

< 논 문 >

# 조화진동유동을 포함한 곡선 파이프 계의 혼돈 운동 연구

## Chaotic Vibration of a Curved Pipe Conveying Oscillatory Flow

박철희\* · 홍성철\*\* · 김태정\*\*\*

Chul-Hui Pak, Sung-Chul Hong and Tae-Jung Kim

(1997년 2월 28일 접수 ; 1997년 3월 28일 심사완료)

**Key Words :** Oscillatory Flow(진동유동), Chaotic Motion(혼돈 운동), Bifurcation(분기현상), Homoclinic Orbit(호모크리닉 궤도), Melnikov Method(멜니코프 방법)

### ABSTRACT

In this paper, chaotic motions of a curved pipe conveying oscillatory flow are theoretically investigated. The nonlinear partial differential equation of motion is derived by Newton's method. The transformed nonlinear ordinary differential equation is a type of Hill's equation, which has the external and parametric excitation with a same frequency. Bifurcation curves of chaotic motion of the piping systems are obtained by applying Melnikov's method. Numerical simulations are performed to demonstrate theoretical results and show the strange attractor of the chaotic motion.

### 1. 서 론

유체가 흐르는 파이프 계에 대한 연구는 내부 유체가 일정한 유속으로 흐르는 경우와 맥동하는 경우에 대하여 안정성(stability) 및 매개변수 공진(parametric resonance)등이 주로 연구되어 왔다. 파이프 계의 비선형 거동에 대한 연구들은 최근에 와서 주로 직선파이프를 중심으로 이루어지고 있다. Páidoussis, Moon<sup>(1~3)</sup> 등은 외팔보 파이프 계에서 주기배가(periodic doubling bifurcation)현상을 통하여 혼돈운동이 일어남을 수치해석과 실험을 통해 입증한 바 있으나, 혼돈운동의 존재를 이론적으로 완벽하게 증명하지는 못하였다.

한편 혼돈운동에 대하여, Melnikov<sup>(4)</sup>는 혼돈운동이 발생함을 증명할 수 있는 호모크리닉 궤도교차

(transverse homoclinic orbit)의 존재를 섭동법(perturbation method)으로서 유도하였는데, 이는 혼돈운동의 존재를 이론적으로 증명할 수 있는 방법으로 알려지고 있다. Yagasaki<sup>(5,6)</sup>는 매개변수 가진(parametric excitation)과 외부 가진(external excitation)을 받는 약비선형계를 모델로, 두 가진 주파수가 고유진동수의 특정비(1:2)인 경우를 모델로 구성하여 Melnikov 방법을 사용함으로써 혼돈운동의 발생영역을 이론적으로 규명하였다. Pak<sup>(7)</sup>등은 조화진동유동을 하며 지지 부에 가인을 받는 직선파이프계를 모델로 Yagasaki와 동일한 형태의 운동방정식을 유도하였고 고유진동수와 가진 주파수들의 비가 일정하지 않은 일반적인 경우에도 혼돈운동이 존재함을 Melnikov방법에 의하여 증명하여 일반화된 혼돈운동의 존재영역을 밝혔다.

비선형을 고려한 기존의 연구들은 직선 파이프 계를 모델로 수행되었으나, 실제 파이프 계는 곡선 파이프가 함께 구성되고 있다. 따라서, 본 연구에서는 일정한 곡률을 갖는 곡선 파이프에 맥동유체가 흐르는 파이프 계를 모델로 비선형 운동방정식을 유도하

\*정회원, 인하대학교 공과대학 기계공학과

\*\*정회원, 한라공과대학교 기계공학부

\*\*\*인하대학교 대학원 기계공학과

여 맥동유체에 의한 곡선파이프계의 진동구조를 이해하고, Melnikov 방법을 이용하여 호모클리닉 궤도의 존재 및 혼돈운동의 존재영역을 파악하여, 맥동유체가 흐르는 곡선파이프의 혼돈운동 양상을 연구하고자 한다.

## 2. 운동방정식

조화진동유동을 포함한 곡선파이프계의 운동방정식을 유도하기 위해 Fig. 1과 같이 곡률 반경이  $R$ , 주어진 각도가  $\theta_0$ 인 튜브형태의 파이프 계를 모델링하였다.

주어진 파이프 계의 운동방정식을 유도하는데 다음과 같은 가정을 하였다. 즉, 내부유체는 비압축성이고 유체의 속도분포는 단면에서 균일하며, 파이프는 평면 내(in-plane)에서 그리고 반경방향으로만 운동을 하며, 회전관성 및 전단변형은 무시하고 파이프는 신장(extensible) 가능하다고 가정하였다.

Fig. 2는 변형전과 변형후의 형상을 나타낸다. 여기서  $r$ 은 위치벡터이고,  $t$ 와  $n$ 은 변형된 파이프의 위치  $\theta$ 에서의 접선과 법선 단위벡터 그리고  $ds$ 와  $ds^*$ 는 변형전과 변형후의 파이프의 미소요소의 길이

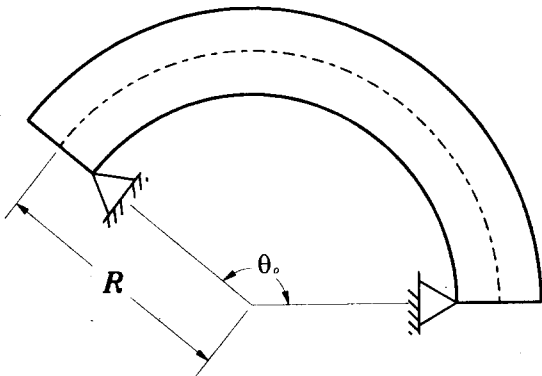


Fig. 1 The model of a curved pipe conveying oscillatory flow.

