韓國經營科學會誌
第22卷 第3號
1997年 9月

2인 조정게임의 베이지안 의사결정모형

김정훈* · 정민용**

On the Bayesian Decision Making Model of 2-Person Coordination Game

Jeong-Hoon Kim* · Min-Yong Chung**

Abstract

Most of the conflict problems between 2 persons can be represented as a bi-matrix game, because players' utilities, in general, are non-zero sum and change according to the progress of game. In the bi-matrix game the equilibrium point set which satisfies the Pareto optimality can be a good bargaining or coordination solution.

Under the condition of incomplete information about the risk attitudes of the players, the bargaining or coordiantion solution depends on additional elements, namely, the players' methods of making inferences when they reach a node in the extensive form of the game that is off the equilibrium path. So the investigation about the players' inference type and its effects on the solution is essential. In addition to that, the effect of an individual's aversion to risk on various solutions in conflict problems, as expressed in his(her) utility function, must be considered. Those kinds of incomplete infomation make decision maker Bayesian, since it is often impossible to get correct information for building a decision making model.

In Bayesian point of view, this paper represents an analytic frame for guessing and learning opponent's attitude to risk for getting better reward. As an example for that analytic frame, 2 persons' bi-matrix game is considered. This example explains that a bi-matrix game can be transformed into a kind of matrix game through the players' implicitly cooperative attitude and the need of arbitration.

* 한국표준과학연구원 Post-Doc
** 건국대학교 산업공학과 교수

1. 서 론

게임의 진행 과정에서는 규칙과 정보를 활용하여 자신의 기대이익을 최대화하려는 일련의 행동이 나타난다. 여기서의 의사결정 행동은 전략이라는 용어로 설명할 수 있다. 게임이론의 특징은 게임의 참가자들이 서로를 상대로 상대방이 지능적으로 전략을 취한다고 가정하는 것이다. 즉 상대의 전략을 생각하면서 자신의 전략을 모색하게 되는데, 상대의 전략은 자신의 전략이 고려되어 만들어진 것이므로 결국 자신이 자신의 전략을 고려하게 되는 재귀적 상황을 연출하게 되는 것이다. 이는 자연과 같은 무정한 대상을 관찰하여 이에 대응하는 최적 전략을 탐색하는 경우에 비해 무척 복잡한 면모를 가지고 있다.

또한 게임의 시행결과로 나타나게 될 득실값, 즉 효용은 전략을 취해야 하는 시점에서 이미 사후의 처리결과에 대한 잠재적 만족도가 포함되어 나타나야 하기 때문에 엄밀하고 정확한 부과가 불가능하다. 따라서 경험이나 사전정보에 의해 상대의 추론성향이나 위험성향을 고려하는 수준에서 상대의 효용을 파악할 수 밖에 없다. 이렇게 되면 게임의 참가자들이 파악하게 되는 효용값이 서로 달라질 수 밖에 없으며, 엄밀한 의미의 영합게임(Zero-sum Game)은 존재하지 않게 된다.

게임의 해는 재귀구조(he-think-that-I-think regress)의 모형화를 통해 접근될 수 있으나, 참가자들의 효용을 각각 어느 정도씩의 비중을 두어 해석하느냐에 따른 형평성의 문제로 인해 여러 가지 해의 개념이 가능하게 되며, 이렇게 해의 개념을 변화시키는 인자들에 대한 연구를 통해 게임의 기대값을 증가시킬 수 있는 방안을 찾을 수 있다고 생각할 수 있다. 결국 게임에 임하는 참가자들의 추론 및 위험 성향은 공동의 이익추구 정도에 따라 다양한 해의 개념을 가능하게 하며, 특히 협조적인 참가자들의 일관된 추론 및 위험 성향은 안정되고 이득이 더욱 증가된 게임 해에 도달할 수 있도록 한다고 기대되는 것이다.

본 연구는 이와 같은 게임상황을 훌륭하게 묘사할 수 있는 2인 베이지안 게임을 토대로, 상대방에 대해 입수된 정보를 보는 관점, 불완비된 정보 또는 불완전하게 부과된 효용 하에서 발생하는 추론행태, 위험성향에 따른 효용변화, 묵시적 또는 명시적인 위협 및 협상을 통한 해의 가능성 등의 특성을 고려할 수 있는 의사결정 틀(Frame)에 대해 논하고자 한다. 분석적 의사결정모형은 구체적인 해를 제시할 수 있어야 하며, 이를 위해서는 형평성이나 합리성의 기준이 되는 초기 조건의 엄밀한 정의가 필요하다. 따라서 세부적으로 이러한 게임구조에 초기 조건으로 삽입될 추론행태 또는 위험성향, 그리고 1차적으로 제시된 효용값은 게임의 진행에 따라 어떤 변화가 가능한지를 살펴보고자 한다.

또한 이와 같은 게임상황의 분석에서 얻은 "판단 초기값의 임의적 선택"이 가능하다는 인간적 요소와 재귀적 논리의 결과로서 도출되는 명시 또는 묵시적 협조 가능해들을 검토, 이런 가능해들을 합리적인 의사결정 분석의 결과로 볼 수 있게 하는 베이지안 추론에 대해서 고찰하고자 하였다. 이를 위해, 현실적인 게임의 동적 분석을 통해 더 나은 이득을 추구할 수 있도록, 상대방의 위험성향을 학습하고 추론할 수 있는 해석적 틀을 마련하였다. 특히 본 연구에서는 게임의 참가자가 의지적인 협조 성향을 가지는 경우, 상대의 전략을 학습하고 자신이 취할 전략을 선정하는 방법을 고찰할 수 있는 구체적인

예를 제시하였다.

