KOREAN J. POST-HARVEST SCI. TECHNOL. AGRI. PRODUCTS
Vol. 4. No. 1, pp. 27～32(1997)

농산물 저장 시설에서의 열대류 현상의 해석

김민찬 · 현명택* · 고정삼**
제주대학교 화학공학과, *제주대학교 기계공학과, **제주대학교 농화학과

An Analysis of Thermal Convection in Agricultural-Products Storge System

Min Chan Kim, Myung-Taek Hyun* and Jeong-Sam Koh**

Dept. of Chemical Engineering, Cheju National University
**Dept. of Mechanical Engineering, Cheju National University*
***Department of Agricultural Chemistry, Cheju National University*

Abstract

Natural convection in agricultural-products storage system was analysed theoretically. The storage system was modelled by internally heated fluid saturated porous layer. Darcy's law was used to explain characteristics of fluid motion. Stability equations were obtained under the linear stability theory and transfer characteristics were modelled by the shape assumption. Based on the modelling of transfer characteristics, heat trasnfer correlations were derived theoretically.

Key words : natural convection, Darcy's equation, shape assumption, heat transfer correlations

서 론

다공성 매질층에서의 대류 현상에 관한 연구는 원자력 발전소의 안정성 및 핵폐기물의 저장, 대형 전산기의 냉각, 석유의 채취 뿐만아니라 농산물의 저장등 그 응용 분야의 다양성이 확인되면서 최근 활발한 연구가 진행되고 있다. 균질 유체층 내에서 하부 가열로 인한 Benard-Rayleigh 대류 현상이 밝혀진 이래 다공성 매질층 내에서의 대류 현상과 관련된 연구는 Horton과 Rogers[1], Lapwood[2] 등에 의해 진행되었다. 이들은 다공성 매질층에서의 유동방정식으로 Darcy법칙을 사용하여 자연대류 발생에 Darcy 수가 미치는 영향에 대하여 고찰하였다. Katto와 Masuoka[3]는 실험을 통하여 다공성 매질층에서 자연대류 발생 임계조건의 결정에 Darcy수의 역할을 보고하였다.

부력에 의한 자연대류가 전달 특성에 미치는 영향에 대한 연구는 많은 연구자들에 의하여 진행되어 왔다. Malkus와 Veronis[4]는 Landau의 멱적분법(power-integral method)를 사용하여 내부 발열이 없는 균질 유체층에서 열전달 특성과 Rayleigh 수와 상관 관계를 유도하였다. Stuart[5]는 형태가정(shape assumption)을 사용하여 교란의 진폭을 Landau 방정식 형태로 유도하였다. 내부 발열이 있는 다공성 매질층 및 균질 유체층에서 자연대류에 의한 열전달 특성에 관한 연구는 김 등[6, 7]에 의해 잘 정리되어 있다.

본 연구에서는 농산물 저장시 저장 농산물의 호흡 작용에 의한 발열에 의해 발생하는 자연대류 현상을 이론적으로 해석하였다. 보관된

농산물을 내부 열원에 의해 가열되고 있는 수평 다공질 층으로 상사시키고 자연대류가 전달 현상에 미치는 영향을 조사하였다. 우선 부력에 의한 자연대류 발생 조건에 대하여 고찰하고, 자연대류가 전달 특성에 미치는 영향에 대한 연구가 진행된다. 자연대류 발생 조건에 대한 연구는 잘 알려진 선형 안정성 이론을 사용하여 진행하고, 전달 특성에 관한 연구는 자연대류 발생 임계점 근처에서의 유동을 형태가정을 사용하여 근사하고 Nusselt수와 Rayleigh수와의 열전달 상관식을 유도하였다.