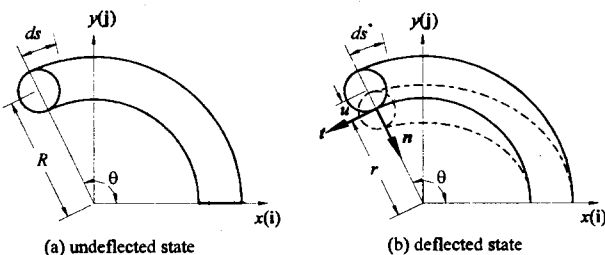


Fig. 2 Definition of coordinate of a piping system

이다. 이때, 위치벡터는 다음 식으로 표현된다.

$$r(s^*, t) = (R-u)\cos\theta i + (R-u)\sin\theta j \quad (1)$$

식(1)을 미분함으로써 접선 단위벡터  $t$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$t = \frac{\partial r}{\partial s^*} = \frac{ds}{ds^*} \left[ \left\{ -\frac{\partial u}{\partial s} \cos\theta - \left(1 - \frac{u}{R}\right) \sin\theta \right\} i + \left\{ -\frac{\partial u}{\partial s} \sin\theta + \left(1 - \frac{u}{R}\right) \cos\theta \right\} j \right] \quad (2)$$

식(2)에서 단위벡터  $t$ 의 크기의 정의로부터  $ds/ds^*$ 는 다음과 같이 근사적으로 유도된다.

$$\frac{ds}{ds^*} \cong 1 + \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{3u}{2R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \quad (3)$$

따라서 단위 접선벡터의 근사식은 식(2)와 식(3)로부터 다음과 같이 얻는다.

$$t \cong \left[ \left\{ -\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3 \right\} \cos\theta - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{3u}{2R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \right\} \sin\theta \right] i + \left[ \left\{ -\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3 \right\} \sin\theta + \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{3u}{2R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \right\} \cos\theta \right] j \quad (4)$$

또한, 곡률  $\kappa$ 와 단위 법선벡터  $n$ 은  $r$ 을 2계 미분함으로써 곡률과 단위 법선벡터를 아래와 같이 근사식으로 구할 수 있다.

$$\kappa \cong \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{u}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + R \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) + 2u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) - \frac{u}{2R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)^2 + \frac{u^2}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) - \frac{3R}{2} \frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) \right\} \quad (5)$$

$$n \cong \left[ \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{u}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3 \right\} \sin\theta - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{u}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \right\} \cos\theta \right] i + \left[ -\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{u}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3 \right\} \cos\theta - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 - \frac{u}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \right\} \sin\theta \right] j \quad (6)$$

유체의 속도와 가속도를 구하기 위해 변형전과 변형후의 파이프의 내부를 흐르는 유체의 미소요소<sup>(7)</sup>를 생각한다. 이때, 유체의 연속조건과 체적보존조건은 다음 식으로 표현되고,

$$ds A_f = ds^* A_f^* \quad (7a)$$

$$c A_f = c^* A_f^* \quad (7b)$$

여기서  $c$ ,  $c^*$ 와  $A_f$ ,  $A_{f^*}$ 는 각각 변형전과 변형후의 유체의 속도와 파이프 내부 단면적이다. 식(7)을 사용하면 파이프내의 유체속도는 다음 관계식을 갖는다.

$$c^* = \frac{A_f}{A_{f^*}} c = \frac{ds^*}{ds} c \quad (8)$$

유체의 속도  $V_f$ 와 가속도  $A_f$ 는 식(8)을 이용하여 얻는다.

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{Dr}{Dt} \\ &= [(-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}) \cos \theta - c \frac{(R-u)}{R} \sin \theta] i \\ &\quad + [(-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}) \sin \theta \\ &\quad + c \frac{(R-u)}{R} \cos \theta] j \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_f &= \frac{D^2 r}{Dt^2} \\ &\cong [(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial c}{R \partial t} - \frac{2c \partial^2 u}{R \partial t \partial \theta} - \frac{c^2}{R}) \cos \theta \\ &\quad - (\frac{R-u}{R} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{2c \partial u}{R \partial t}) \sin \theta] i \\ &\quad + [(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial c}{R \partial t} - \frac{2c \partial^2 u}{R \partial t \partial \theta} - \frac{c^2}{R}) \sin \theta \\ &\quad + (\frac{R-u}{R} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{2c \partial u}{R \partial t}) \cos \theta] j \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $D/Dt$ 는 오일러 표현식으로 물질도함수이다. 파이프 계의 미소요소를 Fig. 3과 같이 파이프의 미소요소와 유체의 미소요소로 나누어 자유물체도를 도시할 수 있다.

Fig. 3에 도시한 각 요소의 평형방정식을 유도하면 다음과 같다.

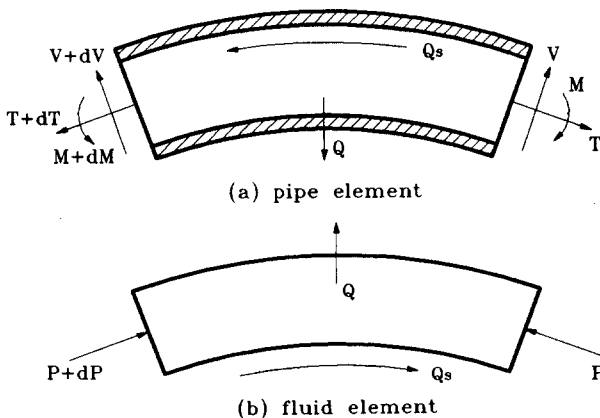


Fig. 3 Free-body diagram

$$\frac{\partial}{\partial s^*} (V + T) ds^* + Q + Q_s = \rho_p A_p \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} ds^* \quad (11a)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial s^*} ds^* - Q - Q_s = \rho_f A_{f^*} \frac{D^2 r}{Dt^2} ds^* \quad (11b)$$

여기서,  $V$ 는 전단력,  $T$ 는 인장력,  $P$ 는 유체의 압력 (pressure force),  $Q$ 는 파이프와 유체의 상호작용력,  $Q_s$ 는 마찰력,  $A_p$ 는 파이프의 단면적,  $\rho_p$ 와  $\rho_f$ 는 파이프와 유체의 밀도이다. 식(11a)와 식(11b)로부터  $Q$ 와  $Q_s$ 를 소거하면

$$\frac{\partial}{\partial s} (V + T - P) = \rho_p A_p \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \rho_f A_{f^*} \frac{D^2 r}{Dt^2} \quad (12)$$

