

〈논 문〉

위그너-빌 분포함수에서의 혼신성분 저감 방법 ; 회전 창문함수

A Method to Reduce the Cross-Talk of Wigner-Ville Distribution; Rotating Window

박 연 규* · 김 양 한**

Y-K. Park and Y.-H. Kim

(1997년 1월 23일 접수 ; 1997년 3월 19일 심사완료)

Key Words : Wigner-Ville Distribution(위그너-빌 분포함수), Ambiguity Function(앰비규이티 함수), Cross-talk(혼신성분), Smoothing(스프딩), Rotating Window(회전 창문함수)

ABSTRACT

Wigner-Ville distribution has been recognized as a useful tool and applied to various types of mechanical noise and vibration signals, but its limitation which mainly comes from the cross-talk has not been well addressed. The cross-talk takes place for a signal with multiple components, simply because the Wigner-Ville distribution is a bilinear transform. The cross-talk often causes a negative value in the distribution. This cannot be accepted for the Wigner-Ville distribution, because it is an expression of power. Smoothing the Wigner-Ville distribution by convoluting it with a window, is most commonly used to reduce the cross-talk. There can be infinite number of distributions depending on the windows. In this paper, we attempted to develop a distribution which is the best or the optimal in reducing the cross-talk. This could be possible by employing the ambiguity function. For a general signal, however it is difficult to express the ambiguity function as a mathematically closed form. This requires an appropriate modeling to make such expression possible. We approximated the Wigner-Ville distribution as a sum of linear segments. In the ambiguity function domain, the legitimate components are reflected as linear lines passing through the origin. Every line has its own length and slope. But, the cross-talk is widely distributed in the ambiguity function plane. Based on this realization, we proposed a two-dimensional window which is in fact 'rotating window', that can eliminate cross-talk component. The rotating window is examined numerically and is found to have a better performance in reducing the cross-talk than conventional windows, the Gaussian window.

1. 서 론

시간-주파수 분석 기법의 하나인 위그너-빌 분포함수(Wigner-Ville distribution)⁽¹⁾는 그 성질의 우수

성과, 다른 시간-주파수 분석 기법을 표현하는 기본함수로서의 위치⁽²⁾로 인해 많은 각광을 받아왔고, 또 이에 대한 많은 연구가 이루어져왔다^(1~4). 그러나, 위그너-빌 분포함수는 이중 선형변환(bilinear transform)이기 때문에 여러 성분이 결합되어 있는 신호의 경우 혼신성분(cross-talk)을 발생시킨다는 단점을 갖는다.^(2~4) 이 혼신성분은 위그너-빌 분포함수에 음의 값을 야기시켜, 시간-주파수 평면에서의 파워의

*한국과학기술원 기계공학과

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

분포라는 시간-주파수 분석 기법으로서의 기본 정의를 위배시킬 뿐 아니라, 위그너-빌 분포함수를 통한 해석에 혼돈을 가져오게 하는 중요한 원인이 된다.

위그너-빌 분포함수에서 혼신성분의 문제를 해결하기 위한 하나의 방법으로는 위그너-빌 분포함수에서의 스므딩(smoothing)을 들 수 있다⁽³⁾. 스므딩은 위그너-빌 분포함수와 스므딩 창문함수의 시간과 주파수 양 방향으로의 2차원 컨볼루션(convolution)을 통해 달성되는데, 혼신성분의 감소를 가져올 수는 있지만 시간-주파수 평면에서의 분해능이 나빠진다는 피할 수 없는 문제점 역시 초래하게 된다. 사용자의 목적에 따라 무수히 많은 스므딩 창문함수가 존재할 수 있으며, 각 창문함수에 따라 무수히 많은 분포함수가 존재할 수 있다⁽⁵⁻⁷⁾.

만일 위그너-빌 분포함수에서 실제성분과 혼신성분의 분리가 가능하다면, 이는 혼신성분의 감소에 있어 효과적인 방법을 제공해 줄 수 있다. 본 논문에서는 이를 위하여 앰비규이티 함수(ambiguity function)^(3,8)를 고려하고자 한다. 앰비규이티 함수는 시간-주파수 분석 기법의 입장에서 볼때 위그너-빌 분포함수의 역상(mirror image)으로서 존재하며, 시간 지연(time delay)과 주파수 지연(frequency delay)의 함수로 표시된다. 앰비규이티 함수에서는 실제성분(legitimate component)은 반드시 원점을 지나는 반면, 혼신성분은 일정한 지연을 갖고 형성된다는 사실로 인해 실제성분과 혼신성분의 효과적인 분리가 가능할 수 있다.

본 논문에서는 위와 같은 실제성분과 혼신성분에 관련된 앰비규이티 함수의 성질에 대한 정량적인 해석을 시도하고자 한다. 이를 위하여 일반적인 형상을 갖는 위그너-빌 분포함수를 여러 선분들의 조합으로 표현하였으며, 그 결과 앰비규이티 함수에서의 실제성분은 원점을 통과하는 선분들로 나타나는 반면, 혼신성분은 상대적으로 넓게 분포하는 특징을 보임을 알 수 있었다⁽⁹⁾. 본 논문의 제2장에서는 이러한 앰비규이티 함수의 특성을 해석적으로 살펴본 후, 제3장에서는 이에 기초를 둔 혼신성분을 최소화할 수 있는 회전 창문함수(rotating window)의 구현에 대하여 기술한다.

2. 앰비규이티 함수의 구조

정상상태 신호(stationary signal)의 자기상관함수는 시간지연만의 함수로 표현되는 반면, 비정상상태 신호(nonstationary signal)의 자기상관함수는 시간

지연 뿐만 아니라 절대시간의 함수로 나타난다. 즉, 다음과 같은 표현이 가능하다.

$$r(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (1)$$

여기서, t, τ 는 각각 절대시간과 시간지연을 나타내며, $x(t)$ 는 신호를 나타낸다. 또한, 상첨자*는 공역복소수를 나타낸다.

위그너-빌 분포함수는 식 (1)에 표현된 시간종속 자기상관함수(time dependent autocorrelation)의 시간지연에 대한 푸리에 변환(Fourier transform)으로 정의되며, 그 표현은 다음과 같다.

$$W(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2)$$

위그너-빌 분포함수와는 달리 자기상관함수의 절대시간에 대한 푸리에 변환을 생각할 수 있는데, 이는 앰비규이티 함수라 정의되며 다음과 같이 표현된다.

$$A(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t, \tau) e^{-j\xi t} dt \quad (3)$$

위그너-빌 분포함수와 앰비규이티 함수를 나타낸 식 (2)와 식 (3)으로부터 이중 푸리에 변환(double Fourier transforms)으로 특징지어지는 두 함수 사이의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$W(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\xi t - \omega\tau)} A(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (4)$$

$$A(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\xi t - \omega\tau)} W(t, \omega) dt d\omega \quad (5)$$

식 (2)에서 알 수 있듯이, 위그너-빌 분포함수는 시간-주파수 평면상에서의 파워의 분포를 나타낸다. 즉, 위그너-빌 분포함수는 임의의 시간에 있어서, 시간지연을 따른 요동의 정도를 고려하여 신호의 주파수 특성을 나타내는 것이다. 이와는 달리 앰비규이티 함수는 식 (3)과 식 (5)에서 알 수 있듯이, 시간지연과 주파수지연의 함수로 표현되며, 고정된 시간지연에 대하여 시간을 따른 주파수 특성을 나타내는 함수로 생각할 수 있다.