2. 갈등의 해결

갈등문제는 보통 세 가지 방식으로 해결된다. 첫째는 해당 문제가 요구하는 정확한 답을 제공하는 것이고, 이 때의 해를 Solution이라고 부른다. 둘째는 갈등상황이 연출되면서 복잡한 이해관계 속에서 서로가 공정하다고 생각되는 해를 찾지 못하는 경우 타협을 하게 되는 것인데, 이를 Resolution이라고 부른다. 마지막으로 세번째는 처음에 지정된 갈등문제가 원초적으로는 다른 문제에서 파생된 것임을 파악하고 이와는 다른 새로운 본질적 문제를 찾아 새로운 해를 구하게 되는 것으로, 이를 문제가 해소되었다고 하고, Dissolution이라 부른다. 이들 모두가 해의 개념을 가지고 있으며, 현실적으로 우리가 구하는 답들은 모두 이러한 양상을 띠고 있다 [6]. 대자연게임과 같이 게임 참가자간의 상호의존성이 거의 없거나 무시할 수 있을 정도로 작게 나타나는 상황 이외의 문제는 보통 2인 이상의 참가자들이 갈등상황을 연출하고 있으므로, 이와 같은 게임상황을 적절히 묘사했다고 하는 경우 대부분은 협상 및 조정을 통해 게임의 해를 찾게 된다.

J. F. Nash[32]의 협상모형을 살펴보면, 게임값을 최대화하려는 문제에서 협상을 통해 해를 찾는 경우 보통 보통 세 가지 해의 개념을 볼 수 있다[4].

가장 먼저 생각해 볼 수 있는 것은 확률적 혼합전략을 통해 기대할 수 있는 최소한의 기대값인 안전수준점 (u^*, v^*) 보다 큰 모든 협상가능 집합을 해로 보는 것이며, 둘째는 각 참가자의 효용증가의 곱이 안전수준점 (u^*, v^*)을 기준으로 가장 크게 나타나는 점을 찾는 것으로, $(u-u^*)(v-v^*)$를 최대화하는 점이 해가 된다는 것이다. 세째는 안전수준점 대신 상대방의 전략에 영향을 줄 수 있는 최적의 위협전략을 찾고 여기서의 위협점을 $(\bar{u}, \bar{v})$라고 할 때 $(u-\bar{u})(v-\bar{v})$ 를 최대화하는 점을 찾는 것이다.

2.1 행렬게임의 풀이

다음과 같은 행렬게임을 생각해 보자.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots\cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots\cdots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & \cdots\cdots, & a_{3n} \\ & & \cdots\cdots & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots\cdots, & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

여기서 참가가 A는 자신의 안전수준을 최대화하는 전략을 찾으려고 한다. 여기서 안전수준점을 스칼라 값인 L이라고 두자. 그러면 참가자 1이 혼합전략 X를 사용하고 참가자 B가 j라는 전략을 사용한다면 다음 식(2.2)를 성립시키는 L이 존재하게 된다.

$$XA_{.j} = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + a_{3j}x_3 + \cdots\cdots + a_{mj}x_m \geq L \tag{2.2}$$

즉, 이 문제를 선형계획법으로 바꾸면 다음과 같이 쓸 수 있다. 여기서 e_n은 모든 원소가 1인 n차원의 행벡터를 의미한다.

$$\begin{aligned} & Max.\ L \\ s.t.\ & XA \geq L e_n \\ & e_m X = 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$X \geq 0$$

식(2.3)을 보면 목적함수가 제약조건에 포함되어 있음을 알 수 있다. 즉 재귀적 특성을 보이고 있는 것이다. 실제로는 L값을 알 수 없기 때문에 선형문제를 풀려면 다음과 같이 변형시켜야 한다 [41].

우선 각 제약식의 양변을 L로 나누면 다음과 같이 바뀐다. 단 여기서 L>0 이라고 가정한다.

$$\begin{aligned} & Max.\ L \\ s.t.\ & \frac{1}{L}XA \geq 1 \\ & \frac{1}{L}e_m X = \frac{1}{L} \\ & X \geq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

그리고 $\overline{X}=[x_1/L,\ x_2/L,\ x_3/L,\ \ldots,\ x_m/L]$ $=[\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \overline{x}_3,\ \ldots,\ \overline{x}_m]$라고 쓰면, $Max.\ L$는 $Min.\ 1/L$과 같기 때문에 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} Min.\ & \overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3+\ \ldots\ldots +\overline{x}_m \\ s.t.\ & \overline{X}A \geq 1 \\ & \overline{X} \geq 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

식(2.5)를 보면 목적함수가 제약조건에 포함되는 방식이 처음과는 약간 바뀌어 있음을 알 수 있다. 이제 식(2.6)을 이용해 게임해(안전수준점 및 최적 전략)을 구할 수 있게 된다.

게임에서는 초기치값 자체의 결정을 어떻게 내릴 것인지가 더 문제가 된다고 할 수 있다. 여기서 주의할 점은 게임에서 최적 전략선택의 벡터는 마코프 연쇄에서 안정상태를 나타내는 상태벡터와는 다른 성격을 가진다는 것이다. 물론 마코프 연쇄에서 추이확률행렬을 P라고 할 때 정상상태 벡터가 S라고 한다면 SP≡S라고 표기할 수 있는데 이 때의 S를 초기에 취할 전략벡터로 보고 P를 한 단계 이전의 전략벡터를 고려한 최적 전략 선택의 프로세스라고 본다면 이 전략벡터는 보수적 성향을 띤 안전전략이라고 유추(Analogy)할 수도 있을 것이다. 그러나 게임에서 최적전략을 선택하는 문제는 최적의 초기치 값을 선정하는 문제와도 같다고 볼 수 있다 [2][18].

2.2 행렬게임의 분산

게임의 분산은 게임의 참가자들이 미니막스정리를 이용하여 자신의 안전수준을 가장 높이려고 한다는 조건을 전제로 하여, 이때 이들이 취하게 되는 확률값을 사상의 발생확률로서 해석한다. 따라서 게임의 분산은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} V(x_{ij}) &= \int \{x_{ij}-E(x_{ij})\}^2 f(x_{ij})dx_{ij} : (\text{연속인 경우}) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\{x_{ij}-E(x_{ij})\}^2 p(x_{ij}) : (\text{이산인 경우}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

여기서 $f(x_{ij})$ 또는 $p(x_{ij})$는 각 전략벡터의 확률값들이며 $E(x_{ij})$는 안전수준점, 즉 미니막스 정리에 의한 최적전략을 취할 때의 기대이득을 말한다. 또한 x_{ij}는 참가자 각각이 i번째와 j번째 전략을 활용하는 경우에 얻어지는 득실행렬의 원소로 참가자들의 특정전략에 대응되는 이득값이다.