가 된다. 식(12)의 각 항은 아래와 같이 근사식으로 표현된다. 인장력  $T$ 는

$$\begin{aligned} T &= (T_o - EA_p \frac{ds^* - ds}{ds}) t \\ &\cong [-[T_o - EA_p \frac{u}{R} - (T_o - EA_p) \{ \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \\ &\quad + \frac{u}{R} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \}] \sin \theta \\ &\quad + [-T_o (\frac{\partial u}{\partial s}) - (T_o - EA_p) \{ \frac{u}{R} (\frac{\partial u}{\partial s}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^3 \}] \cos \theta] i \\ &\quad + [[T_o - EA_p \frac{u}{R} - (T_o - EA_p) \{ \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \\ &\quad + \frac{u}{R} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \}] \cos \theta \\ &\quad + [-T_o (\frac{\partial u}{\partial s}) - (T_o - EA_p) \{ \frac{u}{R} (\frac{\partial u}{\partial s}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial s})^3 \}] \sin \theta] j \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,  $T_o$ 는 초기인장력이고,  $E$ 는 파이프의 탄성계수이다. 전단력  $V$ 는

$$\begin{aligned} V &= -EI \frac{\partial}{\partial s} (\frac{ds^*}{ds} x) \frac{ds}{ds^*} n \\ &\cong EI [ [ - \{ \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{3u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \\ &\quad + \frac{3}{R} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \} \sin \theta \\ &\quad + \{ \frac{\partial^2 u}{\partial s^3} + \frac{2u}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{3}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\ &\quad - 2 \frac{\partial u}{\partial s} (\frac{\partial^2 u}{\partial s^2})^2 - 2 (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \cos \theta \} ] i \\ &\quad + [ \{ \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{3u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \\ &\quad + \frac{3}{R} (\frac{\partial u}{\partial s})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \} \cos \theta \end{aligned} \quad (14)$$

$$+ \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{2u}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} + \frac{3}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \sin \theta \right\} j$$

여기서  $I$ 는 파이프의 단면 2차 모멘트이다. 압력  $P$ 는 다음과 같다.

$$P = Pt$$

$$\cong \left[ - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 - \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \right\} P \sin \theta - \left\{ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^3 P \cos \theta \right\} i + \left[ \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 - \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \right\} P \cos \theta - \left\{ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{u}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^3 P \sin \theta \right\} j \right] \right] \quad (15)$$

식 (13), 식 (14), 그리고 식 (15)를 식 (12)에 대입하여 소거한 후 고차 항을 무시하면, 다음과 같은 내부유동을 포함한 비선형 굽힘방정식이 얻어진다

$$EI \left\{ \frac{u''''}{R^4} + \frac{4u'u'''}{R^5} + \frac{2uu''''}{R^5} + \frac{3u'''}{R^5} - \frac{2u''^3}{R^6} - \frac{8u'u''u'''}{R^6} - \frac{2u'^2u'''}{R^6} \right\} - (T_o - P_o) \left( \frac{1}{R} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) - (T_o - P_o - EA_p) \times \left\{ \frac{u'^2}{2R^3} + \frac{uu''}{R^3} - \frac{3}{2} \frac{u'^2u''}{R^4} \right\} \quad (16)$$

$$= - (m_f + m_p) \ddot{u} - m_f \left( \dot{c} \frac{u'}{R} + 2c \frac{u'}{R} + c^2 \frac{u''}{R^2} + \frac{c^2}{R} \right)$$

여기서, (')는  $d/d\theta$ , (·)는  $d/dt$ 를 나타내며,  $m_f$ ,  $m_p$ 는 각각 유체 및 파이프의 단위 길이당 질량이다. 식 (16)에 탄성계수  $E$  대신 아래와 같은 Kelvin-Voigt 형태의 댐핑을 고려하여 대입하면 최종식이

$$E = E(1 + a \frac{\partial}{\partial t}) = E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \quad (17)$$

얻어진다. 여기서,  $E^*$ 는  $Ea$ 로  $a$ 는 댐핑계수이다. 아래와 같이 소개된 무차원 변수

$$\bar{u} = \frac{u}{R}, \quad \zeta = \frac{m_f}{m_f + m_p}, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_o}, \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{m_f}{EI}} Rc,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}} \frac{t}{R^2}, \quad \Gamma_o = \frac{T_o R^2}{EI}, \quad \Gamma_1 = \frac{EA_p R^2}{EI},$$

$$\Gamma_2 = \frac{P_o R^2}{EI}, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}} \frac{a}{R^2}$$

들을 사용하여, 각 변수의 영향을 살펴보기 위한 무

차원화된 비선형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\bar{u}''''}{\theta_o^4} + \frac{4\bar{u}'\bar{u}'''}{\theta_o^4} + \frac{2\bar{u}\bar{u}''''}{\theta_o^4} + \frac{3\bar{u}'''}{\theta_o^4} - \frac{2\bar{u}''^3}{\theta_o^6} - \frac{8\bar{u}'\bar{u}''\bar{u}'''}{\theta_o^6} + \bar{\sigma} \frac{\bar{u}''''}{\theta_o^4} - \frac{2\bar{u}'^2\bar{u}'''}{\theta_o^6} - (\Gamma_o - \Gamma_2) \left( 1 + \frac{\bar{u}''}{\theta_o^2} \right) - (\Gamma_o - \Gamma_1 - \Gamma_2) \left( \frac{\bar{u}'^2}{2\theta_o^2} + \bar{u}\bar{u}'' - \frac{3}{2} \frac{\bar{u}'^2\bar{u}''}{\theta_o^4} \right) = \ddot{\bar{u}} + \sqrt{\zeta} \left( \bar{c} \frac{\bar{u}'}{\theta_o} - 2\bar{c} \frac{\bar{u}'}{\theta_o} \right) - \bar{c}^2 \frac{\bar{u}''}{\theta_o^2} - \bar{c}^2 \quad (18)$$

파이프 계의 내부유동을 조화진동유동을 다루고자 하므로 유속을  $\bar{c} = \bar{c}_o(1 + \bar{\mu}\cos\Omega\tau)$ 라 가정한다. 이때  $\bar{c}_o$ 는 무차원 평균유속이고  $\bar{\mu}$ 는 맥동유체의 진폭 비이며,  $\bar{\mu} < 1$  인 값이다. 또한  $\Omega$ 는 맥동유체의 진동수이다. 주어진 모델의 경계조건에 맞는 정규모드를 식 (19)과 같이 가정하여 1차 모드에 대하여 Galerkin 방법을 적용함으로써 상미분방정식을 얻는다.

$$\bar{u}(\bar{\theta}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\bar{\theta}) q(\tau), \quad \xi_n = \sqrt{2} \sin(n\pi\bar{\theta}) \quad (19)$$

1차 모드 근사에 의하여 얻어진 비선형 상미분방정식은 아래와 같다.

$$\dot{q} + \bar{\delta} \dot{q} + (\omega_o^2 - \bar{p}_1 \bar{\mu} \cos \Omega \tau) q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 = \bar{\gamma} + \bar{p}_2 \bar{\mu} \cos \Omega \tau \quad (20)$$

