

알루미늄 합금 박판 스탬핑 공정의 단면 성형 해석

이광병* · 이승열** · 김영탁***

(1996년 12월 23일 접수)

Sectional Forming Analysis of Stamping Processes for Aluminum Alloy Sheet Metals

K. B. Lee, S. Y. Lee and Y. T. Keum

Abstract

The sectional forming analysis of stamping processes for aluminum alloy sheet metals was investigated. For the modeling of the anomalous behavior of aluminum alloy sheet, the Barlat's strain rate potential and Hill's 1990 non-quadratic yield theory with an isotropic hardening rule were employed. The rigid-viscoplastic FEM formulation which solves equilibrium equation for plane-strain state with mesh-normal geometric constraints was derived. A new method to determine the Barlat's anisotropic coefficients was also suggested. To verify the validity of the formulation, the stretch and draw forming processes of a square cup were simulated.

Key Words : Sectional Forming Analysis, Hill's Anisotropy, Barlat's Strain Rate Potential, Aluminum Alloy Sheet Metals, Rigid-viscoplastic FEM

1. 서론

최근 항공기나 자동차용 성형소재의 경량화 추세에 따라 수요가 점차 증가되고 있는 알루미늄 합금 박판은 비철 금속의 이상거동(anomalous behavior) 현상⁽¹⁾으로 인하여 성형해석이 까다로운 것으로 알려져 있다. 따라서 비철 금속의 이상거동을 수용할 수 있는 이방성 항복조건과 이 항복조건을 도입한 성형공정의 유한요소 해석이 중요한 연구과제가 되고 있다.

박판 성형 해석에서 가장 널리 이용되고 있는 평면 이

방성 항복이론은 1948년에 Hill⁽²⁾이 제안한 2차 이방성 항복조건으로, Mises의 항복조건식에 이방성을 나타내는 6개의 상수를 도입하여 일반화한 것이다. 그러나, Hill의 이론은 R 값이 1보다 작은 금속에 대해서는 이론으로부터 예측되는 등이축 인장에서의 항복응력값이 실험에 의한 결과값보다 항상 낮게 나타나는 것으로 알려져 있다.⁽³⁾ Hill⁽⁴⁾은 1979년에 판재의 수직이방성을 묘사하는 보다 일반적인 M 차식 항복조건을 발표하였는데, 실험에 의해서 지수 M 값을 결정하기 때문에 그 실험의 하중경로 주위에서는 실험결과와 잘 일치하는 것으로 알려져 있어 평면

* 한양대 대학원
** 동부제강
*** 한양대학교

등방성을 가정한 성형해석에서 많이 사용되고 있다.

최근 들어 비철금속의 이상거동을 보다 정확히 모델링하기 위하여 비2차 평면 이방성 항복조건에 대한 몇몇 연구가 보고되고 있다. Hill⁽⁶⁾은 1990년에 자신의 2차 이방성 항복조건과 M차 수직이방성 항복조건을 일반화하여 응력장에서 표현한 비2차 이방성 항복조건을 제시하였다. 한편, Barlat^(7,9)은 비철금속의 이상거동을 응력장에서 표현하는 비2차 이방성 항복조건과 강·점소성 유한요소 수식화에 적합한 변형을 속도장의 비2차 이방성 항복조건을 제시하였다. Barlat의 항복이론은 금속의 결정조직에 기초를 두고 구성되었기 때문에 단축인장 및 등축인장 상태에서 작은 곡률 반경의 항복면을 갖는 것으로 알려진 FCC 금속의 항복거동을 잘 묘사한다고 보고된 바 있다.⁽¹⁰⁾ 응력장에서 표현되는 Barlat의 항복식은 Chung et al.⁽¹¹⁾이 상용 코드인 ABAQUS/implicit의 부프로그램인 "UMAT"에 도입하여 2008-T4 알루미늄 합금 판재를 대상으로 원통굽 뒹뚱로잉 공정을 시뮬레이션한 후 예측된 귀형상 및 관 두께 분포를 실험치와 비교하여 결과가 유사함을 보였다. 또한, 이승열 등⁽¹²⁾과 윤정환 등⁽¹³⁾은 Barlat의 변형을 속도장의 이방성 항복 조건을 유한요소 수식화에 도입하여 원통굽의 성형공정을 해석하고, 그 유효성을 입증한 바 있다.

본 연구에서는 Barlat이 제시한 변형을 속도장에서의 항복이론과 Hill이 1990년에 제시한 비2차 이방성 항복이론을 도입하여 박막이론에 기초한 2차원 강·점소성 유한 요소 방정식을 정식화하고, 평면변형 성형공정을 해석할 수 있는 단면 성형 해석 프로그램을 개발하였다. 또한, 3방향의 인장시험을 통해 얻은 항복응력값과 소성변형률비를 이용하여 Barlat의 이방성 계수를 구하는 방법을 제안하였다. 개발된 프로그램의 타당성과 유효성을 입증하기 위하여 SKY-AL TG25 박판의 평면변형 스트레치 및 드로우 실험을 수행하고 성형공정을 해석하였다.

2. 이방성 항복이론

2.1 Barlat의 항복이론과 계수 결정

Barlat의 이방성 항복조건에서 평면응력 상태 ($\sigma_{33} = 0$)를 가정하면 항복식 Φ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_{ij}) &= \lambda_1 - \lambda_2 |^M + | \lambda_1 + 2\lambda_2 |^M + | 2\lambda_2 + \lambda_2 |^M \\ &= 2\bar{\sigma}^M \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, 유효응력 $\bar{\sigma}$ 는 압연방향의 단축 인장 항복응력으로 정의한다. 식(1)에서 M 은 결정 구조와 관련된 항복 파라미터로 이방성을 특정 짓는 인자는 아니다. 일반적으로 재료의 결정 구조에 대한 정확한 정보가 없는 경우에 M 값은 FCC 금속에 대해서는 8, BCC 금속에 대해서는 6으로 하는 것이 적절한 것으로 알려져 있다.⁽¹¹⁾

식(1)에서 $\lambda_{k=1,2}$ 는 식(2)의 행렬 L_s 의 주값(principal value)을 나타낸다.

$$L_s = \begin{bmatrix} \frac{(b_3 + b_2)\sigma_{11} - b_3\sigma_{22}}{3} & b_6 \sigma_{12} \\ b_6 \sigma_{12} & \frac{(b_3 + b_2)\sigma_{11} - b_3\sigma_{22}}{3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

식(2)에서 첨자 1, 2는 Fig. 1의 직교 이방성 대칭축을 나타내며, 압연 강판의 경우 각각 압연방향과 폭방향이 된다. 그리고, $b_{i=1,2,3,6}$ 는 이방성 계수로서 결정조직으로부터 계산되거나 인장시험으로부터 산출된다.