안정성 해석

본 연구에서는 Fig. 1에 보이는 바와 같이 저장 농산물을 내부 열원이 있는 수평 다공질 매질층을 상사시켰다. 다공질 매질층에서의 유동 현상을 해석하기 위하여 여러 유동 모델들이 제안되었으나, 본 연구에서는 가장 기본이 되는 Darcy 법칙을 유동 모델로 채택하였다. Darcy 법칙하에서 본 연구에서 고려되는 계를 지배할 기본 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mu}{K}\vec{U} = -\nabla P + \overrightarrow{\rho g} \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T + \frac{S}{\rho C_P} \tag{3}$$

$$\rho = \rho_r[1 - \beta(T - T_r)] \tag{4}$$

여기서 $\vec{U}$, ρ, P, μ, S, C_p, K, T, α, β는 각각 속도 벡터, 밀도, 압력, 점도, 단위 부피당 발열속도, 유효 열용량, 다공성 매질의 투과도, 온도, 유효 열확산 계수, 부피 팽창 계수를 나타내고, 하첨자 "r"은 기준상태를 나타낸다. 식 (1)은 잘 알려진 비압축성 유체의 연속 방정식이고, 식 (2)는 Darcy 법칙하에서의 유동 방정식이며, 식 (3)은 Katto와 Masuoka[3]에 의해 유도된 에너지 방정식이다. 또 식 (4)는 부력항의 밀도 변화만을 고려하는 Boussinesq 가정을 나타내는 식이다.

기본 온도 분포

자연대류가 발생하기 전에는 유동은 존재하지 않으며 온도 분포는 다음과 같은 식에 의하여 지배된다.

$$\frac{d^2 T_0}{dZ^2} = -\frac{S}{k} \tag{5}$$

경계조건은 다음과 같다.

$$T_0 = T_L \quad at\ Z = 0 \tag{6.a}$$

$$T_0 = T_U \quad at\ Z = a \tag{6.b}$$

여기서 k는 유효 열전도이고 d는 유체층의 깊이이다. 위의 식을 d, S/k를 각각 거리, 온도에 대한 무차원 척도로 사용하여 무차원화 시키면 아래와 같은 무차원화 된 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2} = -1 \tag{7}$$

경계 조건은 다음과 같이 된다.

$$\theta_0(0) = 0 \tag{8.a}$$

$$\theta_0(1) = Ra/Ra_1 \tag{8.b}$$

여기서 Ra와 Ra_1는 각각 다음과 같이 정의되는 외부 가열에 의한 Rayleigh수와 내부 가열에 의한 Rayleigh수이다.

$$Ra = \frac{g\beta \Delta T d^3}{\alpha\nu} \quad \text{and} \quad Ra_1 = \frac{g\beta S d^5}{k\alpha\nu} \tag{9}$$

여기서 $\Delta T = (T_L - T_U)$이다. 위 식을 풀면 자연대류 발생전의 온도 분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta_0 = \frac{1}{2}z(1 - z) + \frac{Ra}{Ra_1}z \tag{10}$$

안정성 방정식

자연대류 발생점을 해석하기 위하여 잘 알려진 선형 안정성 이론을 사용하여 속도, 온도, 압력의 물리량을 아래와 같이 기본량과 교란량의 합으로 나타낸다.

$$\vec{U} = \vec{U}_1 \quad T = T_0 + T_1 \quad P = P_0 + P_1 \tag{11}$$

여기서 하첨자 "0"과 "1"은 각각 기본량과 교란량을 나타낸다. 선형 안정성 이론에서는 교란량들이 급격히 자라나기 시작하는 점을 자연대류 발생 임계시점을 나타낸다. 교란량들의 거동을 지배할 방정식을 얻기 위하여 위의 물리양을 앞의 식 (1)~(3)에 대입하고 기본량들에 의하여 만족되는 부분을 제외하고 선형화하면 아래와 같은 교란 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot \vec{U}_1 = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\mu}{K}\vec{U}_1 = -\nabla P + \rho g \beta T_1 \vec{k} \tag{13}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T_1 - W\frac{\partial T_0}{\partial Z} \tag{14}$$

이때 적절한 경계조건은 다음과 같다.

$$\vec{U}_1 = T_1 = 0 \quad \text{at} \quad Z=0 \text{ and d} \tag{15}$$

식 (13)에 컬(curl)를 두 번 취하고 α/d, $\alpha\nu/(g\beta d^3)$을 속도 교란, 온도 교란의 무차원 척도로 도입하면 다음과 같은 무차원화된 교란 방정식을 얻을 수 있다.

$$\overline{\nabla} \cdot w_1 = Da\overline{\nabla}_1\theta_1 \tag{16}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - Ra w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \overline{\nabla}^2\theta_1 \tag{17}$$