임의의 형상을 갖는 위그너-빌 분포함수라도 여러 개의 선분들의 조합으로 표현할 수 있음을 논리의 하자없이 가정할 수 있다⁽⁹⁾. 이와 같은 고려를 통해 위그너-빌 분포함수의 혼신성분을 제외한 실제성분만을 다음과 같이 표현하도록 하면,

$$W(t, \omega) \cong \sum_{i=1}^N W_i(t, \omega) \quad (6)$$

여기서, $W_i(t, \omega)$ 는 전체 위그너-빌 분포함수를 형

성하는 선분들 중 i 번째 선분을 나타내며, N 은 전체 선분의 개수가 된다.

위그너-빌 분포함수와 앰비규이티 함수의 관계를 나타내는 식 (5)의 이중 푸리에 변환은 선형적인 특성을 갖고 있으며, 따라서 앰비규이티 함수에서의 실제성분은 위그너-빌 분포함수에서의 실제성분의 이중 푸리에 변환으로부터 직접 계산될 수 있다. 이와 같은 고려를 통해 앰비규이티 함수에서의 실제성분을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$A_{Legitimate}(\xi, \tau) \cong \sum_{i=1}^N A_i(\xi, \tau) \quad (7)$$

여기서, $A_i(\xi, \tau)$ 는 $W_i(t, \omega)$ 의 이중 푸리에 변환을 나타낸다. 식 (7)로부터 앰비규이티 함수에서의 실제성분 역시 위그너-빌 분포함수에서의 경우와 마찬가지로 각각의 부분 성분들의 조합으로 표현될 수 있다는 것을 알 수 있다.

앰비규이티 함수에서의 혼신성분은 위그너-빌 분포함수를 형성하는 여러 선분들 중 (식 (6)), 어느 하나의 선분에 의해서가 아니라 서로 다른 두개의 선분 사이의 상호 작용에 의해 발생하게 된다. 이와 같은 혼신성분에 대한 특성의 고려를 통해 앰비규이티 함수에서의 혼신성분을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_{Cross}(\xi, \tau) \cong \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \chi_{ij}(\xi, \tau) \quad (8)$$

여기서, $\chi_{ij}(\xi, \tau)$ 는 식 (6)에 나타난 위그너-빌 분포를 형성하는 선분중 i 번째와 j 번째의 선분에 의해 초래되는 앰비규이티 함수에서의 혼신성분을 나타낸다.

식 (7)과 식 (8)로부터 실제성분과 혼신성분으로 구성되는 전체 앰비규이티 함수를 다음과 같이 표현할 수 있게 된다.

$$A(\xi, \tau) \cong \sum_{i=1}^N A_i(\xi, \tau) + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \chi_{ij}(\xi, \tau) \quad (9)$$

식 (8)이 의미하는 바는 혼신성분 역시 부분 혼신성분들의 조합으로 표현될 수 있다는 것이다. 따라서, 하나의 기본적인 부분 혼신성분을 해석함으로써 복잡한 형상의 혼신성분에 대한 해석이 가능하게 된다. 본 논문에서는 임의의 형상을 갖는 혼신성분 해석의 기본 단계로서 하나의 부분 혼신성분, 즉 위그너-빌 분포함수를 구성하는 두개의 선분에 의하여 발생하는 혼신성분을 해석하고자 한다.

위그너-빌 분포함수에서 임의의 두개의 선분을 다

음과 같이 표현할 수 있다⁽⁹⁾.

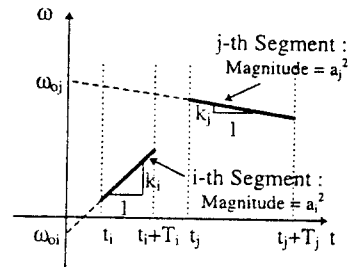
$$\begin{aligned} W_i(t, \omega) &= a_i^2 \frac{k_i}{|k_i|} \delta(\omega - \kappa_i t - \omega_{oi}) \left\{ h(\omega - \kappa_i t_i - \omega_{oi}) \right. \\ &\quad \left. - h(\omega - \kappa_i t_i - \kappa_i T_i - \omega_{oi}) \right\} \\ W_j(t, \omega) &= a_j^2 \frac{k_j}{|k_j|} \delta(\omega - \kappa_j t - \omega_{oj}) \left\{ h(\omega - \kappa_j t_j - \omega_{oj}) \right. \\ &\quad \left. - h(\omega - \kappa_j t_j - \kappa_j T_j - \omega_{oj}) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

여기서, $W_i(t, \omega)$ 와 $W_j(t, \omega)$ 는 각각 위그너-빌 분포함수를 구성하는 선분중 i 번째와 j 번째의 선분을 나타내며, $h(t)$ 는 단위 스텝 함수를 나타낸다. i 번째 선분에 대하여 a_i^2 는 그 크기를, κ_i 와 ω_{oi} 는 각각 그 기울기와 주파수 절편을 나타낸다. 또한, t_i 는 선분의 시작 시간을, T_i 는 선분의 시간축상의 길이를 나타내는 항이 된다. 이와 같은 기술은 j 번째 선분에 대하여도 마찬가지로 성립하는데, 이에 대한 자세한 기술이 Fig. 1의 A에 나타나 있다. 이때 선분의 크기는 위그너-빌 분포함수가 2차 함수임을 고려하여 자승의 형태를 취하였다.