이방성 계수 b_1, b_2, b_3 는 압연방향과 폭방향의 단축 인장 항복응력 ($\sigma''_0, \sigma''_{90}$)과 등축 인장 항복응력 (σ''_0)을 이용하면 구할 수 있다. 여기서, 각각의 응력상태는 Fig. 1의 항복응력 곡선상에서 1a, 2a, 3a 세점에 해당한다. 따라서, 각 응력상태를 고려하면, 식(1)과 식(2)로부터 다음의 비선형 연립 방정식을 얻을 수 있다.

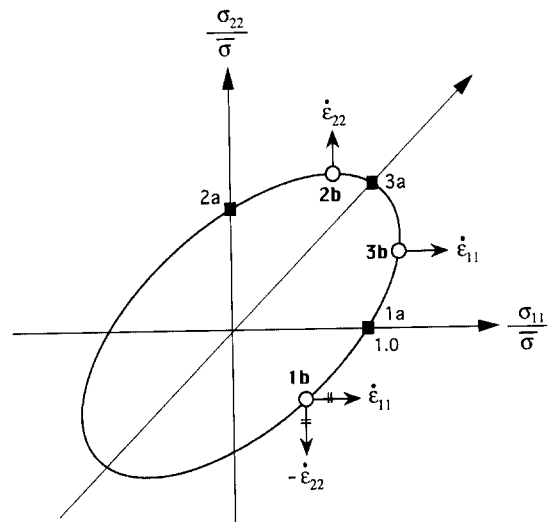


Fig. 1 Barlat's plane stress yield surface

$$\begin{aligned}
 g_1(b_1, b_2, b_3) &= 2b_3 + b_2 l^M + 12b_2 + b_3 l^M + 1b_2 - b_3 l^M - 2\left(\frac{3\bar{\sigma}}{\sigma_{11}''}\right)^M = 0 \\
 g_2(b_1, b_2, b_3) &= 2b_1 + b_3 l^M + 12b_3 + b_1 l^M + 1b_3 - b_1 l^M - 2\left(\frac{3\bar{\sigma}}{\sigma_{90}''}\right)^M = 0 \\
 g_3(b_1, b_2, b_3) &= 2b_2 + b_1 l^M + 12b_1 + b_2 l^M + 1b_1 - b_2 l^M - 2\left(\frac{3\bar{\sigma}}{\sigma_b''}\right)^M = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

\mathbf{B} 를 미지의 이방성 계수들의 열벡터, \mathbf{J} 를 연립 방정식 $\mathbf{g}=\mathbf{0}$ 의 Jacobian이라고 하면

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{B}} \tag{4}$$

이 연립 방정식을 풀기 위해 다음과 같은 Newton-Raphson 식을 얻는다.

$$\mathbf{B}_{n+1} = \mathbf{B}_n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{B}_n)\mathbf{g}(\mathbf{B}_n) \tag{5}$$

여기서, 초기 추정값은 $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ 로 한다.

한편, 순수 전단 응력상태에서는 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ 이기 때문에 식(2)로부터 \mathbf{L}_s 의 주값은 $b_6\sigma_{12}, -b_6\sigma_{12}$ 이다. 이들을 식(1)에 대입하면 다음과 같다.

$$b_6 = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{12}} \left(\frac{1}{1+2^{M-1}} \right)^{\frac{1}{M}} \tag{6}$$

식(6)에서 이방성 계수 b_6 는 전단 항복응력 ($\sigma_{12} = \sigma_s$)을 알고 있으면 구할 수 있지만, 실제 전단 시험은 시편 제작과 시험이 까다롭기 때문에 본 연구에서는 45도 방향의 단축 인장 시험으로부터 구한 항복응력 (σ_{45}'')을 이용하여 b_6 를 구하였다. 좌표변환으로 응력 상태는 다음과 같기 때문에

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \frac{\sigma_{45}''}{2} \tag{7}$$

식(2)의 행렬 \mathbf{L}_s 은 다음과 같이 기술된다.

$$\mathbf{L}_s = \sigma_{45}'' \begin{bmatrix} \frac{b_2}{6} & \frac{b_6}{2} \\ \frac{b_6}{2} & \frac{b_1}{6} \end{bmatrix} \tag{8}$$

여기서, b_1, b_2 는 식(3), 식(4), 그리고 식(5)로부터 구해지고, b_6 는 다음의 비선형 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f(b_6) &= \zeta_1 - \zeta_2 l^M + 1\zeta_1 + 2\zeta_2 l^M \\
 &+ 12\zeta_1 + \zeta_2 l^M - 2\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{45}''}\right)^M = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

여기서, $\zeta_R(b_6)$ 는 식(8)의 행렬 \mathbf{L}_s 에서 이방성 계수들만으로 이루어진 행렬의 주값을 나타내며, 식(9)는 이분법(bisection method)을 이용하여 수치적으로 풀 수 있다. 따라서, 이 방법을 이용하면 역으로 식(6)을 이용하여 전단 항복응력값을 예측할 수 있고, 이 값은 변형을 속도 포텐셜의 이방성 계수 c_6 를 구하는 데 이용된다.

본 연구에서는 등이축 인장시험을 하지 않고, σ_b 를 구하기 위하여 Hill의 1948년 항복이론과 Barlat과 Lian⁽¹⁵⁾이 제안한 평면 이방성 항복이론을 이용하였다. 평균 소성 변형비 (\bar{R})가 1보다 큰 경우는 다음과 같은 Hill의 1948년 이론을 이용하였다.

$$\frac{\sigma_b}{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{1+\bar{R}}{2}} \tag{10}$$

또한, \bar{R} 이 1보다 작은 경우에는 Hill의 이론이 σ_b 를 작게 예측하기 때문에 Barlat과 Lian의 항복이론을 이용하여 다음과 같이 구하였다.

$$\frac{\sigma_b}{\bar{\sigma}} = \left[\frac{2}{C(1+h|l|^N+1)+(2-c)(1-h|l|^N)} \right]^{\frac{1}{N}} \tag{11}$$

여기서, N 은 비2차 항복 파라미터로서 FCC 금속에 대해서는 8, BCC 금속에 대해서는 6을 사용하며,⁽¹⁵⁾ c 와 h 는 다음과 같이 정의된다.

$$c = 2 - 2\sqrt{\frac{R_0}{1+R_0} \frac{R_{90}}{1+R_{90}}}, \quad h = \sqrt{\frac{R_0}{1+R_0} \frac{1+R_{90}}{R_{90}}} \tag{12}$$

따라서, 식(7), 식(8), 식(9), 식(10), 그리고 식(11)을 이용하면, 3방향의 인장시험을 통해 구한 항복응력값과 소성 변형률비로부터 이방성 계수 $b_{i=1,2,3,6}$ 를 모두 구할 수 있다.