위의 무차원화 과정에서 온도교란의 무차원 척도가 기본 온도와 다른 점에 주목할 만하다. 이와 같은 무차원화 척도는 온도교란은 온도차에 무관하며 유체층의 물리적 성질에만 의존함을 의미하며, Foster[8]에 의하여 사용된 형태이다. Da는 Darcy 수로 다음과 같이 정의되는 무차원 수이다.

$$Da = \frac{K}{d^2} \tag{18}$$

Darcy 법칙이 적용되는 경우, 즉 $Da \to 0$인 경우에 온도교란을 새로이 규격화하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\overline{\nabla} \cdot w_1 = \overline{\nabla}_1\theta_1 \tag{19}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + Ra_D w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \overline{\nabla}^2\theta_1 \tag{20}$$

여기서 Ra_D와 $Ra_{D,1}$는 아래와 같이 정의된다.

$$Ra_D = Ra \cdot Da \text{ and } Ra_{D,1} = Ra_1 \cdot Da \tag{21}$$

안정성 교환의 원리(principle of exchanges of stabilities)하에서 교란을 다음과 같이 수평 방향으로의 주기성을 갖는 형태로 나타낼 수 있다[9].

$$[w_1(x, y, z, \tau), \theta(x, y, z, \tau)] = [w(z), \theta(z)] \exp(ia_x x + ia_y y + \sigma\tau) \tag{22}$$

여기서 "i"는 허수부, a_x, a_y는 각각 x, y 방향으로의 주기성을 나타내는 무차원 수평 파수이고 σ는 시간에 대한 교란의 성장율이다. 위와 같이 주어지는 교란을 식 (19), (20)에 대입하고, 중립 안정성 조건에서 $\sigma=0$이라 두면, 다음과 같은 안정성 방정식을 얻을 수 있다.

$$(D^2 - a^2)w = -a^2\theta \tag{23}$$

$$(D^2 - a^2)\theta = Ra_{D,1} w\left(z - \frac{1}{2} + \frac{Ra_D}{Ra_{D,1}}\right) \tag{24}$$

여기서 $a^2 = a_x^2 + a_y^2$, $D = \frac{d}{dz}$이고, 경계조건은 다음과 같다.

$$w = \theta = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \text{ and } 1 \tag{25}$$

위의 안정성 방정식은 Gasser과 Kazimi[10]에 의하여 해석되었다.

열전달 특성

자연대류가 발생하면 열전달 속도는 증가하게 된다. 자연대류 발생 이후의 열전달은 자연대류의 유동 특성과 밀접한 관련이 있다. 자연대류가 열전달 특성에 미치는 영향에 대해서는 Malkus와 Veronis[4]가 멱급수 적분 방법을 도입하여 해석하였다. 본 연구에서는 자연대류 발생점 근처에서 교란의 직폭은 Rayleigh수에 따라 변하나, 교란의 형태는 변하지 않는다는 Stuart[5]의 형태가정을 사용하여 해석을 진행한다. 형태가정에 의한 해석은 자연대류 발생점 근처에서의 자연대류에 의한 열전달 특성을 잘 대변한다고 알려져 있다[6, 7]

우선, 온도를 다음과 같은 형태로 나타낸다.

$$T = \overline{T} + T' \tag{26}$$

여기서 $\overline{T}$는 수평 방향으로 평균한 온도이고, T'은 섭도 온도이고, $\overline{T'} = 0$이다. 위와 같은 온도를 식 (3)의 에너지 방정식에 대입하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\alpha\nabla^2 T' = -\alpha\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial Z^2} + \vec{U}\cdot\nabla T' + \vec{U}\cdot\nabla\overline{T} \tag{27}$$

위식을 앞에서 사용한 척도로 무차원화 하고, 수평 방향으로 평균하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2\overline{\theta_0}}{dz^2} = -1 + \frac{d}{dz}\overline{w\theta} \tag{28}$$

이 식을 식 (8)의 경계조건 하에서 적분하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\frac{d\overline{\theta_0}}{dz} = -z + \frac{1}{2} - \int_0^1 \overline{w\theta}dz + \overline{w\theta} + \frac{Ra_D}{Ra_{D,1}} \tag{29}$$