여기서,

$$\bar{\delta} = \bar{\sigma} \frac{\pi^4}{\theta_o^4}, \quad \bar{p}_1 = 2\bar{c}_o^2 \frac{\pi^2}{\theta_o^2}, \quad \bar{p}_2 = 4\sqrt{2} \frac{\bar{c}_o^2}{\pi}$$

$$\omega_o^2 = \frac{\pi^4}{\theta_o^4} - \frac{\pi^2}{\theta_o^2} (\bar{c}_o^2 - \Gamma_o + \Gamma_2)$$

$$\alpha_2 = 2\sqrt{2} \frac{\pi}{\theta_o^2} (\Gamma_1 - \Gamma_o + \Gamma_2) - 8\sqrt{2} \frac{\pi^3}{\theta_o^4}$$

$$\alpha_3 = \frac{3\pi^4}{4\theta_o^4} (\Gamma_1 - \Gamma_o + \Gamma_2) - \frac{2\pi^6}{\theta_o^6}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (\bar{c}_o^2 - \Gamma_o + \Gamma_2)$$

이다. 이때,  $0 < \epsilon \ll 1$ 인 작은 매개변수  $\epsilon$ 을 생각하여, 식 (20)에서  $\bar{\delta} = \epsilon\delta$ ,  $\bar{\mu} = \epsilon\mu$ 라 하자. 또한 좌표를  $y = q + \alpha_2/3\alpha_3$ 로 치환하면, 다음과 같이 변형된 운동방정식이 된다.

$$\dot{y} + \epsilon\delta\dot{y} + (\omega^2 - \epsilon\bar{p}_1\mu\cos\Omega\tau)y + \alpha_3y^3 = \gamma + \epsilon\bar{p}_2\mu\cos\Omega\tau \quad (21)$$

여기서,

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \frac{\alpha_2^2}{3\alpha_3^2}, \quad \bar{p}_2 = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 \frac{\alpha_2}{3\alpha_3}$$

$$\gamma = \bar{\gamma} - \frac{2\alpha_3^2}{27\alpha_3^2} + \frac{\alpha_2}{3\alpha_3}\omega^2$$

유도된 운동방정식은 파이프 내부유체에 의한 매개변수 가진과 곡률을 갖는 파이프를 흐르는 유체에 의한 원심력이 외부가진으로 작용하는 계가 되어 직선파이프의 경우<sup>(7)</sup>와는 외부가진이 다른 계가 된다. 이때 두 가진력은 곡선파이프를 흐르는 유체에 의하여 발생되므로 두 가진력의 주파수가 같은 형태로 운동방정식이 유도된다.

### 3. 고정점과 호모크리닉 궤도

좌표 변환된 운동방정식 식 (21)을 상태공간(state space)으로 표현하면,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{u} = v \\ \dot{y} &= \dot{v} = -\omega^2 u - \alpha_3 u^3 + \gamma \\ &+ \varepsilon\{\mu(\bar{p}_1 u + p_2) \cos \Omega \tau - \delta v\} \end{aligned} \quad (22)$$

이 된다. 식 (22)에서  $\varepsilon=0$ 이면 완전적분가능한 해밀턴계(integrable Hamiltonian system)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 u - \alpha_3 u^3 + \gamma \end{aligned} \quad (23)$$

가 되며, 식 (23)의 해밀턴에너지(Hamiltonian energy)는 다음 식으로 된다.

$$H(u, v) = \frac{\alpha_3}{4} u^4 + \frac{\omega^2}{2} u^2 - \gamma u + \frac{v^2}{2} \quad (24)$$

이때 판별식  $D$ 가 다음과 같은 조건

$$D = \left(\frac{\omega^2}{3\alpha_3}\right)^3 + \left(\frac{\gamma}{2\alpha_3}\right)^2 < 0 \quad (25)$$

이면, 파이프 계는 Fig. 4(a)~5(a)와 같이 세 개의 고정점(fixed point)  $p(u, v)$ 를 갖는 two-well 형태

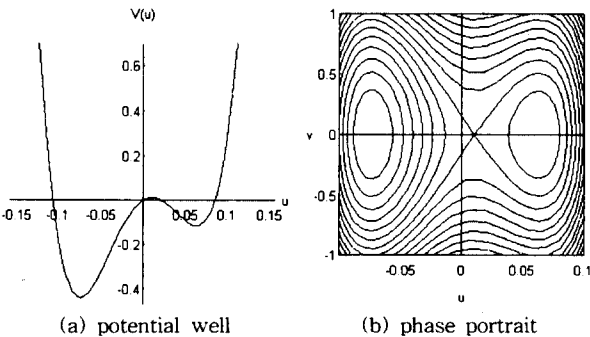


Fig. 4 The potential well and phase portrait of Eq. (23) when  $\theta_0 = \pi/3$ ,  $c_0 = 2.0$ ,  $\Gamma_1 = 800$ .

의 포텐셜 에너지  $v(y)$ 를 나타내며, 각 경우의 위상 유형(phase portrait)은 Fig. 4(b)~5(b)와 같다. Fig. 4(b)~5(b)에서  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ 는 세 개의 고정점이며,  $p_1(u_1, 0)$ 과  $p_3(u_3, 0)$ 는 중심(center)이고  $p_2(u_2, 0)$ 는 하이퍼볼릭 안장점(hyperbolic-saddle)이다. 세 개의 고정점  $u_1, u_2, u_3 (u_1 < u_2 < u_3)$ 는 다음과 같은 3차방정식의 근이다.

$$\alpha_3 u^3 + \omega^2 u^2 - \gamma = 0 \quad (26)$$

안장점  $p_2(u_2, 0)$ 의 해밀턴에너지수위(energy level)는 식 (24)로부터 다음으로 표시된다.

$$H(u_2, 0) = H_0 \quad (27)$$

따라서 식 (27)은 두 호모크리닉 궤도  $x^{c+}$ ,  $x^{c-}$ 와 안장점  $p_2$ 로 구성된다. 식 (26)과 식 (27)을 이용하면 식 (23)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} v &= \frac{du}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{H_0}{2} - \frac{\alpha_3}{2} u^4 - \omega u^2 + 2\gamma u} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\alpha_3}{2} (u - u_2)} \\ &\quad \times \sqrt{-(u - u_2)^2 + (r_1 + r_2)(u - u_2) - r_1 r_2} \end{aligned} \quad (28)$$

그러므로, 호모크리닉 궤도,  $x^{c\pm} = (u_{\pm}(\tau), v_{\pm}(\tau))$ 는 식 (28)을 무차원 시간  $\tau$ 에 대해 적분함으로써 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} u_{\pm}(\tau) &= \pm \frac{2r_1 r_2}{(r_1 - r_2) \cosh \alpha \tau \pm (r_1 + r_2)} + u_2 \\ v_{\pm}(\tau) &= \mp \frac{2\alpha r_1 r_2 (r_1 - r_2) \sinh \alpha \tau}{\{(r_1 - r_2) \cosh \alpha \tau \pm (r_1 + r_2)\}^2} \end{aligned} \quad (29)$$

여기서,  $r_1 = -2u_2 + \sqrt{2k}$ ,  $r_2 = -2u_2 + \sqrt{2k}$ ,  $\alpha = \sqrt{-\alpha_3 r_1 r_2 / 2}$ ,  $k = -u_2^2 - \omega^2 / \alpha_3$ 이다.