한편, Barlat의 이방성 항복조건에서 변형률 속도 포텐셜 Ψ 는 평면응력 상태를 가정하면 다음과 같다.

$$\Psi(D_i) = D_1 |^M + | D_2 |^M + | D_1 + D_2 |^M = 2 \dot{\epsilon}_c^M \quad (13)$$

여기서 $D_{k=1,2}$ 는 소성 변형률 속도 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 로 정의되는 식(14)의 행렬 \dot{L} 의 주값을 나타낸 것이다.

$$\dot{L} = \begin{bmatrix} \frac{(2c_2 + c_3) \dot{\epsilon}_{11} + (c_2 - c_3) \dot{\epsilon}_{22}}{3} & c_6 \dot{\epsilon}_{12} \\ c_6 \dot{\epsilon}_{12} & \frac{(c_1 - c_3) \dot{\epsilon}_{11} + (2c_1 + c_3) \dot{\epsilon}_{22}}{3} \end{bmatrix} \quad (14)$$

식(13)에서 유효 변형률 속도 $\dot{\epsilon}_c$ 는 Fig. 2에서 1-방향에 대한 평면변형 인장에서의 항복 변형률 속도 ($\dot{\epsilon}_{11}^p$)로 정의되며, 포텐셜 파라미터 M 값은 일반적으로 FCC 금속에 대해서 $M=4/3$, BCC 금속에 대해서 $M=3/2$ 이다.¹¹⁴

식(14)의 이방성 계수 $c_{i=1,2,3,6}$ 를 구하기 위해서는 Fig. 2의 변형률 속도장에서 평면변형률 상태에 있는 각

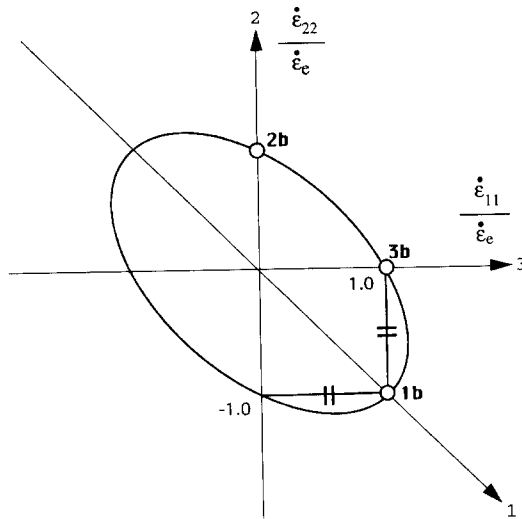


Fig. 2 Barlat's strain rate yield surface

이방성 주축들에 대한 항복 변형률 속도와 전단축에 대한 항복 변형률 속도를 알아야 한다. 평면변형률 상태의 항복 변형률 속도를 구하기 위해서는 이방성 주축 방향으로의 평면변형 인장 시험과 전단 시험이 필요하며 다음의 등가 일의 정리 ($\sigma_c \dot{\epsilon}_c = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$)로부터 항복응력항으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\dot{\epsilon}_{ij}^p}{\dot{\epsilon}_c} = \frac{\sigma_c}{\sigma_{ij}^p} \quad \text{for } i = j, \quad \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^p}{\dot{\epsilon}_c} = \frac{\sigma_c}{2\sigma_{ij}^p} \quad \text{for } i \neq j \quad (15)$$

그러나, 실제 평면변형 인장시험이나 전단 시험이 까다롭기 때문에 본 연구에서는 항복식과 흐름 법칙(flow rule)을 이용하여 변형률 속도를 구하였다. Fig. 1의 항복 곡선에서 1b, 2b, 3b점은 모두 평면변형률 상태로서 Fig. 2의 변형률 속도장 항복곡선상의 1b, 2b, 3b점에 해당된다. 변형률 상태는 Fig. 2에서 1-방향은 $\dot{\epsilon}_{22} = -\dot{\epsilon}_{11}$, $\dot{\epsilon}_{33} = 0$ 이고, 2-방향은 $\dot{\epsilon}_{33} = -\dot{\epsilon}_{22}$, $\dot{\epsilon}_{11} = 0$ 이며, 3-방향은 $\dot{\epsilon}_{11} = -\dot{\epsilon}_{33}$, $\dot{\epsilon}_{22} = 0$ 이다. 따라서, 각각의 평면변형률 상태에 대한 변형률 속도는 다음의 흐름 법칙으로부터 구할 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_{ii}^p = \lambda \frac{\partial \phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ii}} \quad (16)$$

여기서, 오른쪽 항의 응력값들은 항복곡선상의 각 점에 해당하는 응력값을 이용하면 된다. 이 변형률 속도들을 이용하면 식(13)과 식(14)로부터 다음의 비선형 연립 방정식을 얻을 수 있고, 식(4)와 식(5)의 수치 해법을 이용하여 이방성 계수 c_1, c_2, c_3 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} g_1(c_1, c_2, c_3) &= 2c_3 + c_1 |^M + | 2c_3 + c_2 |^M + | c_1 - c_2 |^M - 2 \left(\frac{3\dot{\epsilon}_c}{\dot{\epsilon}_{11}^p} \right)^M = 0 \\ g_2(c_1, c_2, c_3) &= 2c_1 + c_2 |^M + | 2c_1 + c_3 |^M + | c_2 - c_3 |^M - 2 \left(\frac{3\dot{\epsilon}_c}{\dot{\epsilon}_{22}^p} \right)^M = 0 \\ g_3(c_1, c_2, c_3) &= 2c_2 + c_3 |^M + | 2c_2 + c_1 |^M + | c_3 - c_1 |^M - 2 \left(\frac{3\dot{\epsilon}_c}{\dot{\epsilon}_{33}^p} \right)^M = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

전단 이방성 계수 c_6 도 흐름 법칙으로부터 구한 전단축의 변형률 속도를 이용하여 구할 수 있다. 응력상태는 $\sigma_{11} = \sigma_s$, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ 이고, 전단축의 변형률 속도는

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{12}^P &= \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \phi(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{12}} \\ &= \lambda M(1+2^{M-1})b_6^M |\sigma_s|^{M-1} \end{aligned} \quad (18)$$

이다. 따라서 이 변형률 속도를 식(13)과 식(14)에 대입하면, c_6 를 구하는 다음 식을 얻을 수 있다.

$$c_6 = \frac{\dot{\epsilon}_c}{\dot{\epsilon}_{12}^P} \quad (19)$$

본 연구에서 제안한 이방성 계수 결정 방법의 유용성을 검증하기 위해서 2008-T4 알루미늄을 대상으로 인장시험 결과⁽¹⁶⁾로부터 이방성 계수를 구하고, 이를 ALCOA에서 제공한 값과 비교하였다.