또 에너지 방정식 T'을 곱하고 수평 방향으로 평균을 한 형태를 무차원 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$Ra_D\int_0^1 \overline{w\theta\frac{d\overline{\theta_0}}{dz}}dz = \int_0^1 \overline{\theta\nabla^2\theta}dz \tag{30}$$

식 (29)를 식 (30)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\int_0^1 (w\theta)^2dz - \left\{\int_0^1 \overline{w\theta}dz\right\}^2$$

$$= \frac{1}{Ra_{I,D}}\left\{Ra_{I,D} + \frac{\int_0^1 \overline{\theta\nabla^2\theta}dz + \int_0^1 Ra_D\overline{w\theta}dz}{\int_0^1\left(z-\frac{1}{2}\right)\overline{w\theta}dz}\right\}$$

$$\times \int_0^1\left(z-\frac{1}{2}\right)\overline{w\theta}dz \tag{31}$$

식 (24)의 안정성 방정식에 θ_1을 곱하고 부피 적분을 하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$Ra_{I,D,C} = -\frac{\int_0^1 \overline{\theta_1\nabla^2\theta_1}dz + \int_0^1 Ra_D\overline{w_1\theta_1}dz}{\int_0^1\left(z-\frac{1}{2}\right)\overline{w_1\theta_1}dz} \tag{32}$$

자연대류 발생점 근처에서 교란의 진폭은 Rayleigh 수에 따라 변하지만, 형태는 자연대류 발생점에서의 형태와 같다는 형태가정을 사용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\int_0^1 \overline{w\theta}dz = \frac{\Gamma}{Ra_{I,D}}(Ra_{I,D} - Ra_{I,D,C}) \tag{33}$$

여기서 Γ는 다음과 같은 적분 형태로 주어진다.

$$\Gamma = \frac{\int_0^1\left(z-\frac{1}{2}\right)\overline{w_1\theta_1}dz\int_0^1\overline{w_1\theta_1}dz}{\int_0^1\overline{(w_1\theta_1)^2}dz - \left\{\int_0^1\overline{w_1\theta_1}dz\right\}^2} \tag{34}$$

여러 Ra_D값에 대해서 구한 $Ra_{I,D,C}$와 Γ 값이 표 1에 주어졌다.

Nusselt 수를 다음과 같이 밑면과 윗 면에서 실제 열전달 속도와 전도만에 의한 열전달 속도를 정의한다.

Table 1. Critical Rayleigh numbers transport coefficients

Ra_D	$Ra_{D,I,C}$	Γ
30	273.40	0.155947
20	333.71	0.159291
10	407.51	0.156703
0	471.39	0.153850
-10	529.55	0.151223
-20	583.93	0.148840
-30	653.57	0.146663
-100	955.16	0.135092

$$Nu_L = \frac{q_L}{q_{cond.}} = \frac{-k\left.\frac{d\overline{T}}{dz}\right|_{z=0}}{-k\left.\frac{dT_0}{dz}\right|_{z=0}} \tag{35.a}$$

$$Nu_U = \frac{q_U}{q_{cond.}} = \frac{-k\left.\frac{d\overline{T}}{dz}\right|_{z=d}}{-k\left.\frac{dT_0}{dz}\right|_{z=d}} \tag{35.b}$$

이 Nusselt 수들을 식 (33)과 (34)를 사용하여 무차원 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$Nu_L = 1 + \frac{\int_0^1 \overline{w\theta}dz}{\frac{1}{2} + \frac{Ra_D}{Ra_{D,I}}} = 1 + \frac{\Gamma}{\frac{1}{2} + \frac{Ra_D}{Ra_{D,I}}}\left(1 - \frac{Ra_{D,I,C}}{Ra_{D,I}}\right) \tag{36.a}$$

$$Nu_U = 1 + \frac{\int_0^1 \overline{w\theta}dz}{\frac{1}{2} - \frac{Ra_D}{Ra_{D,I}}} = 1 + \frac{\Gamma}{\frac{1}{2} - \frac{Ra_D}{Ra_{D,I}}}\left(1 - \frac{Ra_{D,I,C}}{Ra_{D,I}}\right) \tag{36.b}$$

다양한 Ra_D 값에서 Nu_D를 $Ra_{D,I}$에 나타낸 그림이 Fig. 2에 주어졌다.