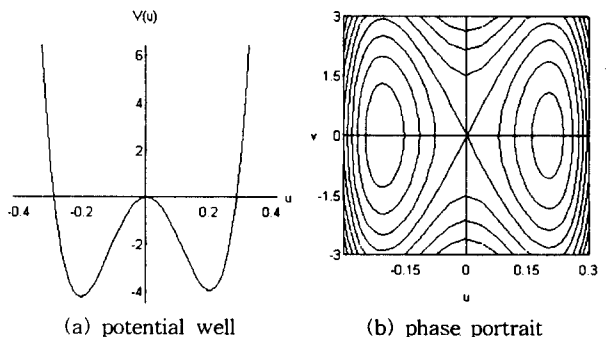


Fig. 5 The potential well and phase portrait of Eq. (23) when  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $c_0 = 5.7$ ,  $\Gamma_1 = 800$ .

### 4. Melnikov 해석

Melnikov 이론<sup>(4)</sup>은 특정한 계에서 혼돈운동의 존재를 이론적으로 규명할 수 있는 방법으로 그 과정을 간략히 살펴보기로 한다. 이 방법은 아래의 가정을 포함하는 계에 대하여 적용할 수 있다.

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t) \tag{30}$$

$$x = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \in R^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

이때, 식 (30)에서  $\varepsilon=0$ 이면 식 (30)은 해밀턴계

$$u = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad v = -\frac{\partial H}{\partial u} \tag{31}$$

가 되고 해밀턴계인 식 (31)은 Fig. 6과 같이 안정점  $p_2$ 에 대한 호모크리닉 궤도  $x_{c\pm}(u_{\pm}(t), v_{\pm}(t))$ 를 갖는다. 이와 같은 계에서  $\varepsilon(>0)$ 이 매우 작은 경우, Fig. 6에서와 같이 섭동된 안정매니폴드  $W^s(p_2^\varepsilon)$  (stable manifold)와 섭동된 불안정매니폴드  $W^u(p_2^\varepsilon)$  (unstable manifold) 그리고 섭동된 안정점  $p_2^\varepsilon$ 은 비섭동된 안정매니폴드  $W^s(p_2)$ 와 비섭동된 불안정매니폴드  $W^u(p_2)$  그리고 비섭동된 안정점  $p_2$ 의 근방에 존재하게 되고, 이때  $W^s(p_2^\varepsilon)$ 와  $W^u(p_2^\varepsilon)$ 의 거리함수  $d(t_0)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$d_{\pm}(t_0) = \frac{\varepsilon M_{\pm}(t_0)}{|f[x_{c\pm}(t_0)]|} + O(\varepsilon^2) \tag{32}$$

분자항  $M_{\pm}(t_0)$ 를 Melnikov 함수라 부르며 다음식으로 정의된다.

$$M_{\pm}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f[x_{c\pm}(t)] \wedge g[x_{c\pm}(t), t+t_0] dt \tag{33}$$

여기서,  $f \wedge g = f_1g_2 - f_2g_1$ 이다.

$M_{\pm}(t_0)$ 가 단순영 (simple zero)이면  $t_{\pm}(t_0)$  또한 단순영으로서, 이것은  $W^s(p_2^\varepsilon)$ 와  $W^u(p_2^\varepsilon)$ 가 교차함을 의미하고 이러한 궤도교차의 발생이 Smale-Birkhoff

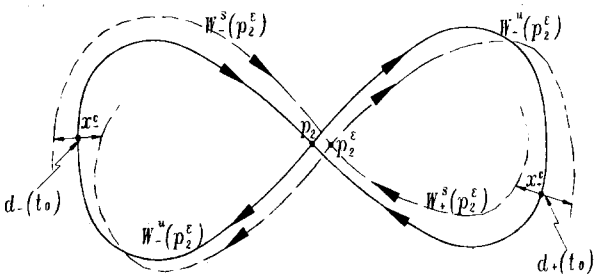


Fig. 6 Perturbed manifolds and distance function

호모크리닉 이론에 따라 혼돈운동의 존재를 이론적으로 규명하게 된다.

식 (22)는 앞에서 언급된 식 (30)과 같은 계이므로 Melnikov 이론을 적용하여 식 (22)에 대한 Melnikov 함수는 아래 식 (34)와 같이 정의된다.

$$M_{\pm}(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{\pm} [\bar{p}_1 \mu \cos \Omega(\tau + \tau_0) u_{\pm}(\tau)] \tag{34}$$

식 (34)를 유수정리(residue theorem)를 이용하여 적분하면 Melnikov 함수는 다음과 같다.

$$M_{\pm}(\tau_0) = \pm \frac{4\mu\pi\Omega \sin(\Omega\tau_0)}{\sqrt{\alpha_3} \sinh(\frac{2\pi\Omega}{\sqrt{\alpha_3}\rho})} \{ \pm M_1 - M_2 \} - \delta c_1^2 \frac{\sqrt{\alpha_3}}{8} M_3 \tag{35}$$

여기서,  $c_1 = r_1 - r_2$ ,  $c_2 = r_1 + r_2$ ,  $\rho = \sqrt{-r_1 r_2}$ ,  $\phi_0 = \cos^{-1}(c_2/c_1)$ ,  $\phi_0^+ = \phi_0$ ,  $\phi_0^- = \pi - \phi_0$ ,

$$M_1 = p_1 \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha_3}} \cosh(\frac{2\Omega\phi_0^+}{\sqrt{\alpha_3}\rho}),$$

$$M_2 = P_2 \sinh(\frac{2\Omega\phi_0^+}{\sqrt{\alpha_3}\rho}),$$

$$M_3 = \frac{2\rho}{3} + (\frac{c_2}{c_1})^2 \mp c_2 \tan^{-1}(\frac{c_1 \mp c_2}{2\rho}).$$

이때, 유도된 Melnikov 함수식 (35)가 단순영이 될 조건, 혼돈운동의 존재조건식은 다음과 같다.

$$R_{\pm} = \frac{\mu}{\delta} > \left| \frac{\alpha_3 c_1^2}{32\Omega\pi} \frac{M_3}{(\mp M_1 + M_2)} \sinh(\frac{2\Omega\pi}{\sqrt{\alpha_3}\rho}) \right| \tag{36}$$