Table 1은 2008-T4 알루미늄 합금의 이방성 계수를 구하기 위한 인장시험값들로 0도, 45도, 90도의 3방향에 대한 항복응력과 소성변형률비이다. Table 2는 Table 1의 인장시험값을 이용하여 Barlat의 항복이론으로부터 예측한 등이축인장 항복응력과 전단 항복응력값이다. Table 3과 Table 4는 본 연구에서 Table 1과 Table 2의 데이터를 이용하여 수치해법으로 구한 항복식과 변형률 속도 포텐셜의 이방성 계수들을 ALCOA에서 실험값을 기초로 구한 값들⁽¹¹⁾과 각각 비교한 것이다.

Fig. 3과 Fig. 4는 부하방향에 따른 항복응력과 소성변형률비 변화를 Barlat의 이론을 이용하여 예측한 값과 Hill의 1990년 항복이론을 이용하여 예측한 값, 그리고 실험값과 서로 비교한 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이

Table 1 Tensile test properties of 2008-T4 aluminum alloy sheet⁽¹⁶⁾

Test Direction (° to RD)	Yield Stress (MPa)	Plastic Strain Ratio, R
0	156.5	0.878
45	148.0	0.498
90	141.5	0.534
Average	148.7	0.602

Table 2 Normalized yield stress for 2008-T4 aluminum alloy sheet estimated from Barlat's yield theory

Biaxial Yield Stress ($\sigma_b/\bar{\sigma}$)	0.890
Shear Stress($\sigma_s/\bar{\sigma}$)	0.515

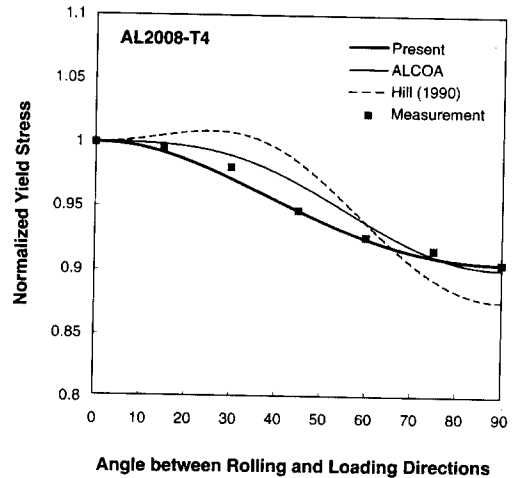


Fig. 3 Comparison of normalized yield stresses for 2008-T4 aluminum alloy sheet among present calculation, ALCOA calculation, Hill's 1990 yield theory, and measurement

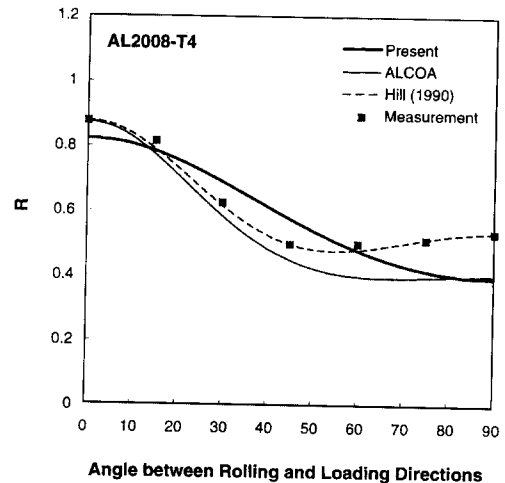


Fig. 4 Comparison of R value variation for 2008-T4 aluminum alloy sheet among present calculation, ALCOA calculation, Hill's 1990 yield theory, and measurement

본 연구의 결과는 45도 방향의 항복응력을 이용하였기 때문에 45도 방향에서는 아주 잘 예측한다. 또한, 항복응력 값을 이용하여 이방성을 나타내는 Barlat의 이론(Present와 ALCOA)이 전반적으로 잘 예측함을 알 수 있다. 그러나 R값의 경우는 오히려 R값을 이용하여 이방성을 표현하는 Hill의 이론이 보다 잘 예측함을 알 수 있다.

Fig. 5는 Barlat의 항복이론, Hill의 1990년 항복이론,

Table 3 Comparison of coefficients of Barlat's six-component yield function for 2008-T4 aluminum alloy sheet between present calculation and ALCOA's

	M	b_1	b_2	b_3	b_6
Present	11	1.218	1.018	0.981	1.034
ALCOA	11	1.223	1.014	0.986	1.000

Table 4 Comparison of coefficients of Barlat's strain rate potential for 2008-T4 aluminum alloy sheet between present calculation and ALCOA's

	M	c_1	c_2	c_3	c_6
Present	1.300	0.856	0.993	1.027	0.979
ALCOA	1.300	0.817	1.004	1.029	1.048

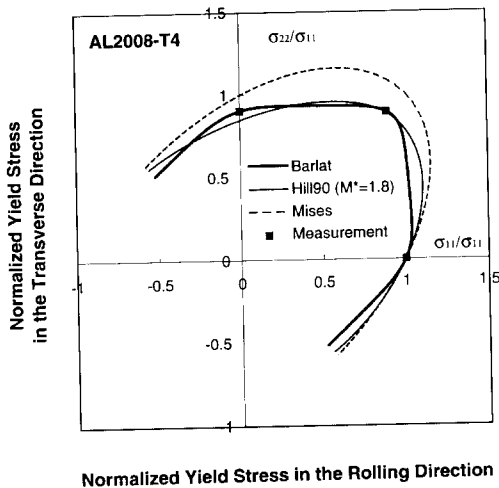


Fig. 5 Comparison of plane stress yield surface of 2008-T4 aluminum alloy sheet among Barlat, Hill 1990, Mises yield functions, and measurement

그리고 Mises의 등방성 항복이론으로부터 예측한 항복곡선으로 Barlat의 항복이론이 금속의 결정 조직에 기초를 두고 구성되었기 때문에, 단축인장 및 등축인장 상태에서 서로 보다 정도 높게 묘사함을 알 수 있다.¹¹⁾