이와 같이 해서 최적전략에 대한 기대이득과 분산을 알게 되면 우리는 이 게임에 대한 분포를 구성할 수 있게 되며, 이러한 분포의 형상에 따라 전략에 대한 수용성 여부를 가늠할 수 있

게 된다. 그리고 이런 현상을 고려하여 최적전략을 구할 수 있도록 이득행렬을 재구성할 수 있게 될 것이다.

2.3 쌍행렬게임의 풀이

두 참가자가 있는 쌍행렬 게임을 $(I, (M,N), (A,B))$ 라고 표기할 때, 각 기호가 나타내는 것은 다음과 같다고 하자.

I ; 참가자 집합

(M,N) ; 두 참가자 각각의 순수전략 집합,

$M=\{1,2,\cdots,m\}$ $N=\{1,2,\cdots,n\}$

(A,B) ; 두 참가자 각각의 이득행렬,

$(A,B)=(a_{ij}, b_{ij})$,

여기서 $(i,j)\in M\times N$.

쌍행렬 게임으로 나타낼 수 있는 2인 협조게임 $(I, (M,N), (A,B))$ 에서 이득 집합을 P라고 할 때, P는 유한의 볼록 폐집합으로 나타나는데 이 P의 어떤 점이 참가자 A과 B의 이득을 공정하게 나타낼 수 있겠는가 하는 문제의 해를 찾을 때 협상해 및 조정해의 개념이 나오게 된다.

여기서 안전수준점이란 다음의 식을 만족하는 점 (u^*, v^*)로 정의 된다.

$$u^*=\underset{X}{Max}\ \underset{Y}{Min}\ XAY,$$

$$v^*=\underset{Y}{Min}\ \underset{X}{Max}\ XBY \tag{2.7}$$

즉, 쌍행렬게임에서도 각 참가자의 이득행렬에 대응되는 최적전략을 행렬게임의 풀이와 같은 방식으로 찾을 수 있다.

2.4. 예를 통한 전략선택에 대한 고찰

득실표가 다음과 같은 행렬게임을 생각해 보자.

$$A\begin{pmatrix} 46, & 22, & 39, & 27 \\ 10, & 34, & 39, & 27 \\ 55, & 31, & 48, & 24 \\ 19, & 43, & 12, & 36 \end{pmatrix}$$

이 게임은 수학문제 풀이 패키지인 Mathematica로 프로그래밍하여 풀 수 있다 [29][46].

여기서 식(2.5)를 이용하여 최적전략과 평형점이 되는 기대 이득값을 구하면 다음과 같다.

$$X^*=(7/12, 1/12, 0, 1/3),\quad Y^*=(0, 0, 1/4, 3/4)$$

$$X^*AY^*=30$$

위의 분석에서 서로가 안전수준점을 구하는 최적전략을 취한다고 가정할 때 기대값의 분산은 식(2.6)에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$V(x_{ij})=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}(x_{ij}-v)^2 p(x_{ij})=54$$

여기서는 $E(x_{ij})=v$로 보고 있기 때문에 이 값이 그다지 큰 의미를 갖지 않을 수도 있다.

즉, 참가자들이 실제로 미니막스 정리에 의한 안전수준의 값을 기대이득으로 보고 있는지는 알 수 없기 때문이다. 하지만 이 분산값은 상대가 취하는 전략의 추이와 더불어 실제의 결과와 예상결과를 비교하는 데 활용될 수 있을 것이다.

즉, 게임에 참가한 분석자가 위의 방식을 그대로

따르고 있음에도 불구하고 실제의 게임진행을 살펴본 결과 분산값이 너무 작게 나타난다면 상대방은 예상된 전략을 활용하는 것이 아니라 다른 어떤 특정의 전략형태를 활용한다고 볼 수 있는 것이다.

두 참가자가 안전수준값을 지향한다고 가정하면 각 참가자의 최적전략벡터를 확률분포로 보고 확률밀도함수를 구성할 수 있다. 예를 들어 A가 첫번째 전략을 취할 때, B가 3번째 전략을 취할 확률은 다음과 같이 계산된다.

$$Z_{13}=x_1\times y_3=\frac{7}{12}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{48}\approx 0.1458$$

3. 2인 협상게임과 여러 가지 해의 개념

참가자들의 이득합이 0이 되지 않는 비영합게임에서는 혼합전략을 취한다고 하더라도 참가자들의 이해관계가 꼭 상반되는 것은 아니기 때문에 참가자들의 교신이나 협조 또는 위협의 여부가 게임값을 결정하는 중요 인자가 된다. 또한 상대에 대한 확실한 정보를 가지고 있다고 하더라도 상대방이 자신에 대해 알고 있지 못하거나 불완비된 정보만을 가지고 있다면 이들은 게임의 진행에 따라 상대를 파악하려고 할 것이며, 동시에 상대방에게 거짓 정보를 낸다든지 또는 상대의 정체를 오인한다든지 하여 게임은 더욱 복잡한 양상을 보이게 된다 [5].

이렇게 복잡한 양상을 보이는 게임형태 중 특히 2인협조게임으로 나타나는 협상게임은 갈등상황이 특정의 폐쇄시스템에서 이루어지는 경우 아주 긍정적인 해를 제공하고 있다고 생각된다. 이런 협상게임에 접근하는 방식은 일반적으로 공리적 접근법과 전략적 접근법의 두 가지로 구분할 수 있다.