식 (36)의 조건식을 이용하면, 특정 매개변수에 대한 혼돈운동의 존재영역을 찾을 수 있기 때문에 혼돈운동을 이론적으로 규명할 수 있게 된다. Fig. 7~8은 몇 개의 매개변수를 고정하고 혼돈운동의 존

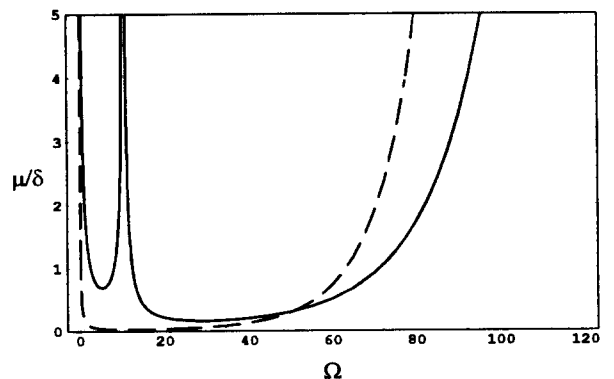


Fig. 7 The homoclinic bifurcation curves  $R_+$  and  $R_-$  are plotted as dashed and solid lines on  $\Omega - \mu/\delta$  space when  $\theta_0 = \pi/3$ ,  $c_0 = 2$ ,  $\Gamma_1 = 800$ .

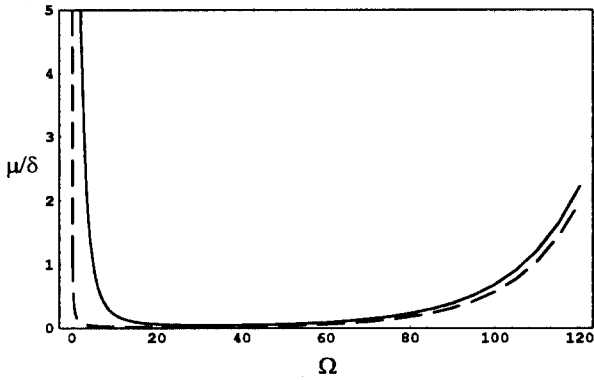


Fig. 8 The homoclinic bifurcation curves  $R_+$  and  $R_-$  are plotted as dashed and solid lines on  $\Omega-\mu/\delta$  space when  $\theta_0=\pi/2$ ,  $c_0=5.7$ ,  $\Gamma_1=800$ .

재영역을  $\Omega-\mu/\delta$  평면상에 호모클리닉 분기곡선 (homoclinic bifurcation diagram)으로 나타낸 것이며, 식 (35)의 첨자 (+)와 (-)에 대하여 분기곡선을 각각 실선과 점선으로 도시하였다. 또한, 그 분기곡선의 상단영역에 혼돈운동이 존재한다. Fig. 7~8과 같이 혼돈운동의 존재영역이 이론적으로 규명되었으므로 수치해석을 통하여 그 결과를 검증하고자 한다.

### 5. 수치해석

Fig. 4의 비대칭형인 two-well 포텐셜인 경우에 대하여 가진주파수  $\Omega=5$ 로 고정하고 변수  $\varepsilon\delta=0.001$ 인 경우에 대하여 Fig. 7의 호모클리닉 분기곡선 상단영역인  $\varepsilon\mu=0.001$ 인 변수에서 초기조건을 안장점근방과 중심점근방에서 변화시키며 포앙카레 사상도(Poincaré map)와 시간응답(time history)을 통하여 4차 Runge-Kutta 방법으로 수치해석을 수행하였다. 이때 Fig. 9~10과 같이 긴 시간을 소요하며, 초기조건에 따라 매우 민감하게 중심점(center)으로 수렴하는 트랜지언트 카오스현상(transient chaos)이 나타남을 확인할 수 있다. 또한 시간증분(time step)에 대하여서도 민감하게 중심점에 수렴하는 것을 확인하였다. 한편 Fig. 11과 같이 초기조건을 적당히 잡을 경우에 준 주기적인 운동도 동시에 존재할 수 있음을 알 수 있었다. 그러나 조절변수인 가진력  $\varepsilon\mu$ 를 증가시켜도 카오스현상은 찾을 수 없었다. Moon<sup>(8)</sup>은 대칭 two-well 포텐셜 계를 이용하여, Chirikov 분기조건과 Melnikov 분기조건을 실험함으로써 Chirikov의 조건이 잘 일치함을 제시한

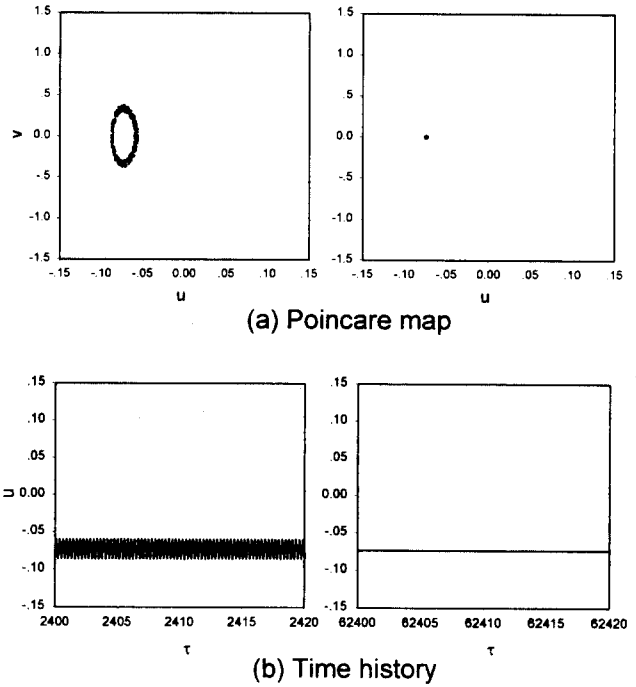


Fig. 9 The Poincaré map (a) and the time history (b) of case Fig. 4 showing the transient chaos to attracting point of right half plane when  $\varepsilon\mu=0.001$  with I.C. (0.009, 0).

