}_{n/2N_j}^R \quad \text{for } j \in J \quad (35)$$

부분구조의 해석시에는 m 이 0과 $n/2$ 경우는 허수부가 존재하지 않으므로 대표적인 하나의 부분구조만 존재하지만 m 이 1과 p 사이인 경우는 허수부의 해석이 요구되므로 대표적인 부분구조의 같은 위치에 또 하나의 동일한 가상적 부분구조가 중복되도록 한다. 그리고 그 실수부에 해당하는 부분구조의 연결경계와 허수부에 해당하는 부분구조의 연결경계에서는 위에서 제시된 변위 구속식을 만족하도록 한다.

4.4 자유도수

$m=0$ 일 때 변환된 운동방정식 (26)의 자유도수는 N_s 이고 변환된 변위구속식 (27)와 (28)중에서 독립된 구속식의 갯수는 $N_{0c} + \sum_{j \in J} N_{P_j}$ 이다. 따라서 변환된 운동방정식의 독립된 자유도수는 $N_s - N_{0c} - \sum_{j \in J} N_{P_j}$ 이다.

$1 \leq m \leq p$ 일 때 변환된 운동방정식 (29)의 자유도수는 $2N_s$ 이고 변환된 변위구속식 (30)와 (31)중에서 독립된 구속식의 갯수는 $2N_{mc} + 2 \sum_{j \in J} N_{P_j}$ 이다. 따라서 변환된 운동방정식의 독립된 자유도수는 $2(N_s - N_{mc} - \sum_{j \in J} N_{P_j})$ 이다.

$-\sum_{j \in J} N_{Pj}$)이다.

n 이 짝수이고 $m=n/2$ 일 때 변환된 운동방정식 (33)의 자유도수는 N_S 이고 변환된 변위구속식 (34)와 (35)중에서 독립된 구속식의 갯수는 $N_{n/2c} + \sum_{j \in J} N_{Pj}$ 이다. 따라서 변환된 운동방정식의 독립된 자유도수는 $N_S - N_{n/2c} - \sum_{j \in J} N_{Pj}$ 이다.

그런데 공통절점에서의 변환된 변위 구속식에서 독립된 전체 구속식의 갯수는

$$N_{0c} + \sum_{m=1}^p 2N_{mc} + (\text{if } n \text{ is even}) N_{n/2c} = (n-1)N_C \quad (36)$$

가 되어야 하므로 변환된 전체운동방정식의 독립자유도수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & (N_S - N_{0c} - \sum_{j \in J} N_{Pj}) + \sum_{m=1}^p 2(N_S - N_{mc} - \sum_{j \in J} N_{Pj}) \\ & + (\text{if } n \text{ is even}) (N_S - N_{n/2c} - \sum_{j \in J} N_{Pj}) \\ & = nN_S - (n-1)N_C - n \sum_{j \in J} N_{Pj} \end{aligned} \quad (37)$$

따라서 식 (15)와 식 (37)으로부터 전체구조의 독립자유도수와 변환전의 전체운동방정식의 독립자유도수 그리고 변환후의 전체운동방정식의 독립자유도수가 모두 일치함을 알 수 있다.

5. 수치해석 결과

본 논문에서는 상용 F. E. M. 프로그램 EMRC NISA II를 사용하여 단순연결된 구조물의 고유진동 해석 및 다중연결된 구조물에 대해 고유진동해석, 감쇠 강제진동해석을 수행하였다.

5.1 고유진동해석

(1) 완전자유 정사각평판

네변이 모두 자유단이며 가로, 세로의 길이가 1m 이고 두께가 5mm 인 정사각평판에 대하여 고유진동 해석을 수행하였다. 한 요소당 8개의 절점을 가진 3 차원 일반 쉘요소를 사용하여 사각평판을 유한요소 분할하였으며 각 절점은 6개의 자유도를 가지고 있다. 또한, 평판의 물성치는 다음과 같다.

Young 탄성계수 : $2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$

Poisson 비 : 0.3

밀도 : 7850 kg/m^3

전체구조의 형상과 해석에 필요한 유한요소모델을 Fig 8. 에 나타내었다. 전체구조를 4개의 부분구조로

분할하고 그 부분구조를 Fig 9.에 나타내었다.

해석에 필요한 자유도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_I &= 450 & N_C &= 6 \\ N_{P1} &= 60 & N_S &= 576 \\ N_W &= 2046 & N_{0c} &= 4 \\ N_{1c} &= 4 & N_{2c} &= 6 \end{aligned}$$

전체구조에 대하여 24개의 고유진동수를 구해보았고, 부분구조에 대해서는 $m=0$ 일 때 6개, $m=1$ 일 때 12개, $m=2$ 일 때 각각 6개의 진동수를 구하여 그 중 강제모드를 제외한 10개의 저차진동수를