$Ra_D=0$일 때, 밑면에서의 열전달량과 전체 열전달량의 비는 다음과 같이 정의된다.

$$\eta = \frac{Nu_L}{Nu_U + Nu_L} = \frac{1}{2} - \Gamma \times \left(1 - \frac{Ra_{D,I,C}}{Ra_{D,I}}\right) \tag{37}$$

정상상태이므로 전체 열전달량은 열 발생량하고 같게 된다. 따라서 윗면과 밑면의 온도가 같은 경우, η를 알고 있으면 윗면과 밑면으로의 열전달량을 알 수 있다. Fig. 3에는 η를 $Ra_{D,I}$의 함수로 도시하였다.

요 약

본 연구에서는 저장고 내의 저장 농산물에 의한 자연대류 현상에 대해 조사하였다. 저장 농산물 내에서는 발열이 있기 때문에 저장 농산물을 내부 가열이 있는 수평 다공질 유체층으로 상사한 다음 내부 가열에 의한 부력에 의하여 유발되는 자연대류 발생 조건을 알아보고, 자연대류가 전달 특성에 미치는 영향을 형태 가정을 사용하여 해석하였다. 자연대류 발생 시점은 Rayleigh 수와 Darcy 수의 영향을 받음을 알 수 있었다. 자연대류 발생점 근처에서의 열전달 상관식은 형태 가정을 사용하여 유도하였다. 이 전달 상관식은 자연대류 발생점 근처에서는 잘 맞을 것으로 생각되며, 농산물 저장고 내에서의 발열량이 비교적 적기 때문에 이 상관식은 농산물 저장고의 전달 현상을 해석하는 데 유용한 정보를 줄 것이다.

감사의 글

본 연구는 1996년도 한국과학재단 연구비(제주대학교 RRC, SH96M-14)에 의해 이루어진 결과의 일부이며, 이에 감사드립니다.

기호 설명

a	wave number
C_p	heat capacity
D	differential operator, $\frac{d}{dz}$
d	depth of porous layer
Da	Darcy number
g	gravitational acceleration

i	imaginary number
K	permeability
k	thermal conductivity
$\vec{k}$	unit vector in z-direction
Nu	Nusselt number
P	pressure
Ra	Rayleigh number
Ra_D	$Ra \times Da$
Ra_I	Internal Rayleigh number
$Ra_{D\cdot I}$	$Ra_I \times Da$
S	heat generation rate
T	temperature
t	time
U	velocity
w	dimensionless velocity component of z-direction
x, y, z	dimensionless positions
Z	vertical position

그리스 문자

α	termal diffusivity
β	volume expansion coefficient
Γ	constant used in Eqs. ( ) and ( )
θ	dimensionless temperature
σ	temporal growth rate
τ	dimensionless time

하첨자

L	lower side
U	upper side
0	basic state
1	disturbed state

참고문헌

1. Horton, C. W. and Rogers, F. T. (1945) Convection Current in Porous Medium, *J. Appl. Phys.*, 16, 367-370.
2. Lapwood, E. R. (1948) Convection of Fluid in a Porous Medium, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 44, 508-521.
3. Katto, Y. and Masuoka, T. (1967) Criterion for Onset of Convection in Porous Medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 10, 297-309.
4. Malkus, M. W. R. and Veronis, G. (1958) Finite Amplitude Cellular Convection, *J. Fluid Mech.*, 4, 225-260.
5. Stuart, J. T. (1964) On Cellular Patterns in Thermal Convection, *J. Fluid Mech*, 18, 481-498.
6. 김민찬 (1962) 열 경계층 특성을 갖는 계에서의 자연대류 발생 및 열전달 상관 관계, 서울대학교 박사학위 논문.
7. 김민찬, 윤도영, 최창균 (1994) 내부 열원에 의해 가열되는 수평 다공질 유체층에서의 부력에 의한 자연대류 발생 및 열전달 상관 관계, 화학공학, 32, 187-194.
8. Foster, T. D. (1965) Stability of Homogeneous Fluid Cooled Uniformly from Above, *Phys. Fluids*, 8, 1249-1257.
9. Chandrasekhar, S. (1961) Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford Univ. Press, London.
10. Gasser, R. D. and Kazimi, M. S. (1976) Onset of Convection in a Porous Medium with Internal Heat Generation, *J. Heat Transfer*, 98, 49-54.