2.2 Hill의 항복이론

Hill이 1990년에 제안한 비2차 이방성 항복조건에서 항복식 ϕ 는 다음과 같다.^{15,16)}

$$\phi = \sigma_1 + \sigma_2 |^M + (1 + 2R_{45}) |\sigma_1 - \sigma_2|^M + |\sigma_1^2 + \sigma_2^2|^{\frac{M^*}{2}-1} \cdot \{-2a(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + b(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos 2\alpha$$

$$= (2\sigma_b)^{M^*} \tag{20}$$

$$= (2 + 2R_{45} - 2a + b)\bar{\sigma}^{M^*}$$

여기서, M^* 은 비2차 항복 파라미터로서 실험에 의해 결정되어지는 값이고, α 는 주방향에 압연방향과 이루는 각도로서 재료의 평면이방성을 묘사하게 된다. 식(20)에서 a와 b는 각각 R_0 , R_{45} , R_{90} 및 M^* 으로 이루어진 상수들로 다음과 같다.

$$a = \frac{((M^* - 2)R_{45} - 2)(R_0 - R_{90})}{2(M^* - 2)R_0R_{90} - 2(R_0 + R_{90})} \tag{21}$$

$$b = \frac{M^*R_{45}(R_0 + R_{90}) - 2M^*R_0R_{90}}{(M^* - 2)R_0R_{90} - (R_0 + R_{90})} \tag{22}$$

일반적으로 강·점소성 유한요소 수식화에는 변형률 속도장에서의 항복조건이 필요하므로 Hill이 제안한 응력장에서의 항복식으로부터 변형률 속도 포텐셜을 유도하였다. 이를 위하여 먼저 이방성 파라미터 A를 도입하였는데, A는 항복식에서 이방성 부분이 차지하는 비율로 정의하며, 0과 1사이의 상수이다. 따라서 항복식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$= (1 - A)\phi + A\phi$$

$$= (1 - A)(2 + 2R_{45} - 2a + b)\bar{\sigma}^{M^*}$$

$$+ A(2 + 2R_{45} - 2a + b)\bar{\sigma}^{M^*} \tag{23}$$

식(23)에서 ϕ_1 은 항복식에서 등방성 부분을 나타내고, ϕ_2 는 이방성 부분을 나타내며, 이들은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_1 = \sigma_1 + \sigma_2 |^{M^*} + (1 + 2R_{45}) |\sigma_1 - \sigma_2 |^{M^*} \quad (24)$$

$$\phi_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 |^{\frac{M^*}{2}-1} \{-2a(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + b(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos 2\alpha\} \cos 2\alpha \quad (25)$$

식(25)의 항복식을 다음의 확장된 흐름법칙을 이용하면, 변형률 속도간의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} = \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_2} \right) \quad (26)$$

$$\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22} = \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_2} \right) \quad (27)$$

식(26)과 식(27), 그리고 등가일의 원리 ($\overline{\sigma \dot{\epsilon}} = \sigma_1 \dot{\epsilon}_{11} + \sigma_2 \dot{\epsilon}_{22}$)를 이용하면, 다음과 같은 변형률 속도 포텐셜을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\epsilon}} &= \frac{1}{2} [(2 + 2R_{45} - 2a + b)(1 - A)]^{\frac{1}{M^*}} \\ &\cdot \left[|\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2|^{\frac{M^*}{M-1}} + \left\{ \frac{\cos^M 2\beta}{1 + 2R_{45}} \right\}^{\frac{1}{M-1}} \cdot |\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2|^{\frac{M^*}{M-1}} \right]^{\frac{M-1}{M}} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서, β 는 이방성 주축의 회전량이며, 다음 식으로부터 구한다.⁽⁵⁾

$$\begin{aligned} \cot 2\beta &= \\ \cot 2\alpha &\left\{ \frac{M^*(R_{45} + 1) - (M^* - 2)(a - \frac{b}{2} \cos 2\alpha)}{2(a - b \cos 2\alpha)} - 1 \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

한편, 식(23)에서 이방성 파라미터 A는 다음과 같이 기술된다.

$$A = 1 - \frac{B}{B + 1 + C^2 |^{\frac{M^*}{2}-1} \{-2a(1 - C^2) + b(1 - C^2) \cos 2\alpha\} \cos 2\alpha} \quad (30)$$

여기서,

$$B = 1 + C |^{M^*} + (1 + 2R_{45}) |1 - C |^{M^*} \quad (31)$$

식(31)에서 C는 다음 식으로부터 구할 수 있으며,

$$\left| \frac{1 + C}{1 - C} \right|^{M^*-1} = \frac{1 + 2R_{45}}{\cos 2\beta} \left(\frac{1 + D}{1 - D} \right) \quad (32)$$

C와 D는 다음과 같이 정의된다.

$$C = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad D = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \quad (33)$$

따라서, A와 β 를 각 요소마다 구하면, 유한요소 방정식에 도입되는 평면이방성 항복조건식이 구성된다.

3. 소성 구성 방정식

박판재를 성형할 때 미소시간 동안 이루어진 소성일을 최소로 하는 소성경로를 따라 변형이 일어나는 것으로 가정하면, Barlat의 이론으로부터 유효변형률 증분 $\Delta \bar{\epsilon}$ 은 다음과 같이 정의된다.⁽¹⁷⁾

$$\Delta \bar{\epsilon} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\Psi}{2} \right)^{\frac{1}{M}} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{(|\xi_1|^M + |\xi_2|^M + |\xi_1 + \xi_2|^M)}{2} \right]^{\frac{1}{M}} \quad (34)$$

여기서, κ 는 실수(real number)이며, Barlat의 변형률 속도 포텐셜이 평면변형률 상태에서 표현되기 때문에 단축 인장시험에서 구한 응력-변형률 관계식을 사용하기 위한 수정인자이다. 따라서, 단축 인장 상태의 유효변형률 증분을 평면변형률 상태의 유효변형률 증분으로 수정하여 준다.

식(34)에서 $\xi_{k=1,2}$ 는 다음의 식(35)에서 정의되는 행렬 L 의 주값(principal value)이다.

$$L = \begin{bmatrix} \frac{c_3(\Delta\epsilon_{xx} - \Delta\epsilon_{yy}) - c_2(\Delta\epsilon_{zz} - \Delta\epsilon_{xx})}{3} & c_6\Delta\epsilon_{xy} \\ c_6\Delta\epsilon_{xy} & \frac{c_1(\Delta\epsilon_{xx} - \Delta\epsilon_{zz}) - c_3(\Delta\epsilon_{xx} - \Delta\epsilon_{yy})}{3} \end{bmatrix} \quad (35)$$

여기서, 변형을 증분 텐서 $\Delta\epsilon$ 은 평면변형을 상태를 가정하면, 좌표축 변환에 의하여 다음과 같이 나타내어진다.