협상으로의 공리적 접근법은 협상이 가능한 경우의 효용쌍과, 일치된 견해를 전혀 찾을 수 없는 경우의 효용쌍의 값들에만 입각해서 협상해의 결과를 예측하고자 하는 하나의 시도라고 볼 수 있다. 다른 한편 전략적 접근법은 협상상황에 대한 기술적인 측면을 확장한 것으로서, 여기서 협상 규칙은 외생적인 것으로 가정되며, 해는 가능한 협상에 대한 함수일 뿐만 아니라 절차적 규칙과 각 구성원들의 시간 선호도 등에 대한 함수도 된다.

일반적으로 각 참가자들의 시간선호, 위험선호 등에 대한 정보가 불완비된 경우 협상해는, 이름하여 게임의 전개형에서 평형점에 이르는 길에는 닿지 않는 노드(Node)에 이를 때 게임의 참가자가 추론을 하는 방법이 어떤 것이냐 하는 것과 같은, 부가적인 요소들에 의존한다. 불완비정보를 가진 연속 협상모형을 다루는 연구들에서 공통적으로 사용되는 개념은 그 해가 연속평형점(Sequential Equilibrium) 중의 하나라는 것으로, 이 개념은 참가자의 전략이 게임 전개형 내에 있는 노드 중 닿지 않을 것으로 기대되는 노드들을 포함하여 의사결정을 필요로 하는 각 노드에서 최선의 의사결정이 있어야 한다는 성질을 요구한다 [40]. 참가자의 전략이 최선의 결과를 가져오는지의 여부에 대한 검사는 모형상의 불확실 요소에 대한 최근의 우도 추정값에 의존한다. 게임나무에서 도달할 수 있는 노드들에 대해서는 참가자들이 베이지안 공식을 사용한다고 가정하는 것이 바람직하다[14].

평형점에 도달하는 길과는 떨어진 노드들에 대해서는 베이지안 공식을 활용할 수 없다. 불완전 정보를 가진 게임의 공식에서는 참가자들이 0의 확률을 가진 사건이 발생한 경우 그들의 신

념을 어떻게 수정하는지는 나타내지 않는다. 0의 확률을 가진 사건은 참가자가 게임 전개형에서 평형점에 닿지 않는 노드에 도착하게 될 때 발생한다. 연속 평형점의 개념은 해가 확률 0의 사건이 발생한 이후 참가자들의 새로운 신념을 지정할 수 있어야 할 것을 요구한다. 확률이 0이거나, 또는 거의 발생하지 않을 것으로 생각했던 사건이 발생하면, 참가자는 이러한 사건에 대해 신념을 수정해 가는 방식을 재고하게 되는데, 이렇게 신념을 형성시키거나 그 방식을 수정하여 새롭게 신념수정의 방식을 취하는 일련의 어떤 사고방식을 우리는 추론(Conjecture) 행태라고 부른다.

덧붙여, 연속 평형점의 개념에는 추론행태가 또다른 확률 0의 사건이 발생하지 않는다면 참가자들의 신념을 연속수정하기 위한 기초가 되어야 한다는 요구도 포함하고 있다. 또 다른 확률 0의 사건이 발생한다면 참가자는 다른 추론법을 선택해야 하는 것이다. 비록 우리가 최선의 결과를 낼 전략을 지지하는 추론방식을 마음대로 선정할 수 있다고 하더라도 이상적으로는 연속평형점 개념을 이용해서 연속 평형점의 결과값들 중에서 유일한 결과를 선택할 수 있어야 한다. 실제로 여러 연속 협상모형들이 유일한 연속평형점에 도달한다. 연속 협상모형들에서 유일한 연속평형점의 결과들은 절차적 협상규칙이나 정보구조의 변화에 대해서는 강건(Robust)하지 않다. 예를 들어, 오직 판매자만 판매조건을 제시할 수 있는 상인-고객 협상게임과 같은 가장 단순한 형태의 게임에서도 판매자의 예정가액에 대한 불완전 정보 때문에 다중의 평형점이 존재할 수 있는 것이다.

평형점의 다중성은 해의 개념이나 협상모형에 있어서 결점이 된다기 보다는 추론행태 선정의 임의성에서 오는 결과임을 인식해야 한다 [37]. 이 결과는 보다 현실적인 상황을 반영한 모형에서 볼 수 있는 것이라 하겠다. 참가자들이 추론행태의 선정을 위해 사용하는 특정 규칙의 지정은 연속평형점의 결과집합을 제한한다. 추론행태 선정의 특성에 대한 다양한 가정들 하에서 연속평형점의 결과집합들을 서로 비교하면 추론방식의 선정과 게임결과의 연결관계를 명확히 볼 수 있다.

3.1 협상게임의 여러 가지 해에 대한 고찰 [4] [19]

협상게임의 매력은 이득행렬의 영역이 볼록집합으로 나타나며, 이러한 볼록집합에서 파레토 최적이 되는 해를 찾을 수 있다는데 있다. 협상을 통해 참가자들의 이득을 올릴 수 있으며, 이는 경쟁적 상황에서 서로에게 손실을 가져다 줄 수 있는 부정적 측면을 소거한다고 볼 수 있다.

(1) von Neumann-Morgenstern의 해

이득집합을 P, 그리고 이 P의 파레토 최적 집합을 P_0라고 한다면,

$$P_0 \cap \{(u, v) | u \geq u^* \text{ and } v \geq v^*, (u, v) \in P\} \tag{3.1}$$

를 von Neumann-Morgenstern의 해라고 한다. 여기서 (u^*, v^*)는 안전수준점이다. 즉 [그림 3.1]에서 점 EBCF를 잇는 선분상의 점들이 그 해가 된다.

(2) Shapley의 해

(u^*, v^*)를 안전수준점이라고 할 때 $(u-u^*)(v-v^*)$를 최대화하는 (u_S, v_S)를 Shapley의 해라고 한다. 즉 Nash의 협상모형에서의 최적해를 Shapley의 해라고 한다. [그림 3.1]에서 점

P_S가 그 해가 된다.

(3) Nash의 해

최적 위협전략에 의한 위협점을 $(\overline{u}, \overline{v})$라고 할 때 $(u-\overline{u})(v-\overline{v})$를 최대화하는 (u_N, v_N) 를 Nash의 해라고 한다. 다시 말해 위협게임에서의 최적해를 Nash의 해라고 하며, [그림 3.1]에서 점 P_N이 그 해가 된다.