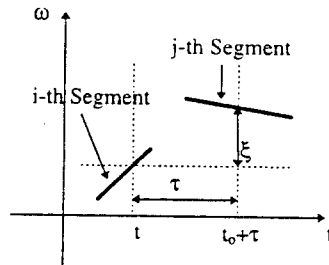
위그너-빌 분포함수로부터 시간 신호는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$x(t)x^*(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{t}{2}, \omega\right) e^{j\omega t} d\omega \quad (11)$$

식 (11)을 이용하여 식 (10)에 표현된 위그너-빌 분포함수에서의 선분에 해당하는 시간신호를 다음과



A. Two arbitrary segments



B. Frequency delay representation

Fig. 1 Illustration of two linear segments

같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 x_i(t) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{a_i^2}{x_i^*(0)} e^{j(\frac{\kappa_i}{2}t^2 + \omega_{oi}t)} \\
 &\otimes \left\{ \left| \kappa_i \right| T_i e^{j(\kappa_i t + \omega_{oi} + \frac{\kappa_i T_i}{2})t} \text{sinc}\left(\frac{\kappa_i T_i t}{2}\right) \right\} \\
 x_j(t) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{a_j^2}{x_j^*(0)} e^{j(\frac{\kappa_j}{2}t^2 + \omega_{oj}t)} \\
 &\otimes \left\{ \left| \kappa_j \right| T_j e^{j(\kappa_j t + \omega_{oj} + \frac{\kappa_j T_j}{2})t} \text{sinc}\left(\frac{\kappa_j T_j t}{2}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서, \otimes 는 시간 t 에 대한 컨볼루션을 나타내며, $\text{sinc}(\theta)$ 는 $\sin(\theta)/\theta$ 로 정의되는 함수이다. 식 (12)에 표현된 신호들에 대하여 혼신성분 $\chi_{ij}(\xi, \tau)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\chi_{ij}(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_j^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\xi t} dt \tag{13}$$

그러나, $x_i(t)$ 와 $x_j(t)$ 의 복잡성으로 인하여 식 (13)에 나타난 푸리에 변환의 직접적인 수학적 계산은 용이하지 않으며, 다른 접근 방법을 필요로 함을 알 수 있다. 이때, 앰비규이티 함수 평면에서 실제성분과 혼신성분을 구별할 수 있게 하는 인자는 그 크기가 아니라 두 성분들의 상대적 위치가 될 것임을 쉽게 생각할 수 있다. 이에 대한 고려를 통해, 혼신성분의 크기에 대한 해석보다는 그 위치의 해석에 주안점을 두는 것이 의미있음을 알 수 있다. 이러한 관점이 앰비규이티 함수에서 혼신성분의 위치를 효과적으로 해석하기 위한 새로운 접근 방법의 모색이 가능하게 한 점이 되는 것을 다음으로 부터 이해할 수 있다.

식 (10)으로부터 위그너-빌 분포함수에서 선분의 위치는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \omega_i(t) &= \frac{\kappa_i}{|\kappa_i|} (\kappa_i t + \omega_{oi}) \{ h(\omega - \kappa_i t - \omega_{oi}) \\
 &\quad - h(\omega - \kappa_i t - \kappa_i T_i - \omega_{oi}) \} \\
 \omega_j(t) &= \frac{\kappa_j}{|\kappa_j|} (\kappa_j t + \omega_{oj}) \{ h(\omega - \kappa_j t - \omega_{oj}) \\
 &\quad - h(\omega - \kappa_j t - \kappa_j T_j - \omega_{oj}) \}
 \end{aligned} \tag{14}$$

여기서, $\omega_i(t)$ 와 $\omega_j(t)$ 는 각각 i 번째와 j 번째 선분의 위치를 나타내는 함수로서 주파수에 해당한다. Fig. 1의 B에서 알 수 있듯이, i 번째 선분 위의 한 점 t_0 에서 τ 의 지연을 갖고 j 번째 선분을 관찰할 경우, 발생하는 주파수지연 ξ 는 t_0 와 τ 의 함수가 된다. 따라서, 하나의 고정된 시간지연 τ 에 대하여 주파수지연 ξ 는 하나의 값에 고정되는 것이 아니라 일

정한 범위를 갖게 됨을 알 수 있다. 주파수지연은 다음과 같이 표현된다.

$$\xi(t_0, \tau) = \omega_j(t_0 + \tau) - \omega_i(t_0) \tag{15}$$

식 (14)를 식 (15)에 대입하여 다시 다음과 같이 주파수지연을 나타낼 수 있다.

$$\xi(t_0, \tau) = \Delta\omega + \Delta\kappa t_0 + \kappa_j \tau \tag{16}$$

여기서, $\Delta\omega = \omega_{oj} - \omega_{oi}$ 이며 $\Delta\kappa = \kappa_j - \kappa_i$ 가 된다. 식 (14)에도 나타나 있듯이 위그너-빌 분포함수를 구성하는 선분들은 유한한 길이를 갖게 되며, 이는 식 (16)의 t_0 와 τ 의 값을 일정한 구간으로 한정시키게 된다. 이 구간은 Fig. 1에서 쉽게 확인할 수 있으며 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 t_i &\leq t_0 \leq t_i + T_i \\
 t_j - t_0 &\leq \tau \leq t_j + T_j - t_0
 \end{aligned} \tag{17}$$

식 (17)로 표현된 t_0 와 τ 의 범위에 대한 이해를 토대로 식 (16)을 관찰함으로써, 두개의 선분에 의해 형성되는 앰비규이티 함수에서의 혼신성분은 다음의 네개의 직선으로 둘러싸인 영역에 위치함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \xi(\tau) &= \Delta\omega + t_i \Delta\kappa + \kappa_j \tau \\
 \xi(\tau) &= \Delta\omega + (t_i + T_i) \Delta\kappa + \kappa_j \tau \\
 \xi(\tau) &= \Delta\omega + t_j \Delta\kappa + \kappa_i \tau \\
 \xi(\tau) &= \Delta\omega + (t_j + T_j) \Delta\kappa + \kappa_i \tau
 \end{aligned} \tag{18}$$

이 혼신성분의 영역은 Fig. 2에 나타나 있다. 보다 일반적인 경우에 대한 해석 역시, 적절한 i 와 j 의 선택으로 달성될 수 있을 것이다.

한가지 특별한 경우로, i 와 j 가 같다면 식 (18)에 표현된 네개의 직선들은 다음식에 표현될 하나의 직선이 됨을 알 수 있다.

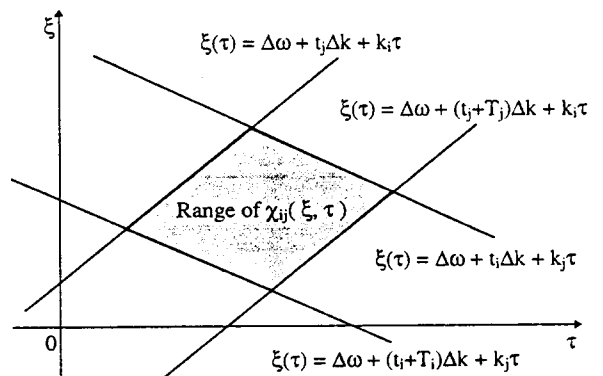


Fig. 2 Location of cross-talk caused by two linear segments

$$\xi(\tau) = \kappa_i \tau \quad (19)$$

여기서, τ 의 범위는 식 (17)로부터 $-T_i \leq \tau \leq T_i$ 와 같이 정해진다. 식 (19)로부터, 서로 같은 성분에 의해 발생하는 혼신성분, 즉 실제성분은 하나의 선분으로 나타남을 알 수 있다. 앰비규이티 함수에서의 실제성분은 원점을 지나는 선분으로 나타나는데, 그 기울기는 위그너-빌 분포함수에서의 해당 성분의 기울기(κ_i)와 같게 된다. 식 (7)에서 알 수 있듯이 전체적인 실제성분은 식 (19)에 나타난 것과 같은 부분 성분들의 조합으로 표현되며, 따라서 앰비규이티 함수에서의 실제성분은 원점을 통과하며 각각의 기울기를 갖는 선분들의 조합으로 나타남을 알 수 있다.