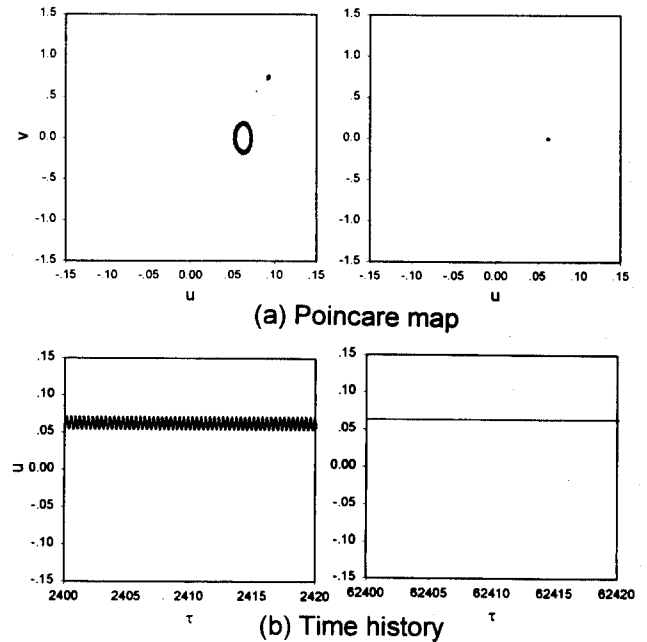
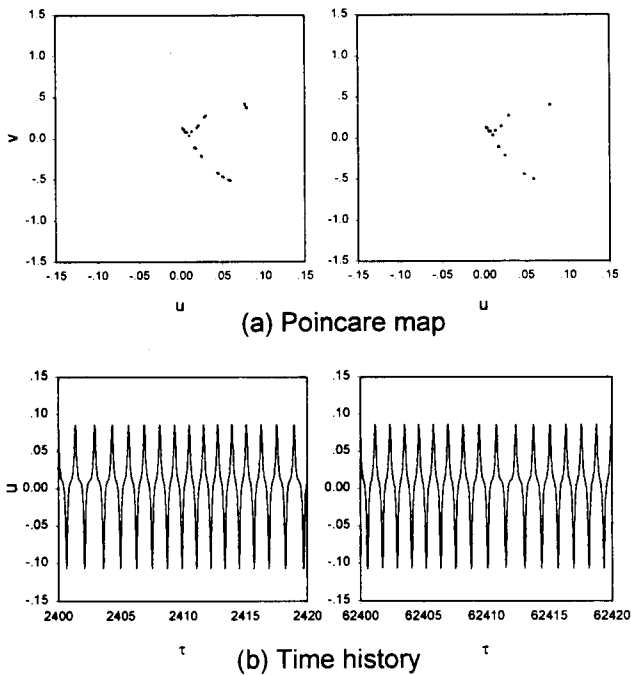


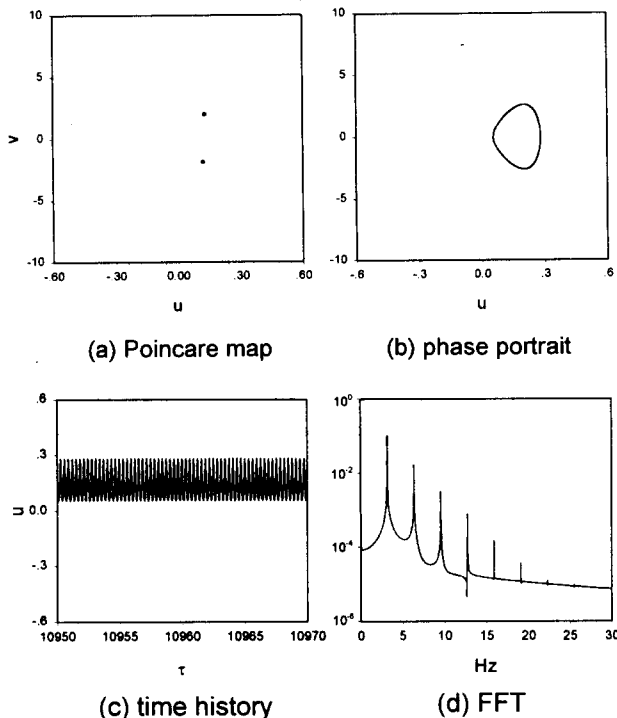
Fig. 10 The Poincaré map (a) and the time history (b) of case Fig. 4 showing the transient chaos to attracting point of right half plane when  $\varepsilon\mu=0.001$  with I.C. (0.013, 0).



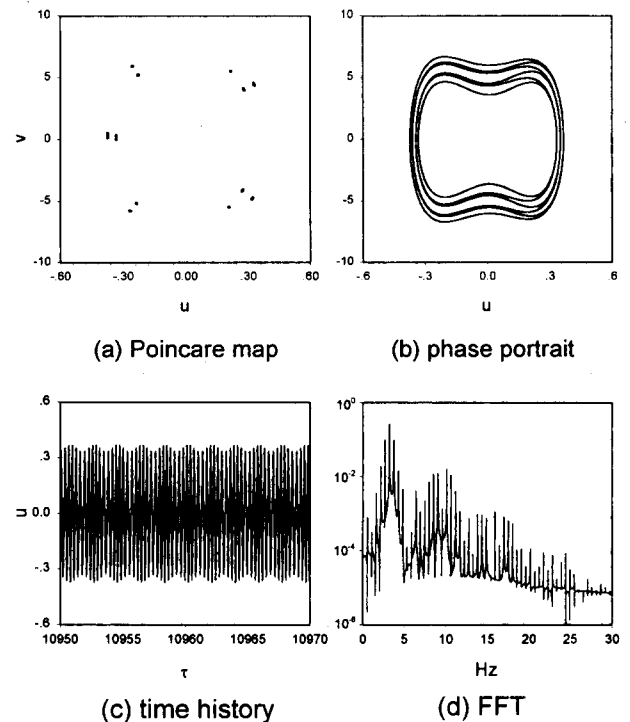
**Fig. 11** The Poincaré map (a) and the time history (b) of case Fig. 4 showing the transient chaos to attracting point of right half plane when  $\epsilon\mu=0.001$  with I.C. (0.0124, 0.0001).

바 있다. 따라서 본 연구에서 다루어진 비대칭 계인 경우는 Melnikov 방법에 대한 검토와 Chirikov의 조건을 이용한 해석이 앞으로의 연구해야 될 과제라고 판단된다.