$$[\Delta\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{xx} \\ \Delta\epsilon_{yy} \\ \Delta\epsilon_{zz} \\ \Delta\epsilon_{xy} \\ \Delta\epsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_1 \cos^2 \theta \\ \Delta\epsilon_1 \sin^2 \theta \\ -\Delta\epsilon_1 \\ \Delta\epsilon_1 \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

식(36)으로 표현되는 변형을 증분들을 식(35)에 대입하여 정리하면, L 은 다음과 같이 된다.

$$L = \begin{bmatrix} \frac{c_3 \cos 2\theta + c_2(1 + \cos^2 \theta)}{3} \Delta\epsilon_1 & c_6 \sin \theta \cos \theta \Delta\epsilon_1 \\ c_6 \sin \theta \cos \theta \Delta\epsilon_1 & \frac{c_1(1 + \sin^2 \theta) - c_3 \cos 2\theta}{3} \Delta\epsilon_1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

여기서, 평면변형을 조건을 고려하면, 행렬 L 의 주값은 다음과 같다.

$$\xi_1 = \frac{L_{11} + L_{22} + \sqrt{(L_{11} - L_{22})^2 + 4L_{12}^2}}{2} \quad (38)$$

$$\xi_2 = 0$$

따라서, 식(38)의 주값을 식(34)에 대입하면 각 요소의 유효 변형을 증분을 구할 수 있게 된다.

한편, Hill의 비2차 이방성 항복이론을 변형률 속도장에 대해 나타내고, 평면변형을 상태를 가정하면, 유효변형을 증분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \left[\frac{(2 + 2R_{45} - 2a + b) \left\{ (1 + 2R_{45})^{\frac{1}{M^*} - 1} + 1 \right\} (1 - A)}{1 + 2R_{45}} \right]^{\frac{1}{M^*}} |\Delta\epsilon_1| \quad (39)$$

여기서, M^* 은 비2차 항복 파라미터이고, a, b는 각각

R_{01} , R_{45} , R_{90} 및 M^* 으로 이루어진 상수들로 식(21)과 식(22)에 정의되어 있다. 또한, 식(39)에서 A는 이방성 파라미터로 식(30)에 정의되어 있다.

식(32)에서 C는 평면변형을 상태에서 이방성 주축이 회전하지 않는다고 가정하면 다음과 같다.

$$C = \frac{(1 + 2R_{45})^{\frac{1}{M^*} - 1} - 1}{(1 + 2R_{45})^{\frac{1}{M^*} - 1} + 1} \quad (40)$$

본 연구에서 사용한 변형 경화 법칙은 등방성 경화로 가정되고, 변형률 속도항을 고려하여 강 점소성 유한요소 수식화에 주로 사용되며, 실험치로부터 결정되는 대표적인 응력-변형률 관계식으로 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = K(\bar{\epsilon} + \epsilon_0)^n \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\gamma} \right)^m \quad (41)$$

여기서, $\bar{\sigma}$ 와 $\bar{\epsilon} (= \int \dot{\bar{\epsilon}} dt)$ 는 유효응력과 유효변형률이고, K, n, m 은 각각 강도 계수, 가공 경화 지수, 변형률 속도 민감도 지수(strain-rate sensitivity index)이다. 또한, γ 는 기본 변형률 속도(base strain-rate)이고, ϵ_0 는 이전 변형률(pre-strain)이다.

4. 유한요소 수식화

가상일의 원리로부터 유도된 접촉절점에서 평형 방정식과 금형 내부로의 박판의 비침투 조건인 기하학적 구속조건을 포함하는 통합 지배 방정식의 구성은 다음과 같다.⁽¹⁸⁾

$$\begin{bmatrix} K & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{n+1}F_E - {}^{n+1}F_I \\ {}^{n+1}D^p \end{bmatrix} \quad (42)$$

여기서, F_I 는 소성변형에 의한 내부 저항력 벡터이고, F_E 는 금형과의 접촉에 의한 외부 접촉력 벡터이다. D^p 는 편차와 박판 사이의 유한요소 기초 접촉오차로 다음과 같이 정의된다.⁽¹⁹⁾

$$D^p = n \cdot (x^p - x^s) \quad (43)$$

여기서, ${}^{n+1}x^s$ 는 유한요소 절점의 위치벡터이고, ${}^{n+1}x^p$

는 이 절점에서 유한요소 기초 법선벡터 방향으로 편치면과 만나는 점의 위치벡터이다.

식(42)에서 K 는 시도 변위증분 (Δu^0)으로 표현되는 강성행렬로서

$$K = K_I - K_E = \left(\frac{\partial F_I}{\partial \Delta u} - \frac{\partial F_E}{\partial \Delta u} \right) \Bigg|_{\Delta u = \Delta u^0} \quad (44)$$

이다. 식(42)에서 δu 는 평형상태에서 "0"인 값을 갖는 수정변위 증분벡터이고, F_I 와 F_E 는 시도변위 증분의 항으로 나타내진다.⁽¹⁸⁾ 또한 Γ 와 C 는 다음과 같이 각각 표현된다.

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\frac{\partial(F_E - F_I)}{\partial P} = -\frac{\partial F_E}{\partial P} = -\frac{\partial}{\partial P}[(n - \mu t)P] \\ &= -(n - \mu t) \end{aligned} \quad (45)$$

$$C = -\frac{\partial D^p}{\partial \Delta u} = \begin{bmatrix} \frac{Z_v}{ZN} + (Z_x Z_{xx})D^p / ZN^2 \\ \frac{-1}{ZN} + (Z_x Z_{xx})D^p / ZN^2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

여기서, Z_{xx} , Z_x 는 변위증분 Δu 에 관한 Z_x 의 미분값들이다.