여기서 위협점은 다음과 같은 방법으로 찾을 수 있다.

2인게임에서 두 참가자가 각각 어떤 위협전략 X, Y를 선택했다고 하자. 그러면 위협점은 유일하게 결정된다. 이 유일한 점 $(\overline{u}(X, Y), \overline{v}(X, Y))$에 대하여 Nash 협상모형의 협상함수 ϕ를 적용한 값을 $N(X, Y)$라고 두자. 협상함수에 대한 Nash의 공리를 따르면 여기서도 $N(X, Y)$는 파레토 최적집합의 원소가 된다.

$$N(X, Y) = \phi(\overline{u}, \overline{v}) \tag{3.2}$$

전략쌍 (X, Y)에는 $(\overline{u}, \overline{v}) = (\overline{u}(X, Y), \overline{v}(X, Y))$가 유일하게 대응하고 $N(X, Y)$ 또한 $(\overline{u}, \overline{v}) = (\overline{u}(X, Y), \overline{v}(X, Y))$에 유일하게 대응한다. 식(3.2)를 만족하는 $N(X, Y)$를 찾기 위해서는 우선 Nash의 협상모형에서 나온 다음의 정리 3.1과 정리 3.2를 살펴 볼 필요가 있다.

정리 3.1: 이득집합 P에서 $u > u^*$, $v > v^*$를 만족하는 점 (u, v)가 최소한 하나 존재 한다면, $g(u, v) = (u-u^*)(v-v^*)$라고 할 때 다음을 만족하는 점 (u_a, v_a)는 유일하게 결정된다.

$$(u_a, v_a) = Max\ g(u, v) \tag{3.3}$$

단, $u > u^*$, $v > v^*$이고 $(u, v) \in P$ 이다.

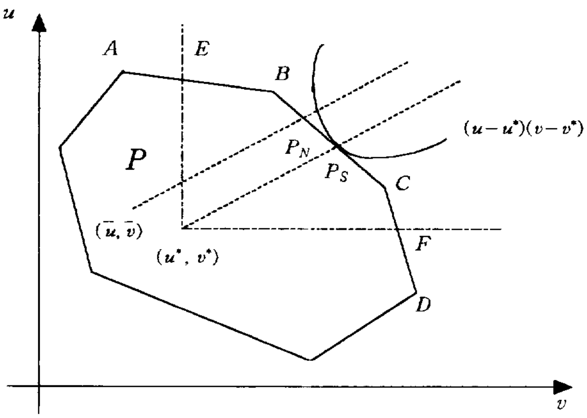
정리 3.2: (u_a, v_a)을 정리 3.1에서 결정된 점이라고 하고, $h(u, v)$를 다음과 같이 정의한다면,

$$h(u, v) = (v_a - v^*)u + (u_a - u^*)v,$$
$$(u, v) \in P \tag{3.4}$$

인 모든 점 (u, v)에 대해 다음을 만족한다.

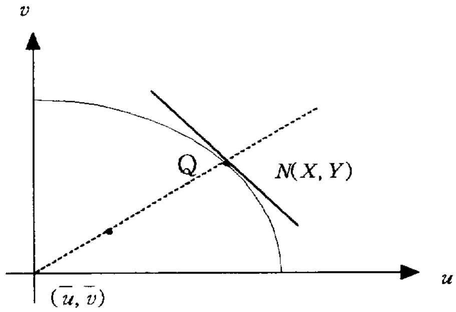
$$h(u, v) \le h(u_a, v_a) \tag{3.5}$$

정리 3.2에 의하면, 점 (u_a, v_a)를 지나고 (u_a, v_a)와 (u^*, v^*)를 잇는 선분의 기울기에



[그림 3.1] 2인 협조게임의 세 가지 기본해

음수값을 취한 수를 기울기 값으로 가지는 P의 지지선(Supporting Line)을 L_S라고 할 때 P는 이 지지선 L_S 밑에 온다는 것을 알 수 있다. 여기서 정리 3.1의 식에서 안전수준점 대신 위협점을 사용하면 $N(X, Y)$를 구할 수 있다.

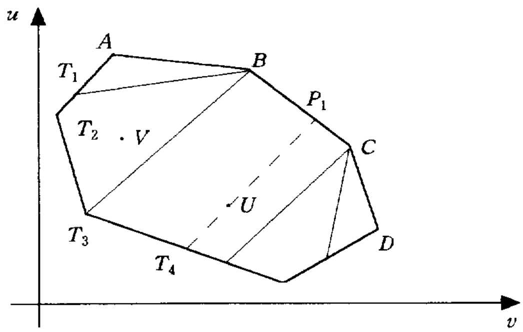


[그림 3.2] 파레토 최적집합

[그림 3.2]에서 점 (u_a, v_a)를 지나는 지지선과 선분 $(\bar{u}, \bar{v}) - (u_a, v_a)$는 기울기의 부호가 서로 반대가 된다. 따라서 선분 $(\bar{u}, \bar{v}) - (u_a, v_a)$ 상의 모든 점들의 이득 역시 (u_a, v_a)가 된다. 즉

$$N(X, Y) = N(X', Y') = (u_a, v_a),$$
$$\forall\ (X', Y') \in \overline{OQ} \qquad (3.6)$$

여기서 [그림 3.3]과 같은 이득집합을 가진 게임을 보면, 이 게임의 위협점집합은 바로 이득집합이다. 예를 들어, 점 U에 대해서는 P_1이 대응되는 윗식에서 본 바와 같이 $\overline{T_4P_1}$ 선분 상에 있는 모든 점에 P_1이 대응한다. 그리고 $\overline{T_3B}$ 선분상의 모든 점에는 B가 대응하며, $\overline{T_2B}$ 선분상의 모든 점에도 B가 대응한다. 그래서 $\triangle T_2BT_3$ 안의 모든 점, 예를 들어 V에는 B가 대응한다. [그림 3.3]과 같은 이득집합을 가진 게임에서 최적의 위협전략을 각각 X_t, Y_t라고 하고, 이때의 위협점을 $(\bar{u}, \bar{v})$라고 하자. 또한 선분 $\overline{AB}$의 기울기를 $-\rho$라고 하자.