3. 회전 창문함수

제 2 장에서는 식 (9)에서와 같이 앰비규이티 함수를 실제성분과 혼신성분으로 나누어 표현한 바 있는데, 이중 실제성분은 유지하면서 혼신성분만을 소거하는 것이 본 논문의 목적이라 할 수 있다. 이는 보통 커널(kernel)⁽³⁾이라고 불리우는 창문함수를 앰비규이티 함수에 적용함으로써 달성될 수 있을 것이다. 이 장에서는 본 논문의 목적에 부합되는 효과적인 창문함수를 제안하고자 한다. 창문함수의 설계시 앞장에서 기술한 앰비규이티 함수에서의 실제성분과 혼신성분의 특성에 대한 인식을 토대로 혼신성분의 소거를 시도하고자 한다.

창문함수의 적용은 다음과 같이 앰비규이티 함수에 2차원 창문함수를 곱함을 의미한다.

$$A_w(\xi, \tau) = G(\xi, \tau) A(\xi, \tau) \quad (20)$$

여기서, $A_w(\xi, \tau)$ 는 창문함수가 적용된 앰비규이티 함수를, $G(\xi, \tau)$ 는 2차원 창문함수를 의미한다. 앰비규이티 함수에서의 창문함수의 적용에 의해 변형된 위그너-빌 분포함수는 식 (20)의 이중 푸리에 변환을 수행함으로써 얻어질 수 있으며, 그 표현은 다음과 같다.

$$W_s(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(t-t', \omega-\omega') W(t', \omega') dt' d\omega' \quad (21)$$

여기서, $S(t, \omega)$ 는 스므딩 창문함수로서 앰비규이티 함수에 적용된 창문함수의 이중 푸리에 변환이 된다.

$$S(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\xi t - \omega \tau)} G(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (22)$$

식 (21)에서 알 수 있듯이, 앰비규이티 함수에서의 창문함수 적용에 의한 변형된 위그너-빌 분포함수는 원래의 위그너-빌 분포함수와 2차원 창문함수의 시간과 주파수 축을 따른 2차원 컨볼루션으로 나타남을 알 수 있다. 즉, 앰비규이티 함수에서의 창문함수 적용은 위그너-빌 분포함수의 스므딩을 의미하는 것이다. 이러한 스므딩된 위그너-빌 분포함수를 generalized Cohen's class⁽³⁾라 지칭한다.

앰비규이티 함수에 적용되는 창문함수의 크기가 클 경우 상대적으로 많은 혼신성분을 포함하게 된다. 그러나, 이는 위그너-빌 분포함수에 스므딩 창문함수의 크기가 작은 것을 의미하여 상대적으로 좋은 분해능을 갖게된다. 반대로 작은 창문함수는 적은 혼신성분을 포함하지만 위그너-빌 분포함수에서의 나쁜 분해능을 유발할 것임을 알 수 있다.

식 (5)로부터 원점에서의 앰비규이티 함수값을 표현하면 다음과 같다.

$$A(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \omega) dt d\omega \quad (23)$$

식 (23)에서 쉽게 알 수 있듯이 $A(0, 0)$ 는 신호의 에너지를 의미하며, 따라서 창문함수의 적용시 신호의 에너지를 보존하기 위하여는 창문함수의 크기는 원점에서 1의 값을 가져야 한다. 즉, $G(0, 0) = 1$ 이 되어야 한다.

식 (20)에서 식 (23)에 걸쳐 앰비규이티 함수와 위그너-빌 분포함수의 창문 함수들에 대한 일반적인 성질을 살펴보았다. 지금까지는 효과적인 혼신성분의 감소를 위한 창문함수의 설계에 관하여 다루고자 한다.

앞장에서 언급하였듯이 앰비규이티 함수 영역에서 실제성분은 원점을 지나며 유한길이를 갖는 선분들의 조합으로 나타난다. 또한, 각 선분의 기울기는 그에 해당하는 위그너-빌 분포함수에서의 선분의 기울기와 같게 된다. 이는 실제성분이 갖는 매우 중요한 성질로서 실제성분이 각도에 따른 분포를 갖는 것을 의미한다. 즉, 각도에 따라 실제성분의 존재 유무 및 그 크기가 달라지게 된다. 그러나, 실제성분과는 달리 혼신성분은 시간지연-주파수지연 평면에 넓게 분포하여 나타나는 특성을 갖는다. 이와 같은 사실을 고려할 때, 실제성분을 유지한 채 혼신성분만을 소거하기 위한 효과적인 창문 함수는 실제성분의 각도에 따른 정보를 반영할 수 있는 형태가 되어야 할 것이다. Fig. 3에 이러한 창문함수의 기본 개념을 나타내었다.