5. 수치해석

진술한 평면변형률하의 Barlat 및 Hill(1990) 항복이

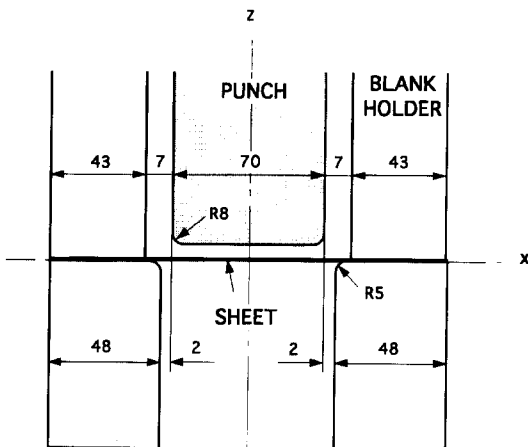


Fig. 6 Sectional view of tooling for a plane strain stretch/draw test

론과 소성구성 방정식, 그리고 유한요소 수식화를 검증하기 위하여 평면변형 스트레치 및 드로우 실험을 수행하고, 이들의 성형공정을 수치해석하여 결과들을 서로 비교하였다. 평면변형 스트레치 및 드로우 실험은 블랭크 홀더의 가압력을 조절하여 스트레치와 드로우의 두 모드가 각각 발생하며, 유압프레스에서 수행되었다. 성형초기에 금형과 박판의 배치는 Fig. 6과 같다. 유한요소 해석에서 박판의 모델링은 좌우 대칭이므로 우측 반만을 고려하였다. 굽힘효과를 고려한 선형 유한요소 모델에서 절점수와 요소수는 31개와 30개이다. 경계조건으로 좌단은 고정 경계조건을 부여하였고, 우단은 스트레치일 때 300 N/mm, 드로우일 때 170 N/mm의 힘 경계조건을 부여하였다. 마찰계수는 드로우비드 마찰 실험을 통해 얻은 $\mu = 0.18$ 을 사용하였다. 실험과 해석에 사용된 박판재료는 SKY-AL TG25로 박판 물성치는 인장시험을 통해 구하고, 이 값들을 이용하여 이방성 계수를 구하였다. 이러한 과정으로 구해 해석에 사용된 박판의 물성치는 Table 5와 같다.

스트레치 실험에서 편치는 파단이 일어나기 직전인 13 mm까지 이동하였다. Fig. 7은 편치높이 13 mm에서 스트레치 공정을 해석하여 예측한 변형률 분포를 측정치와 비교한 그림이다. 항복이론에 관계없이 전반적으로 실험치와 잘 일치함을 알 수 있다.

드로우 실험에서는 편치가 24 mm 이동될 때까지 수행되었으며, 이방성의 영향을 관찰할 목적으로 압연, 45° 및 90° 방향에서 채취된 시편이 사용되었다. 실험에서 발생된 드로우인량은 Table 6에서 보는 바와 같이 45° 방향에서 제일 적은 값을 나타냈다. 이것은 원통컵 드로우잉 공정에

Table 5 Material properties of SKY-AL TG25 aluminum alloy sheet

Properties	Values
Anisotropic coefficients	$c_1 = 1.026$
	$c_2 = 0.997$
	$c_3 = 1.003$
	$c_6 = 0.950$
Barlat's potential parameter	$M = 1.35$
Stress-strain relation (MPa)	$\bar{\sigma} = 536.38(\bar{\epsilon} + 0.00395)^{0.2840}$
Friction coefficient	$\mu = 0.18$
Sheet thickness (mm)	$t = 1.0$
Lankford ratios	$R_0 = 0.695$
	$R_{45} = 0.815$
	$R_{90} = 0.735$

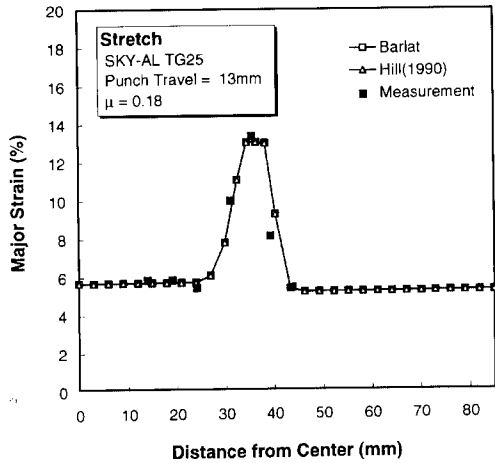


Fig. 7 Comparison of major strain distribution of plane strain stretch test among FEM simulations and measurement

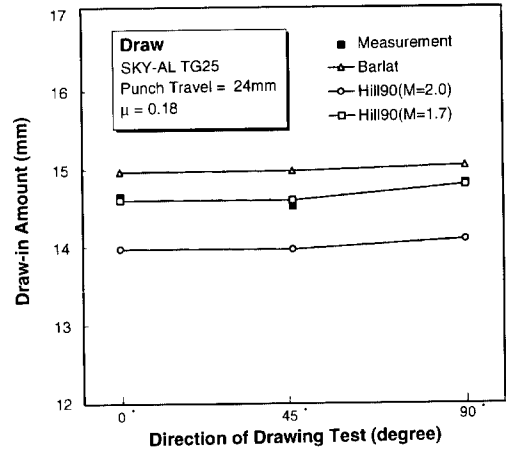


Fig. 9 Comparison of draw-in amount of plane strain draw test among yield criteria and measurement

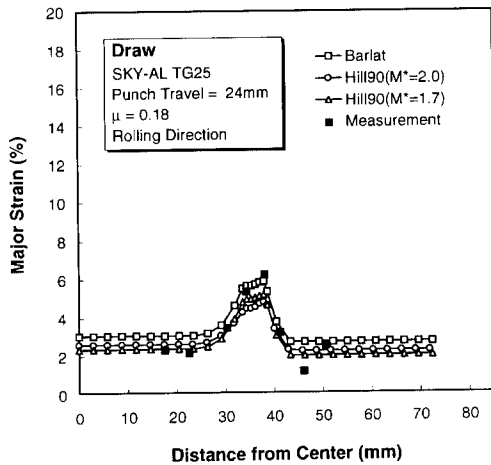


Fig. 8 Comparison of major strain distribution of plane strain draw test among FEM simulations and measurement

Table 7 Comparison of execution time between sectional analysis and 3-D analysis

	Sectional analysis	3-D analysis
Stretch process	30 seconds	1 hour
Draw process	2~3 minutes	2~3 hours

Table 6 Comparison of draw-in amount between yield criteria

Test Direction \ Yield Criteria	0°	45°	90°
Measurement(mm)	14.64	14.5	14.76
Barlat(mm)	14.959	14.945	14.985
Hill90(M=2.0, mm)	13.97	13.936	14.038
Hill90(M=1.7, mm)	14.596	14.568	14.74

서 45° 방향으로 기가 발생될 것으로 예측된다.

Fig. 8은 압연 방향에서 채취된 시편에 대하여 드로우 공정을 해석한 후 변형률 분포를 측정치와 비교한 그림으로 해석 결과들은 측정치와 유사함을 알 수 있다. 여기서, Hill의 1990년 이론에서 예측 편차는 비2차 항복 파라미터값을 변화시킴에 따른 것으로 본 실험에 대해서는 $M^*=1.7$ 일 때 매우 잘 일치함을 알 수 있었다.