[그림 3.3] 파레토 최적집합과 위협게임의 이득

선분 $\overline{AB}$의 기울기는 이 선분이 파레토 최적선상에 있기 때문에 $\rho > 0$가 된다. 그러면 $(\bar{u}, \bar{v})$를 지나고 기울기가 ρ인 선과 $\overline{AB}$가 만나는 점을 (u_a, v_a)라 할 때 다음식을 만족하게 된다.

$$u_a = \{(v_B - \bar{v}) + \rho(u_B + \bar{u})\}/2\rho,$$
$$v_a = \{(v_B + \bar{v}) + \rho(u_B - \bar{u})\}/\rho \qquad (3.7)$$

그런데 위협게임의 최적전략이라는 것은 결국 u_a와 v_a를 최대화하는 전략을 말하는 것이므로, $(\bar{u}, \bar{v})$를 찾는다는 것은 $\rho\bar{u} - \bar{v}$와 $-\rho\bar{u} + \bar{v}$를 최대화하는 문제를 푸는 것과 같다. 그런데 $\bar{u} = X_tAY_t$이고 $\bar{v} = X_tBY_t$이므로 결국 이 문제는 $\rho A - B$의 이득행렬을 가진 2인 영합게임을 푸는 것과 같게 된다.

3.2 참가자들의 효용 증가폭을 고려한 협상해

위에서 소개한 세 가지 기본해 이외에도 효용의 증가폭을 고려한 해를 생각해 볼 수 있다. 다시 말해 참가자들이 인정하는 안전수준점이나 위협점으로부터 새로이 생성될 협상해까지의 효용 증가가 클수록 그만큼 많은 가중값을 부여한다는 것이다. 이는 무척 협조적인 의미를 가진다고 볼 수 있다.

안전수준점 또는 최적의 위협전략에서 얻을 수 있는 해로부터 새로운 협상해로의 전환을 통한 효용의 증가가 목적함수에 미치는 영향이 위의 두 해에서와 같이 게임의 참가자가 반드시 동질적인 차원을 가져야할 필요는 없다. 다시 말해 각 참가자에 대해 효용의 증가폭이 커질 수록 목적함수를 더욱 크게 만들면 협상으로의 전환을 통해 효용이 많이 증가하는 쪽에서 그만큼 많은 혜택을 볼 수 있다. 즉 전체의 이득이 각 참가자에게 동질적인 의미로 분배되기보다는 협상을 통해 그만큼 효율적인 이득을 낼 수 있는 참가자에게 더욱 큰 이점을 안겨주는 방식이 있을 수 있다. 이것은 일반적인 경쟁관계에서의 타협 형태라기 보다는 동일 시스템 내에서 통합 시스템적인 목적을 가지고 고른 발전을 도모할 때 지원의 형태로서 보여질 수 있는 타협해라고 생각된다. 이를 위의 해의 정의에 맞추어 가장 쉽게 생각해 낼 수 있는 방식을 도출해 보면 다음과 같이 정리할 수 있다.

효용증가 가중해의 정의: (u^*, v^*)는 안전수준점이라고 하고, $(\overline{u}, \overline{v})$을 최적 위협전략의 해라고 할 때 $(u-u^*)^2+(v-v^*)^2$를 최대화하는 (u_{K1}, v_{K1})를 안전수준점으로부터의 효용증가 가중해라고 하고, $(u-\overline{u})^2+(v-\overline{v})^2$를 최대화하는 (u_{K2}, v_{K2})를 위협점으로부터의 효용증가 가중해라고 부르기로 한다.

이와 같은 정의를 만족하려면 가능해의 집합이 볼록다각형으로 나타나는 경우 이 해는 파레토 최적해를 만족하는 극점중의 하나가 되며, 반드시 하나이상 존재하게 된다. 이 해는 극점의 값을 만족하므로 혼합전략을 요하지도 않고 뚜렷한 행동대안을 제시하기 때문에 단회 게임의 경우에 혼합전략으로 기대이득을 높이려는 행동대안과 이득 확률이 가장 높은 특정의 순수전략을 취하는 방법 사이의 갈등을 해소시킨다.

그런데 이 게임에서 단일점으로 나타나는 효용증가 가중해 이외의 협상점은 혼합전략으로 달성할 수 밖에 없다. 물론 게임이 여러 번 시행된다는 보장이 있다면 그 비율로 협상점에 가까운 이득을 볼 수 있도록 순수전략을 선택할 수 있을 것이다. 하지만 단회 또는 유한회로 시행회수가 지정되어 협상점의 이득을 낼 수 있는 비율을 이루기 어려운 경우 이 협상점의 값을 낼 수 있는 혼합전략은 어떻게 구성할 수 있을지가 문제로 남는다. 이 전략을 만들기 위한 조건은 다음과 같을 것이다. (단 여기서 (u^*, v^*)는 새롭게 구성된 협상점을 말한다.)

$$\begin{aligned} &XAY = u^*, \quad XBY = v^* \\ &\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \qquad (3.8) \\ &x_i \geq 0, \quad y_j \geq 0 \\ &x_i \in X, \quad y_j \in Y \end{aligned}$$

그렇다면 이런 조건을 만족하는 모든 벡터 X, Y에 두 참가자들 모두 만족할 수 있는지의 여부도 또한 문제로 제기된다. 이 조건을 만족하는 혼합전략이 여러가지 존재할 수 있기 때문이다. 참가자들이 이러한 협상점을 만족하는 특정의 전략을 선택하고자 하는 방침은 이들의 의사결정에 대한 위험선호성향에 따라 달라질 것이다.