위에 언급한 각도에 따른 정보를 반영할 수 있는

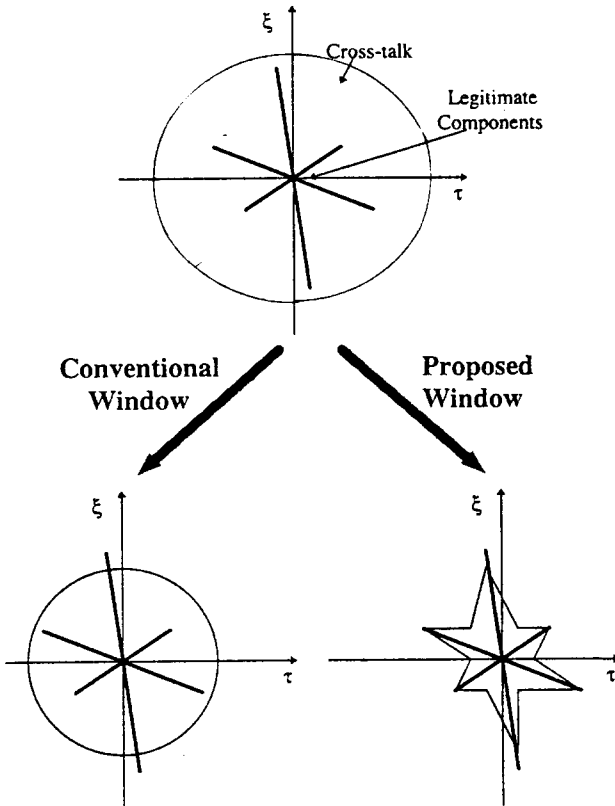


Fig. 3 Basic concept of the rotating window

새로운 창문함수를 설계하는 가장 쉬운 방법은 기존의 창문함수로 하여금 이러한 정보를 가질 수 있도록 수정을 가하는 것임을 쉽게 생각할 수 있다. 모든 창문함수는 각각의 형상을 결정짓는 인자를 갖게 된다. 가우시안 창문함수(Gaussian window)의 경우 표준편차(standard deviation; σ)가, 한 창문함수(Hann window)나 사각 창문함수의 경우에는 길이가 창문함수의 형태를 결정짓는 인자가 된다. 따라서, 만일 어떠한 창문함수를 수정하고자 한다면, 그 창문함수의 형태를 결정짓는 인자에 수정이 가해져야 할 것이다. 예를 들어 가우시안 창문함수를 변형하여 각도에 따른 정보를 반영하도록 한다면, 그 표준편차가 각도 정보를 반영하도록 변형되어야 한다. 가우시안 창문함수의 푸리에 변환은 또 다른 가우시안 창문함수의 형태를 가진다. 즉, 가우시안 창문함수는 시간과 주파수 영역에 있어 대칭적인 특징을 갖기 때문에, 스모딩 창문함수로 많이 이용되어 왔다.^(10,11) 따라서, 본 논문에서는 새로운 창문함수의 설계에 있어 가우시안 창문함수를 기본 창문함수로 하여 수정을 시도하고자 한다. 그 결과 새로운 창문함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R(\xi, \tau) = e^{-(\xi^2 + \tau^2)/2\sigma^2 f^2(\theta)} \quad (24)$$

여기서, $f(\theta)$ 는 각도에 따른 정보를 나타내는 인자, 즉 각도 종속 인자(angle dependency factor)로서 뒤에 정의될 것이며, θ 는 $\theta = \tan^{-1}(\xi/\tau)$ 로 정의되는 각도가 된다. 식 (24)는 새로운 창문함수의 설계에 있어 가우시안 창문함수의 형태를 결정짓는 표준편차만이 각도 정보를 반영하도록 수정되었음을 보여준다. 즉, 표준편차 σ 만이 $\sigma f(\theta)$ 로 바뀌었음을 보여준다.

각도 종속 인자는 실제성분의 각도에 따른 정보를 반영해야 한다는 조건을 충족시키는 범위 내에서 임의의 형태로 정의될 수 있다. 본 논문에서는 목적함수인 위그너-빌 분포함수가 파워를 나타내는 함수라는 사실을 고려하여, 각도에 따른 파워의 비를 각도 종속 인자로 정의하고자 한다. 즉,

$$f(\theta) = \frac{P(\theta)}{P_{max}} \quad (25)$$

여기서, $P(\theta)$ 는 각도 θ 에 따른 파워를, P_{max} 는 $P(\theta)$ 중 가장 큰 값을 나타낸다.

임의의 각도에 따른 파워의 계산은 앰비규이티 함수의 절대값에, 구하고자 하는 각도로 방향지어진 좁은 띠를 곱한 후 적분을 수행함으로써 가능할 수 있다. 이때 앰비규이티 함수의 절대값을 사용한 이유는, 비록 앰비규이티 함수 자체는 물리적으로 의미있는 양이 아니라 할 지라도 파워나 에너지와 같은 2차함수이기 때문이다. $P(\theta)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$P(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\xi, \tau)| s_{\theta}(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (26)$$

여기서, $s_{\theta}(\xi, \tau)$ 는 각도 θ 로 방향지어진 좁은 띠를 나타낸다. Fig. 4에 나타난 것과 같은 좁은 띠를 회전시키면서 앰비규이티 함수의 절대값에 곱함으로써 각도에 따른 파워의 분포를 계산할 수 있게 된다. 좁은 띠를 회전시킨다는 사실로부터 “회전 창문함수”라는 이름이 지어지게 되었다.

회전 창문함수의 설계와 관련하여 마지막으로 남은 작업은 회전하는 좁은 띠의 형태를 결정하는 것이다. 본 논문에서는 회전 창문함수를 설계하기 위한 기본 창문함수로 가우시안 창문함수를 사용한 바 있는데, 수식 전개 of 일관성을 위하여 띠의 형태 역시 가우시안 형태를 사용하는 것이 논리의 하자가 없을 것이다. 그 결과 좁은 띠는 다음식과 같이 정의된다.

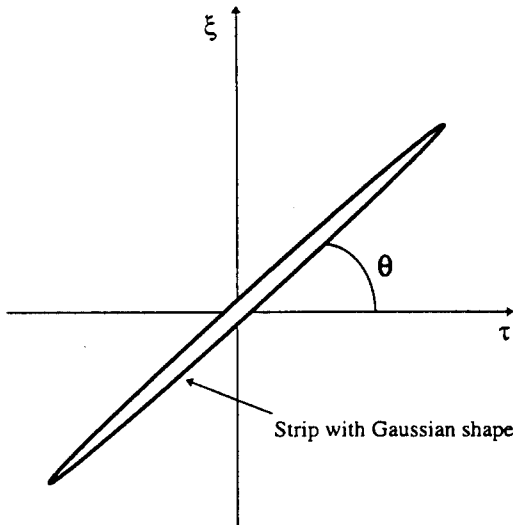


Fig. 4 Rotation of a narrow strip with Gaussian shape

$$s_{\theta}(\xi, \tau) = e^{-\frac{[\cos(\theta)\tau + \sin(\theta)\xi]^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{[-\sin(\theta)\tau + \cos(\theta)\xi]^2}{2\sigma_s^2}} \quad (27)$$

여기서, σ 는 띠의 길이 방향을 따른 표준편차를 나타내는데 회전 창문함수의 크기와 관련된다. σ_s 는 띠의 폭 방향을 따른 표준편차로서, 각도에 따른 분해능을 높이기 위하여 σ 에 비해 가능한 작아야 한다.

회전 창문함수는 식 (24)에서 식 (27)까지를 연속적으로 적용함으로써 완전하게 구현될 수 있다.

회전 창문함수의 수학적 계산은 그 복잡성으로 인하여 용이하지 않은 상황이다. 예를 들어 앞장에서 논의되었던 두개의 성분만으로 구성된 간단한 위그너-빌 분포함수에서조차 회전 창문함수의 수학적 표현은 불가능하다. 따라서, 본 논문에서는 회전 창문함수의 특징과 성능을 파악하기 위한 방법으로 전산기 모의실험을 수행하고자 한다.