Fig. 9는 이방성의 영향을 관찰할 목적으로 드로우 공정 해석에서 얻어진 드로우인량을 측정치와 비교한 그림으로 해석 결과는 측정치와 유사함을 보였다. 그림에서 보는 바와 같이 본 실험에서 사용된 알루미늄 소재는 자동차 패널과 같이 고성형성이 요구되는 곳에서 무리 없이 성형 작업이 수행될 수 있도록 개발된 것으로 이방성이 적어 등방성에 가까운 연관관계에 유사함을 알 수 있다. Fig. 9에서 명확하게 나타나지 않지만 Table 6을 참고하면 방향별 드로우인 값은 항복이론에 관계없이 전반적으로 실험치와 유사한 경향을 보여준다. 특히, $M^*=1.7$ 일 때 Hill의 1990년 항복이론은 실험치와 매우 잘 일치함을 알 수 있

다. 이것은 Hill의 1990년 항복이론이 비2차 함수이므로 파라미터 M^* 를 적절하게 선택하면 매우 정도 높은 항복 곡면을 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

한편, 본 연구에서 개발된 프로그램은 Hill의 1990년 항복이론에서 항복파라미터 M^* 의 적정값을 찾는 데 유용한 도구가 될 수 있을 것으로 판단된다.

Table 7은 IBM PC Pentium-133에서 스트레치 공정 및 드로우 공정의 단면 성형 해석시간을 3차원 해석시간과 비교해 놓은 것으로 단면 해석은 시간면에서 효율적임을 알 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 임의의 형상을 갖는 알루미늄 합금 박판의 스탬핑 공정을 해석할 수 있는 단면 성형 해석 프로그램을 개발하고, 평면변형 스트레치 및 드로우 성형공정을 해석하였다. 이러한 연구로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 3방향의 인장시험 결과로부터 Barlat의 이방성 계수들을 구하는 방법을 제시하고, 이 방법을 AL2008-T4에 적용하여 구한 값들과 ALCOA에서 구한 값들을 비교하여 이방성 계수 결정 방법의 유효성을 입증하였다.

(2) Barlat이 제시한 변형률 속도장에서의 항복조건과 Hill의 1990년 비2차 이방성 항복조건을 도입하여 2차원 강·점소성 유한요소 방정식을 수식화하였다.

(3) 평면변형 성형공정의 해석결과와 실험값을 비교하여 유한요소 수식화의 타당성을 입증하였다.

(4) 단면 성형 해석은 3차원 해석과 비교하여 단시간내에 해석이 가능하기 때문에 알루미늄 박판용 금형의 설계 해석에서 유용하게 활용될 수 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 '95 핵심전문연구(951-1005-043-2)과제로서 수행되었으며 이에 관계자에게 감사드립니다. 또한, 실험에 협조하여 주신 현대자동차 윤치상 과장님께도 감사드립니다.

참고 문헌

(1) Woodthorpe, J. and Pearce, R., 1970, "The Anomalous Behavior of Aluminum Sheet under Balanced Biaxial Tension", *Int. J. Mech. Sci.*,

Vol.12, pp.341 ~ 347.
 (2) Hill, R., 1950, "The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press", Oxford.
 (3) Hosford, W. F., 1988, "Limitation of Non-Quadratic Anisotropic Yield Criteria and Their Use in Analysis of Sheet Forming", *ASM International*, pp.163 ~ 170.
 (4) Hill, R., 1979, "Theoretical Plasticity of Textured Aggregates", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, pp.179 ~ 191.
 (5) Hill, R., 1990, "Constitutive Modelling of Orthotropic Plasticity in Sheet Metals", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.38, No.3, pp.405 ~ 417.
 (6) Hill, R., 1993, "A User-Friendly Theory of Orthotropic Plasticity in Sheet Metals", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.35, No.1, pp.19 ~ 25.
 (7) Barlat, F., Lege, D. J. and Berm, J. C., 1991, "A Six-Component Yield Function for Anisotropic Materials", *Int. J. Plasticity*, Vol.7, pp.693 ~ 712.
 (8) Barlat, F. and Chung, K., 1991, "Anisotropic Potentials for Plastically Deforming Metals", *Modelling and Simulation in Mat. Sci. and Eng.*, Vol.1, pp.403~416.
 (9) Barlat, F., Chung, K. and Richmond, O., 1993, "Strain Rate Potential for Metals and Its Application to Minimum Plastic Work Path Calculations", *Int. J. Plasticity*, Vol.9, pp.51 ~ 63.
 (10) Barlat, F., Chung, K. and Richmond, O., 1993, "Plastic Dual Potential for FCC Metals and Application to Minimum Plastic Work Calculations", *Int. J. Plasticity*, Vol.9, pp.1~13.
 (11) Chung, K. and Shah, K., 1992, "Finite Element Simulation of Sheet Metal Forming for Planar Anisotropic Metals", *Int. J. Plasticity*, Vol.8, pp.453 ~ 476.
 (12) 이승열, 김영탁, 정관수, 박진무, 1995, "원통컵 디프 드로잉 공정의 귀발생 예측", *한국소성가공학회지* 제4권 제3호, pp.222 ~ 232.
 (13) Yoon, J. W., Song, I. S., Yang, D. Y., Chung, K. and Barlat, F., 1995, "Finite Element Method for Sheet Forming Based on an Anisotropic Strain-

- rate Potential and the Convected Coordinate System", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.37, No.7, pp.733~752.
- (14) Barlat, F., Lege, D. J., Berm, J. C. and Warren, C. J., 1991, "Constitutive Behavior for Anisotropic Materials and Application to a 2090 Al-Li Alloy", *Modeling the Deformation of Crystalline Solids* Edited by T.C. Lowe, A.D. Rollett, P.S. Follansbee and G.S. Daehn, The Minerals, Metals & Materials Society, pp.189~203.
- (15) Barlat, F. and Lian, J., 1989, "Plastic Behavior and Stretchability of Sheet Metals Part I: A Yield Function for Orthotropic Sheet Under Plane Stress Conditions", *Int. J. Plasticity*, Vol.5, pp.51~66.
- (16) Lege, D. J., Barlat, F. and Berm, J. C., 1989, "Characterization and Modeling of the Mechanical Behavior and Formability of a 2008-T4 Sheet Sample", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.31, No.7, pp.549~563.
- (17) Chung, K., Lee, S. Y., Barlat, F., Keum, Y. T. and Park, J. M., 1996, "Finite Element Simulation of Sheet Forming Based on A Planar Anisotropic Strain-Rate Potential", *Int. J. Plasticity*, Vol.12, pp.93~115.
- (18) 금영탁, Wagoner, R. H., 1991, "프레스 금형 단면의 성형성 평가를 위한 유한 요소법", *대한기계학회논문집*, 제15권, 제4호, pp.1108~1122.
- (19) 금영탁, 1993, "박판 성형 공정의 유한요소 해석을 위한 마찰접촉 모델", *대한기계학회논문집*, 제17권, 제9호, pp.2242~2251.