만약 강력한 조정 중재 위원회가 존재한다면 위의 분석을 토대로 이들의 위험선호성향을 반영하는 타협안을 제시할 수 있을 것이다. 또한 이런 중재 위원회는 이들의 타협안에 따른 성실한 실천여부를 감독하거나 조절할 수도 있을 것이다 [82]. 예를 들어 위의 조건을 만족하는 전략 벡터 X와 Y중 이들의 선호성향을 동시에 반영하는 타협안을 받아들이도록 강요하고 이를 실천하는지의 여부를 감독할 수 있을 것이다. 즉 위험을 추구하는 성향을 가진 참가자에게는 기대값이 협상안의 값이 되도록 하면서 그 게임의 기대값에 대한 분산이 큰 전략을 취하도록 하며, 위험을 회피하는 성향인 경우에는 분산이 작은 전략을 취하도록 하면 될 것이다. 물론 두 참가자 모두의 요구조건을 적극 수용한 것이어야 할 것이다. 이러한 요구조건에는 효용함수로 엄밀하게 표현할 수 있는 양적인 속성만 들어있는 것이 아니므로 협상안 마련에 있어서 논리적, 실질적 어려움이 따르는 것은 당연한 일이다 [3].

본고에서는 게임의 참가자들이 잠재효용을 고려하지 않은 상태에서 1차적으로 부과한 효용 득실표를 게임분석의 기점으로 삼는다.

3.3 사례를 통한 분석

이득행렬이 다음과 같은 2인 협조게임을 생각해 보자.

A는 세 가지의 전략을 취할 수 있으며, B는 네 가지의 전략을 취할 수 있다. 각 전략을 취해 이들이 취할 수 있는 이득 또는 효용은 다음과 같다.

이 게임에서 협상이 일어난다고 보고, 세가지 기본해를 구하면 다음과 같이 계산할 수 있다.

(1) von Neumann-Morgenstern의 해

$(u^*, v^*) = (27/47, 17/10)$의 값 위에서 볼록의 집합을 구성하는 이득값들 중 파레토 최적을 형성하는 선분상의 점들을 협상해로 한다. 즉 점 $(4,11)$, $(9,10)$, $(16,5)$를 잇는 선분상의 점들이 된다.

(2) Shapley의 해

von Neumann-Morgenstern의 해를 만족하는, 점 $(4,11)$, $(9,10)$, $(16,5)$를 잇는 선분상의 점들 중 $Max\ (u-u^*)(v-v^*)$로 하는 점을 구하면 점 $(4,11)$과 점 $(9,10)$를 잇는 선분상에서는 만족하는 것이 없으므로, 다시 점 $(9,10)$과 $(16,5)$를 잇는 선분상의 점들 중에서 찾는다.

그러면, $P_S = (49807/4700, 58293/6580)$, 즉 $(u_S, v_S) \approx (10.60,\ 8.86)$이 된다.

(3) Nash의 해

여기서도 점 $(4,11)$과 점 $(9,10)$를 잇는 선분 상에서는 만족하는 것이 없으므로, 다시 점 $(9,10)$과 $(16,5)$를 잇는 선분상의 점들 중에서 찾는다

먼저 위협점 P_t를 구하기 위해 $\rho A - B$를 구성하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{B} \\
\text{A} & \begin{pmatrix}
(-2, 8), & (-13, -7), & (16, 5), & (-6, -9) \\
(4, 11), & (9, 10), & (-9, -4), & (11, 3) \\
(7, -7), & (2, -2), & (-2, 5), & (15, 1)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\rho A-B=\begin{pmatrix} -66/7\ , & -16/7\ , & 45/7\ , & 33/7 \\ -57/7\ , & -25/7\ , & -17/7\ , & 34/7 \\ 12\ , & 24/7\ , & -45/7\ , & 68/7 \end{pmatrix}$$

그러므로 $P_t=(-3047/1690, -569/338)$ 이 된다. 즉 $(\bar{u}, \bar{v})\approx(1.80, 1.68)$ 이다.

또한 이 때 참가자 각각의 최적 위협전략은 다음과 같다.

$$X_t=(69/130, 0, 61/130)$$

$$Y_t=(0, 9/13, 4/13, 0)$$

그러면 $(u-\bar{u})(v-\bar{v})$ 를 극대화하는 Nash 해 (u_N, v_N) 는 다음과 같다.

$$(u_N, v_N)=(1531/130, 1459/182)$$
$$\approx(11.78, 8, 02)$$

끝으로 효용 증가 가중해를 계산하면 다음과 같다.

(4) 효용 증가 가중해

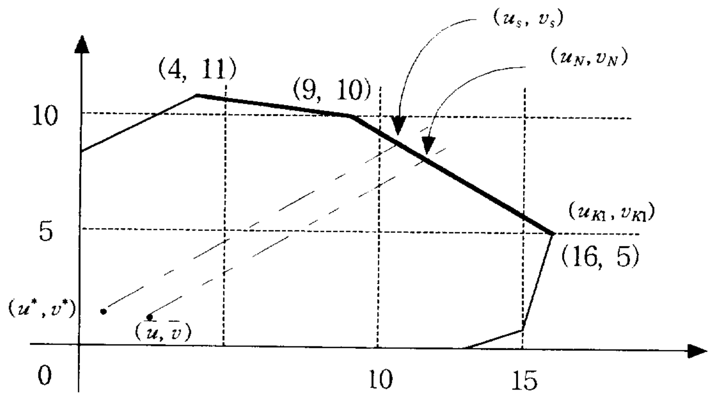
① 안전수준점으로부터의 효용증가 가중해 $(u_{K_1}, v_{K_1})=(16, 5)$

② 위협점으로부터의 효용증가 가중해 $(u_{K_2}, v_{K_2})=(16, 5)$

[그림 3.4]는 협상 및 협조적 조정이 일어나는 경우 가능해의 영역이 있는 1사분면만을 확대한 것이다.