Fig. 5의 대칭형인 two-well 포텐셜인 경우에 대하여 포앙카레 사상도(Poincaré map), 위상유형(phase portrait), 시간응답(time history)과 푸리에 변환(FFT)의 수치해석을 이용하여 식 (22)의 혼돈운동의 존재를 고찰하였다. 가진 주파수는  $\Omega=40$ 으로 고정하고 변수  $\epsilon\delta=0.001$ 인 경우에  $\epsilon\mu=0.000482$ 이면 호모클리닉 분기가 일어남을 이론적으로 계산할 수 있고, 이때 Fig. 8의 호모클리닉 분기 곡선 상단영역에서 매개변수  $\epsilon\mu$  값을 증가시키면서 초기조건을 안정점근방에 두고 수치해석을 수행하였다. 위의 조건에서 이론적인 호모클리닉 분기 값의 20.745배인  $\epsilon\mu=0.001$ 일 때 Fig. 12(a)의 포앙카레 사상에서 2점으로 나타나 분기가 이루어졌음을 확인할 수 있다. 이 운동은 Fig. 12(d)의 FFT결과를 통해 아조화(subharmonic) 성분과 초조화(superharmonic) 성분이 동시에 나타나는 것으로써 준 주기운동(quasi-periodic motion)이고, 혼돈운동의 경로에 있음을 알 수 있다. 역시, 초기조건에 매우 민감함



**Fig. 12** The quasi-periodic motion of case Fig. 5 when  $\epsilon\mu=0.001$  with I.C. (0.001651, 0.0002).



**Fig. 13** The quasi-periodic motion of case Fig. 5 when  $\epsilon\mu=0.1$  with I.C. (0.00161, 0).



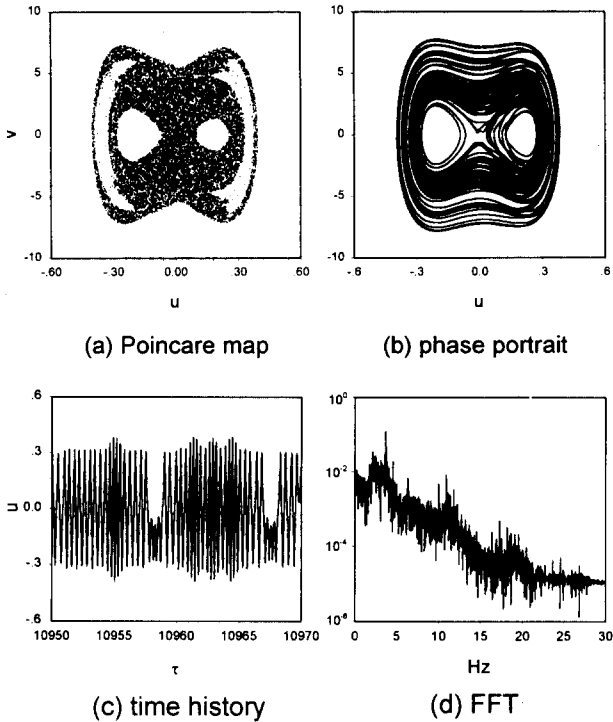


Fig. 14 The chaotic motion of case Fig. 5 when  $\epsilon\mu=0.2$  with I.C. (0.005, 0).

여 다른 초기조건에서는 천천히 중심점에 수렴하는 트랜지언트 카오스(transient chaos) 현상이 존재함도 확인할 수 있었다. 이론적인 호모클리닉 분기 값의 2074.5배인  $\epsilon\mu=0.1$ 일때 Fig. 13(a)의 포앙카레 사상에서 12점으로 수렴하며 Fig. 13(d)의 FFT 결과를 통해 Fig. 12의 경우보다 주기배가현상이 보다 진행되었음을 확인할 수 있다. 이론적인 호모클리닉 분기 값의 4149.02배인  $\epsilon\mu=0.2$ 일때 비로소 Fig. 14(a)와 같이 포앙카레 사상에서 일정한 패턴을 갖는 기이한 끌개(strange attractor)를 볼 수 있었으며 Fig. 14(d)의 FFT 결과로부터 모든 주기성분이 나타나는 것으로 혼돈운동으로 발전되었음을 확인할 수 있었다.

### 6. 결 론

본 연구에서는 조화진동유동을 포함한 곡선파이프 계의 혼돈운동에 대하여 연구되었다. 이 연구를 통하여 호모클리닉 궤도의 존재와, Melnikov 방법을 적용한 호모클리닉 궤도교차 및 혼돈운동의 존재영역을 이론적으로 규명할 수 있었으며, 포텐셜 well의 모양에 무관한 일반적인 경우의 Melnikov 방법

의 적용방법을 제시하였다.

특정한 포텐셜 well에 대한 수치해석을 통하여 melnikov 조건과는 다르게 혼돈운동을 일반적으로 확인할 수는 없었으며 혼돈운동을 확인한 경우에도 melnikov 이론조건과는 큰 차이를 나타냈다. 이에 대하여 Moon<sup>(6)</sup>은 Chirikov criteria를 혼돈운동의 새로운 해석방법을 제시한 바 있으며 이의 적용은 앞으로의 연구과제이다. 특히 비대칭적인 two-well 포텐셜에 대한 연구는 더 까다로운 경우이며 아직도 이론적인 해석방법의 개발이 요구됨을 본 연구를 통하여 확인되었다.

본 연구의 결과는 곡선파이프계의 비선형거동, 혼돈운동 및 유체유발진동을 이해하므로써 파이프 계를 구성하는 변수들의 설계범위를 제안할 수 있다.

### 후 기

본 연구는 1994년도 교육부 학술 연구조성비 (기계공학 : ME 94-D-09 [2차년])에 의하여 연구되었다.

### 참 고 문 헌

- (1) Päidoussis, M. P. and F. C. Moon, 1988, "Non-linear and Chaotic Fluid-Elastic Vibration of a Flexible Pipe Conveying Fluid," *Journal of Fluid and Structures*, Vol. 2, pp. 567~591.
- (2) Päidoussis, M. P., G. X. Li, and F. C. Moon, 1989, "Chaotic Oscillations of the Autonomous System of a Constrained Pipe Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 135, pp. 1~19.
- (3) Päidoussis, M. P., G. X. Li, and R. H. Rand, 1991, "Chaotic Motion of Constrained Pipe Conveying Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 1~19.
- (4) Melnikov, V. K., 1963, "On the Stability of the Center for Time Periodic Perturbations," *Trans. of the Moscow Mathematical Society*, Vol. 12, pp. 1~56.
- (5) Yagasaki, K., M. Sakata, and K. Kimura, 1990, "Dynamics of a Weakly Nonlinear System subjected to Combined Parametric and External Excitation," *Journal of Applied mechanics*, Vol. 57, pp. 209~217.
- (6) Yagasaki, K., 1991, "Chaos in a Weakly Non-linear Oscillator with Parametric and External

Resonances," Journal of Applied mechanics, Vol. 58, pp. 244~250.

(7) 박철휘, 홍성철, 정 욱, 1996, "조화진동유동을 포함한 직선 파이프 계의 혼돈 운동 연구," 한국

소음진동공학회, 제6권, 제2호, pp. 233~244.

(8) Moon, F. C., 1987, "Chaotic Vibrations," John Wiley and Sons, pp. 155~191.