Fig. 5는 시간의 1차함수 형태의 주파수 성분 두개로 구성된 신호에 대한 모의실험 결과이다. 이때, 데이터의 개수는 128개, 샘플링 주파수는 128 Hz로 하였는데, 이는 이후의 모든 모의실험에 있어 동일하다. 그림에서 A, B는 각각 위그너-빌 분포함수와 앰비규이티 함수를, C는 각도 종속 인자를, D는 회전 창문함수를, 그리고 E, F는 각각 회전 창문함수의 적용에 의해 변형된 위그너-빌 분포함수와 앰비규이티 함수를 나타낸다. 위그너-빌 분포함수에서 서로 다른 기울기를 갖는 두개의 실제성분의 영향으로, 각도 종속 인자는 그 두 기울기를 나타내는 두개의 피크를 나타내고 있음을 알 수 있다. 또한, 각도 종속 인자로부터 계산된 회전 창문함수는 앰비규이티 함수에서의 실제성분과 유사한 형상을 가져 실

제성분만을 유지하면서 혼신성분을 감소시킬 수 있게 형성되어 있음을 알 수 있다. 최종적으로 회전 창문함수의 적용에 의해 변형된 위그너-빌 분포함수에서는 원래의 위그너-빌 분포 함수에 비해 혼신성분이 현저히 감소되었음을 보여준다.

Fig. 6은 시간의 2차함수 형태의 주파수 성분 두개로 구성된 신호에 대한 모의실험 결과인데, 두 성분은 시간-주파수 평면에서 서로 평행한 특성을 갖는다. 그림의 배열은 Fig. 5와 동일하다. 위그너-빌 분포함수에서 두가지 형태의 혼신성분을 관찰할 수 있다. 두 실제성분 사이에 강하게 존재하는 혼신성분과 시간-주파수 평면에 넓게 분포하는 혼신성분이 있는데, 그 중 전자는 두 실제성분의 상호작용에 의한 결과이고 후자는 실제성분이 직선이 아닌 곡선의 형태임에 기인한 결과이다. 앰비규이티 함수에서는 나뭇잎이 두개 붙어있는 형태의 띠를 관찰할 수 있는데, 이는 실제성분이 곡선의 형태를 가지는 사실에 연유하며 위그너-빌 분포함수에서 넓게 분포하는 혼신성분과 관련된다. 이러한 띠는 세개가 존재하는데, 그 중 가운데 것이 실제성분을, 나머지는 혼신성분을 나타낸다. 이 혼신성분은 위그너-빌 분포 함수에서는 두 실제성분 사이에 강하게 보이는 성분해당한다.

각도 종속 인자를 볼때 Fig. 5에 비해 폭이 넓은 피크를 보여주는데, 이 역시 실제성분이 곡선인 것이 그 이유이다. 회전 창문함수는 Fig. 5의 경우와 마찬가지로 앰비규이티 함수에서 실제성분만을 유지할 수 있는 형태로 구현되었음을 알 수 있으며, 그 결과 변형된 위그너-빌 분포함수는 원래의 위그너-빌 분포함수에 비해 현저히 감소된 혼신성분을 보여주고 있다.

Fig. 7은 Fig. 6에서 사용된 신호에 대한 회전 창문함수 적용과 가우시안 창문함수 적용의 비교를 나타낸다. 두 창문함수 모두에 대하여, 그 크기가 줄어들어 따라 혼신성분의 정도가 줄어드는 반면, 분해능이 나빠짐을 보여준다. 같은 표준편차에 대하여 회전 창문함수와 가우시안 창문함수를 비교해 볼때, 분해능 면에서는 별다른 차이가 없지만 혼신성분의 감소에 있어서는 회전 창문함수가 더 우수한 성능을 보여주고 있음을 알 수 있다. 즉, 회전 창문함수의 적용은 가우시안 창문함수등의 기존의 창문함수의 적용에 비해, 실제성분이 존재하는 각도에 대하여는 동일한 크기를 유지하여 실제성분의 분해능 면에서 같은 성능을 나타내지만, 그외의 각도에 대하여는 추가적인 감쇠를 행함으로써 혼신성분의 감소를 더