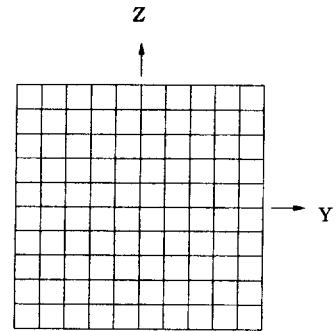


Fig. 8 FEM model for whole structure of square plate

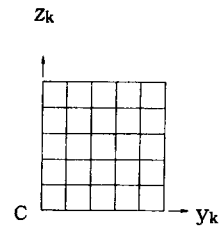


Fig. 9 FEM model for substructure

Table 1 Natural frequency of square plate (Hz)

Mode No.	Whole structure	Substructure	m
1	1.63478E+01	1.63478E+01	2
2	2.38196E+01	2.38196E+01	2
3	2.95009E+01	2.95009E+01	0
4	4.22129E+01	4.22129E+01	1
5	4.22129E+01	4.22129E+01	1
6	7.42977E+01	7.42977E+01	1
7	7.42977E+01	7.42977E+01	1
8	7.71868E+01	7.71868E+01	0
9	8.41320E+01	8.41320E+01	0
10	9.38390E+01	9.38390E+01	2

Table 1에 나타내었다. 고유진동수는 두 경우에 일치하고 있다.

강체모드는 $m=0$ 일 때 2개, $m=1$ 일 때 4개, $m=2$ 일 때 0개로서 총 6개이다.

(2) 다중연결된 8각형 평면 순환대칭구조

공통절점으로부터 원주방향으로의 길이가 1.5m 이고 단면의 외경이 10cm, 두께가 1cm인 중공 보로 다중연결된 Fig. 10과 같은 8각형구조물에 대해 자유진동해석을 수행하였다. 1개의 요소가 2개의 절점을 가진 3차원 보요소를 사용하여 구조물을 유한요소분할하였으며 각 절점은 6개의 자유도를 가지고 있다. 보의 물성치는 평판의 물성치와 같다.

Fig. 11는 Fig. 10과 같이 다중연결된 구조물을 단순연결로 구성된 것처럼 생각하고 연결경계를 분할하여 유한요소로 모델링한 부분구조 그림이다. Fig. 12은 부분구조가 다중연결로 모델링 된 것을 나타낸 것이다. 여기서는 단순연결로 이루어진 구조물과 결과를 비교하기위해서 단순연결로 된 것의 절점을 포함하도록 분할하였다. 다중연결된 구조물은 단순연결된 것도 포함하면서 보다 적은 절점으로도 유한요

소 모델링을 가능하게 함으로서 똑같은 결과를 산출할 수 있음을 보여준다. Fig. 10는 평면 순환대칭구조이므로 보와 보가 교차하는 곳에서는 절점은 중복되지만 본 해석에서는 서로 다른 절점으로 간주하고 해석하였다.

먼저 단순연결형태의 경우(T_1)의 8각형 평면 순환대칭구조에서 공통절점을 고정시켰다.

이때 해석에 필요한 자유도는 다음과 같다.

$$N_I=18 \quad N_C=0 \quad N_{P1}=36 \quad N_S=90 \quad N_W=432$$

그리고 계산된 고유진동수는 전체구조에 대해서는 50개이고 부분구조에 대해서는 $m=0$ 일 때 7개, $m=1$ 일 때 12개, $m=2$ 일 때 12개, $m=3$ 일 때 14개, $m=4$ 일 때 5개이다. 계산에 소요된 시간은 전체구조에 대해서는 123.91초이고 부분구조에 대해서는 $m=0$ 일 때 8.9초, $m=1$ 일 때 14.5초, $m=2$ 일 때 11.21초, $m=3$ 일 때 14.77초, $m=4$ 일 때 7.53초이다.

다음은 다중연결형태의 경우($T_1+T_2+T_3$)의 8각형 평면 순환대칭구조에서 공통절점을 고정시키고 해석을 수행하였다. 해석에 필요한 자유도는 다음과 같다.

$$N_I=36 \quad N_C=0 \quad N_{P1}=6 \quad N_{P2}=6 \\ N_{P3}=6 \quad N_S=72 \quad N_W=432$$

계산된 고유진동수는 전체구조에 대해서는 50개이고 부분구조에 대해서는 $m=0$ 일 때 7개, $m=1$ 일 때 12개, $m=2$ 일 때 12개, $m=3$ 일 때 14개, $m=4$ 일 때 5개이다. 그 중 6개의 최저차 고유진동수를 Table 2에 나타내었다.