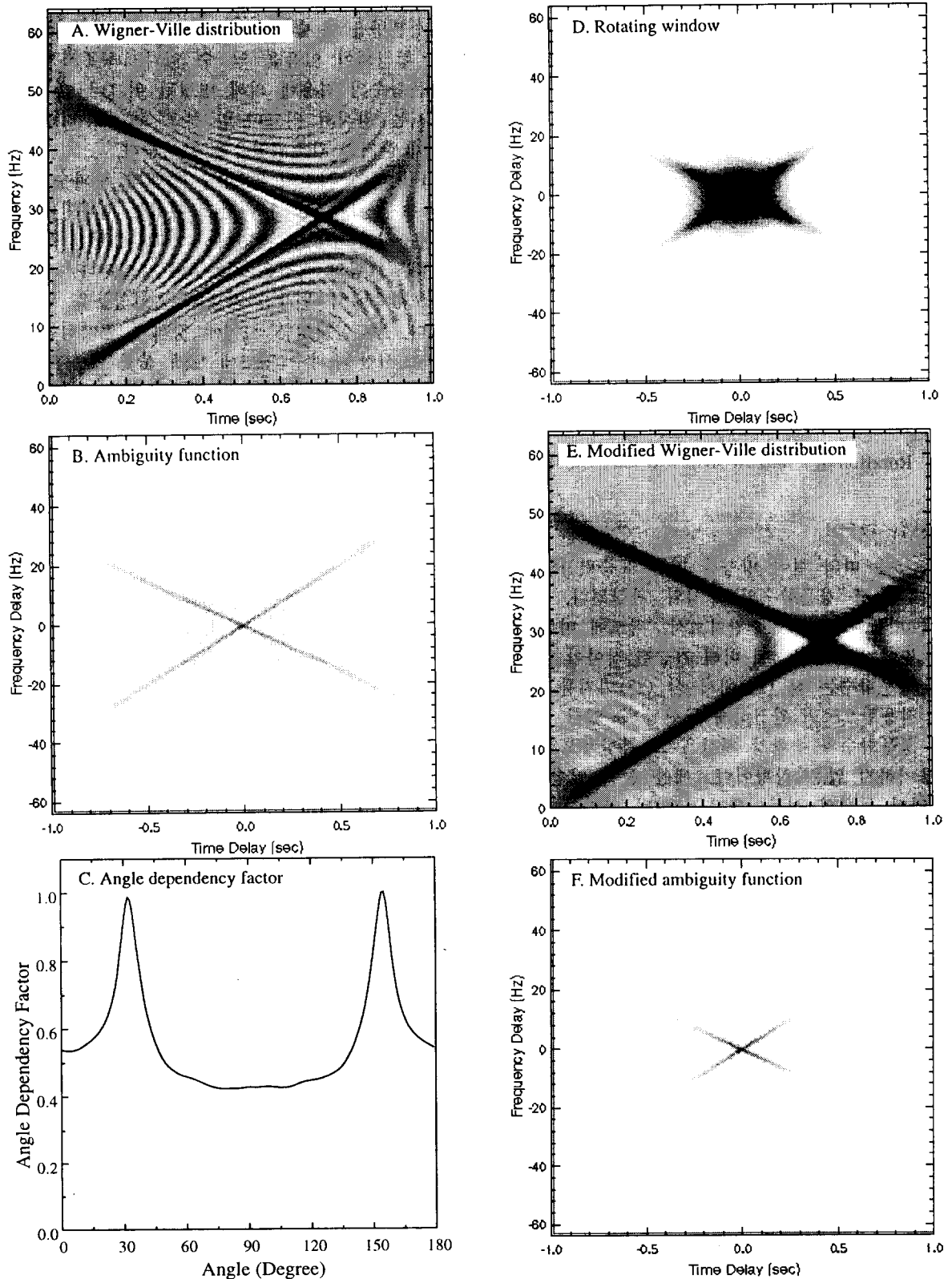


Fig. 5 Application of a rotating window in the ambiguity function for a signal composed of two crossing chirp signals ($\omega_1(t) = 2\pi * 40t$, $\omega_2(t) = 2\pi * (50 - 30t)$, $N = 128$, $f_s = 128$ Hz, Rotating Strip : $\sigma = 16\Delta$, $\sigma_s = 1\Delta$)

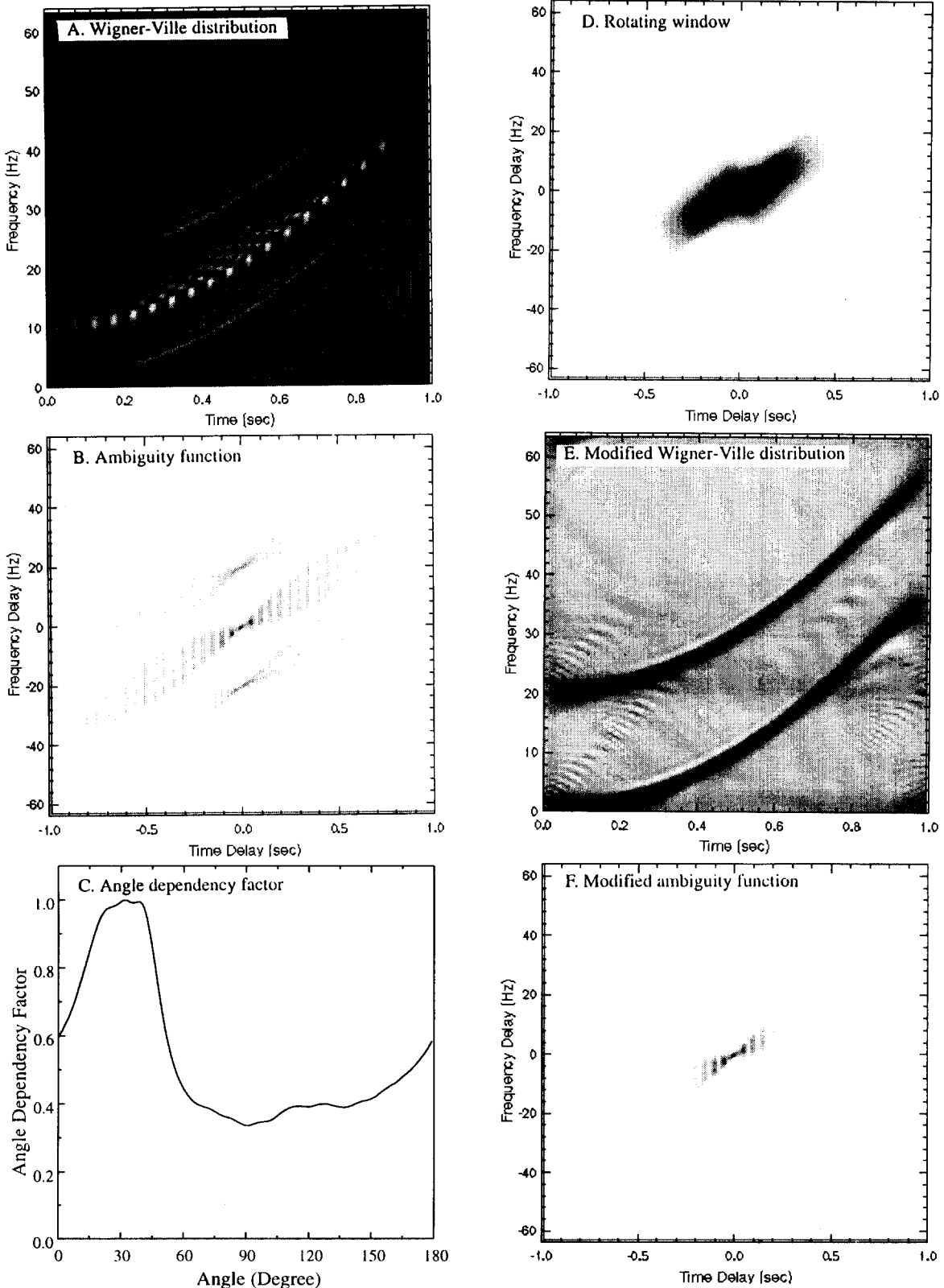


Fig. 6 Application of a rotating window in the AF for a signal with two parallel 2nd order time-varying frequency components ($\omega_1(t) = 2\pi \cdot 40 t^2$, $\omega_2(t) = 2\pi \cdot (20 + 40 t^2)$, $N = 128$, $f_s = 128$ Hz, Rotating Strip : $\sigma = 16\Delta$, $\sigma_s = 1\Delta$)

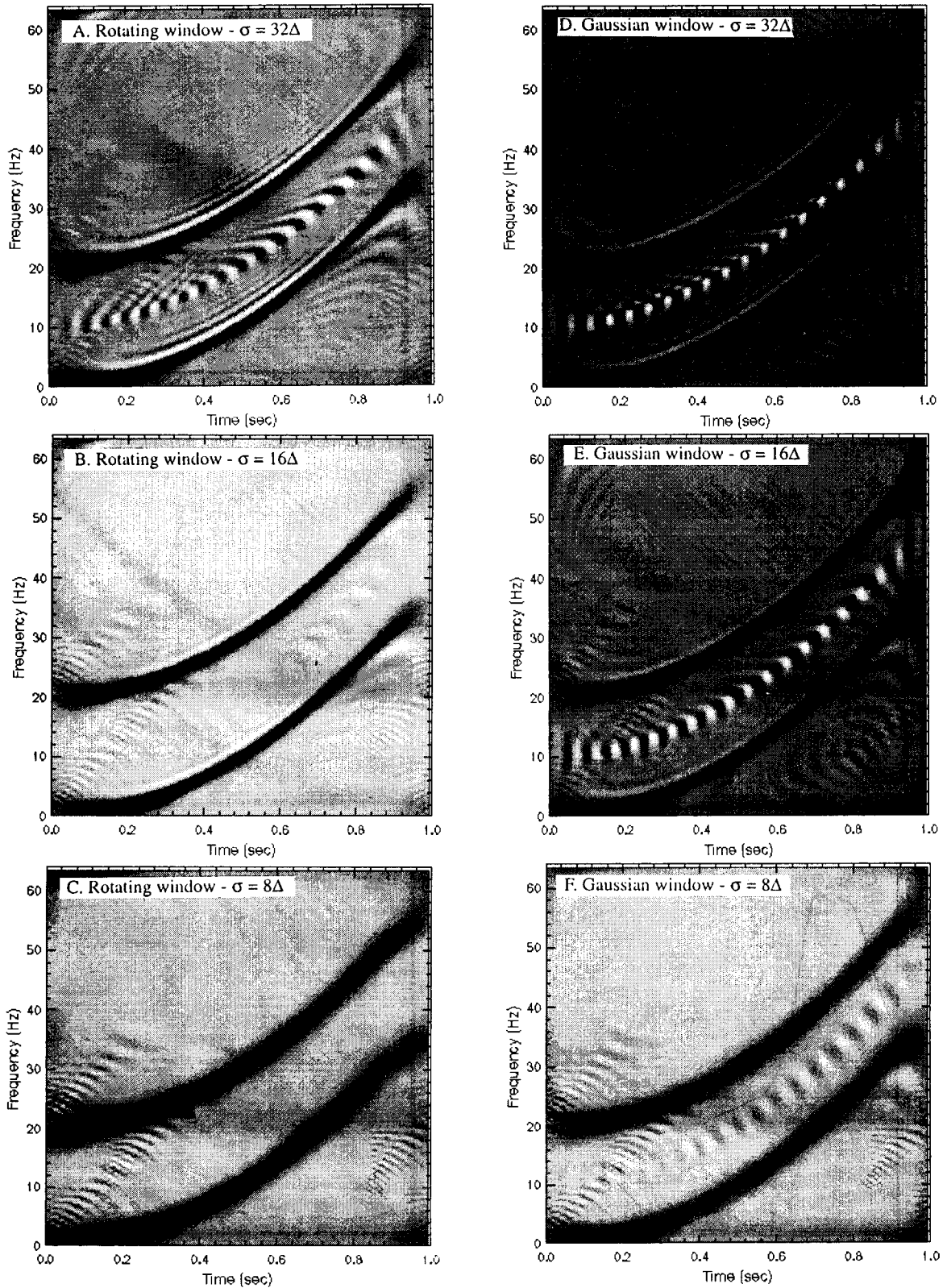


Fig. 7 Comparison of the rotating window and Gaussian window for a signal with two parallel 2-nd order time-varying frequency components ($\omega_1(t) = 2\pi \cdot 40t^2$, $\omega_2(t) = 2\pi \cdot (20 + 40t^2)$, $N = 128$, $f_s = 128$ Hz, Rotating Strip : $\sigma = 16\Delta$, $\sigma_s = 1\Delta$)

욱 효율적으로 달성할 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 위그너-빌 분포함수를 선분들의 조합으로 표현한 후, 이를 바탕으로 앰비규이티 함수에서 실제성분과 혼신성분의 상대적 위치를 파악하였다. 앰비규이티 함수에서 실제성분은 원점을 지나며 서로 다른 길이와 기울기를 갖는 선분들로 나타나는 반면, 혼신성분은 시간지연-주파수지연 평면에 넓게 분포하는 특성을 나타낸다.

위그너-빌 분포함수에서 혼신성분을 감소시키기 위한 목적으로 가우시안 창문함수를 수정하여 회전 창문함수를 구현하였는데, 이 창문함수는 실제성분에 존재하는 각도에 따른 정보를 갖도록 하였다. 각도 정보는 가우시안 형태의 좁은 띠를 회전시키며 앰비규이티 함수의 절대값에 적용함으로써 얻을 수 있는데, 각도 종속 지수로 정의되었다. 각도 종속 지수에 따라 회전창문함수의 길이는 각도에 따라 변하게 된다.

전산기 모의실험을 통하여 회전 창문함수의 특성과 성능을 살펴보았는데, 가우시안 창문함수와 비교하여 같은 분해능에도 불구하고 혼신성분의 감소에 있어 더 우수한 성능을 보였다.

참고 문헌

- (1) E. Wigner, 1932, "On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium," *Physical Review*, 40, pp. 749~759.
- (2) T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbräuker, 1980, "The Wigner Distribution-A Tool for Time-Frequency Signal Analysis;Part I: Continuous-Time Signals," *Philips J. Res.*, 35, pp. 217~250.
- (3) L. Cohen, 1989, "Time-Frequency Distribution-A Review," *Proceedings of the IEEE*, 77(7), pp. 941~981.
- (4) M.R. Dellomo and G.M. Jacyna, 1991, "Wigner transforms, Gabor coefficients, and Weyl-Heisenberg wavelets," *J. of Acoust. Soc. Am.*, 89(5), pp. 2355~2361.
- (5) W. Martin and P. Flandrin, 1985, "Wigner-Ville Spectral Analysis of Non-stationary Process," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-33(6), pp. 1461~1470.
- (6) J.E.M. Janssen and T.A.C.M. Claasen, 1985, "On Positivity of Time-Frequency Distribution," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-33(4), pp. 1029~1032.
- (7) H.-I. Choi and W.J. Williams, 1989, "Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-37(6), pp. 862~871.
- (8) T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbräuker, 1980, "The Wigner Distribution-A Tool for Time-Frequency Signal Analysis;Part III:Relations with Other Time-Frequency Signal Transformations," *Philips J. Res.*, 35, pp. 372~389.
- (9) Y.-K. Park and Y.-H. Kim, "A Method to Minimize the Cross-Talk of Wigner-Ville Distribution," accepted for *Mechanical Systems and Signal Processing*.
- (10) Y.-K. Park and Y.-H. Kim, 1995, "Bias Error due to Windows for the Wigner-Ville Distribution Estimation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 9(6), pp. 675~684.
- (11) T.J. Wahl and J.S. Bolton, 1993, "The Application of the Wigner Distribution to the Identification of Structure-Borne Noise Components," *J. of Sound and Vibration*, 163(1), pp. 101~122.