이때, 소요된 시간은 전체구조에 대해서는 123.91초이고 부분구조에 대해서는 $m=0$ 일 때 10.82초, $m=1$ 일 때 16.7초, $m=2$ 일 때 17.41초, $m=3$ 일

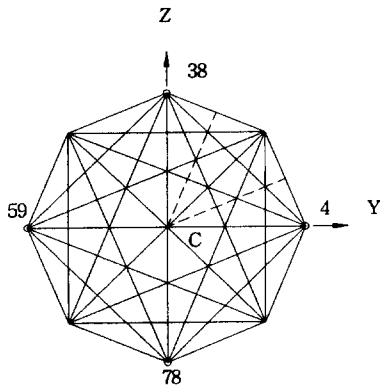


Fig. 10 F. E. M. model for whole structure with octagonal geometry

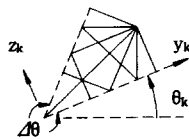


Fig. 11 F. E. M. model for substructure with T_1

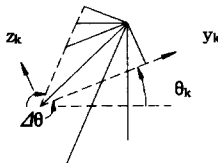


Fig. 12 F. E. M. model for substructure with $T_1+T_2+T_3$

Table 2 Natural frequencies of structure with octagonal geometry (Hz)

Mode No.	Whole structure	Substructure (T_1)	m	Substructure ($T_1+T_2+T_3$)	m
1	1.37346E+01	1.37346E+01	0	1.37346E+01	0
2	1.48724E+01	1.48724E+01	1	1.48724E+01	1
3	1.48724E+01	1.48724E+01	1	1.48724E+01	1
4	1.68630E+01	1.68630E+01	0	1.68630E+01	0
5	3.94652E+01	3.94652E+01	2	3.94652E+01	2
6	3.94652E+01	3.94652E+01	2	3.94652E+01	2

Table 3 Amplitude and phase of displacement of X direction

Node No.	Amplitude (mm)		Phase (Deg)	
	Whole structure	Substructure	Whole structure	Substructure
4	2.05095E-01	2.05095E-01	280.565	280.565
38	2.89097E-05	2.89097E-05	319.357	319.357
59	1.63985E-04	1.63985E-04	78.6474	78.6474
78	2.89097E-05	2.89097E-05	319.357	319.357

때 19.39초, $m=4$ 일 때 7.53초이다.

Table 2에서 알 수 있듯이 단순연결의 경우와 다중연결경우의 해석결과가 일치함을 알 수 있다.

5.2 강제진동해석

(1) 다중연결된 8각형 평면 순환대칭구조

고유진동 예에서 보여진 동일한 모델을 사용하여 강제진동해석을 수행하였다. Fig. 10에 나타낸 것처럼 4번 절점에 X방향으로 가해진 정현여기력은 크기가 100 N, 여기진동수가 $f=14.87242$ Hz로 다음과 같다.

$$F_x = 100 \sin(2\pi ft)$$

Rayleigh 감쇠 고려하면 감쇠행렬 C^s 는 $c_1 K^s + 2c_2 M^s$ 로 표현되므로 감쇠행렬의 비례상수 c_1 은 $1.0E-3$ 로 정하고 질량행렬의 비례상수 c_2 를 4.0으로 하였다. 4, 38, 59, 78번 절점의 진폭과 위상차를 전체구조에 대하여 계산된 결과와 다중연결형태의 경우를 이용하여 계산된 결과를 비교하여 Table 3에 나타내었다.

각 절점변위의 진폭과 위상차가 두 경우에 일치한다.

6. 결 론

순환대칭으로 다중연결된 구조물의 수학적모델을 정의하였고 단순연결형태로만 구성된 순환대칭구조물 뿐만 아니라 단순연결형태를 포함한 다중연결형태로 구성된 순환대칭구조물도 효율적으로 유한요소 해석할 수 있는 방법을 제시하였다.

순환대칭으로 다중연결된 구조물을 부분구조로 분

할하고 분할된 대표적인 부분구조 한 개만의 유한요소 해석을 체계적으로 수행하여 해석에 필요한 자유도수를 현저히 감소시키므로서 전체구조를 유한요소 모델링하여 진동특성을 해석할 때 요구되는 많은 컴퓨터 기억용량과 계산시간을 절감할 수 있었다. 또한 부분구조만 유한요소분할 하므로서 전체구조를 요소분할하는 일련의 불필요한 과정을 없앨 수 있었다.

또한 부분구조의 유한요소 모델링시, 순환대칭으로 다중연결된 구조물은 순환대칭으로 단순연결된 구조물보다 더 적은 절점 즉 보다 적은 자유도로 모델링할 수 있어서 연결경계에서 구속식의 개수를 줄일 수 있었다.

후 기

본 연구는 1995년도 인하대학교 연구비 지원에 의하여 수행되었음.

참 고 문 헌

- (1) Thomas D. L., 1979, "Dynamics of Rotationally Periodic Structures," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, pp. 81~102.
- (2) Orris R. M. and Petyt M., 1974, "Finite Element Study of Harmonic Wave Propagation in Periodic Structures," Journal of Sound and Vibration, Vol. 33, pp. 223~236.
- (3) 道村晴一, 長松昭男, 1979, "羽根車の振動(第4報, 車盤と翼の連成振動の解析, その2)," 日本機械學會論文集(C編), 45卷 399號, pp. 1206~1216.
- (4) Fricker A. J. and Potter S., 1981, "Transient Forced Vibration of Rotationally Periodic Structures," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 957~974.
- (5) 김창부, 김정락, 1995, "이산푸리에 변환을 이용한 순환대칭 구조물의 유한요소진동해석," 한국소음진동공학회 추계 학술대회 논문집, pp. 221~226.
- (6) EMRC, 1993, NISA II, Engineering Mechanics Research Corporation.