4. 위험성향과 해의 변화

게임의 득실표는 단순한 금전가치가 아니라 효용으로 표시되어야 하기 때문에 동적 효용변화는 게임의 특성이나 해의 개념을 변화시킬 수



[그림 3.4] 2인 협상 및 조정게임의 가능해

있다. 따라서 안전을 위하는 관점에서 상대의 효용을 최소화한다는 것은 최적 전략을 찾기 위해 필수적이다. 규범론으로서 의사결정이론에 대한 수많은 몇가지의 합리적 행동공준(Reasonable Action Axioms)을 지적으로서 받아들이게 하였다. 이들 중 성공적인 사례들로는 ... 규칙(Minimax Rule)과 기대효용 극대화를 들 수 있다. 이 중 기대효용 극대화 원리만이 불확실성을 다룰 수 있도록 고안되었고 의사결정 분석의 기초를 구성하고 있다 [16]. Jacques ...와 Simon de Laplace를 거쳐 Leonard Savage[38]의 연구로 이어지는 기대효용 극대화 원리는 von Neumann과 Morgenstern[...]이 의사결정자의 선호도를 표현하는데 사용한 효용함수의 개념과, B. de Finetti[9]가 불확실성 척도로서 사용한 확률개념으로 연결된다.

4.1 위험기피성향에 따른 협상해의 변화

협상문제는 협상자들의 기대효용함수로 정의된다는 사실에도 불구하고 Nash에서 시작된 공리적 협상모형은 불확실성하에서 개인의 합리적 선택이론으로서 간접적으로 같이 사용되어 왔다. Nash가 명시적으로 사용한 개인의 효용함수의 유일한 특징은 이 함수가 순서를 지키는 (Order-Preserving) 선형변환에 의해서 유일하게 정의된다는 것이다.

정리 4.1: Nash의 해가 참가자에게 할당하는 효용은 상대방이 위험을 회피하는 성향이 많으면 많을수록 증가한다. 즉, $F_1(S, d) \geq F_1(S', d)$가 된다. 단, 여기서 (S', d)는 상대방(참가자 2)을 종전보다 더욱 위험회피형으로 대체함으로써 (S, d)로부터 구해지는 것을 말한다.

Alvin E. Roath[22][35][36]에 의하면, Nash의 해는 서로 다른 게임에 있어서 협상에 대한 선호도를 반영하는 특정 개인의 효용함수를 표현한 것이라고 볼 수 있다. 이렇게 해석하면 정리 4.1은 이와 같은 참가자가 가능한 어떤 상대보다 위험회피성향의 상대자에 대한 협상을 선호한다고 기술할 수 있다 [1][31].

4.2 위험성향과 여러가지 해

이인협상게임에 대한 또 다른 해는 Ehud Kalai와 Meir Smorodinsky[21]가 공리화한 것으로, Nash의 해와 정성적으로 똑같은 방법으로 위험선호성향의 변화에 반응한다.

어떤 게임 (S, d)에 대해, 이상적인 점 $I(S, d) = x^I = (x_1^I, x_2^I)$가 다음과 같이 정의된다고 하자. 여기서 S는 d를 포함하는 평면의 볼록 부분집합(Compact Convex Subset)으로서 $x > d$를 만족하는 최소한 한 점 x가 존재한다. 이 말은 S가 참가자들에게 가능한 기대 효용 득실 집합이 된다는 것을 말하며 참가자들의 협의를 통해 서로 의견을 같이하면 이것들 중의 한 값을 얻을 수 있다는 뜻이다. 어떠한 협상도 일어나지 않는 경우 불합치점인 d가 결과값이 된다.

$x_1^I = \max\{x_1 | x \in S \text{ and } x \geq d\}$이고,

$x_2^I = \max\{x_2 | x \in S \text{ and } x \geq d\}$

또한 $G(S, d)$는 d와 x^I를 연결하는 직선상

Nash 협상문제에 대한 또다른 해로서 M. A. Perles와 M. Maschler[33]가 제안한 것이 있다.

... 해(Super-Additive Solut-...

... 영역(Quadrant)에 있어서 ...

... 하게 다음과 같이 정리 4.2를 쓸 수 있다.

정리 4.2. ... 해 ... G가 참가자에게 할당하는 효용 ...

... 상대방이 위험을 회피하는 성향이 ...

... 여기서 $(\hat{S}, \hat{d})$ 는 상대방(참가자) ...

... 성질을 가지는 ... 할 수 있다.

위험에 대한 민감성(Risk Sensitivity) ...

... 종전보다 더욱 ...

... 대체하는 경우

$(\hat{S}, \hat{d})$ 로 바뀌며, 따라서 $f_1(\hat{S}, \hat{d}) \geq f_1(S, d)$

가 된다.

위험기피성향을 반영한 해 f 는 협상프로세스를 구성함에 있어서, 상대가 위험을 기피하는 성향이 매우 큰 경우 아주 유리하게 만든다. 이런 놀라운 특성에서 도출할 수 있는 결론은 위험에 ...

유일한 특징은 이 함수는 순서를 ...

(Order-Preserving) 선형변환에 의해서 유일하게

정리 4.4 f ...

에 민감하면 f ... 효용 제시에 대해 불리

비선형의 효용함수가 만들어진다고 볼 때, 이 효용함수에 관련된 위험에 대한 민감성으로부터 해의 선형불변성을 이끌어 내기 때문이다. 또 한 가지 이러한 위험민감에 대한 직관적으로 그럴듯해 보이는 결과는 협상결과가 파레토 최적이 되지 않을 수도 있다는 느낌으로부터 온 것이라고도 설명할 수 있다. 특히 협상이 결렬될 수도 있으며, 이에 대한 불안감은 위험기피성향이 큰 참가자로 하여금 바람직하지 못한 해로 이끌 수도 있는 것이다.

정리 4.4에서 바로 이끌어낼 수 있는 결론은 위험민감성을 Nash의 공리에서 동일효용에 대한 독립성에 대체할 수 있다는 것이다. 이것은 Nash의 해와는 다른 위험 민감 해들을 연구하기 위한 몇가지 접근법을 제시한다. 이들 중의 하나는 파레토 최적이면서 위험에 민감한 해를 찾는 것이다. 이 정리는 이런 해들이 동일효용 부과에 대해 독립이어야 하며, 따라서 Nash공리에서 무관한 대안에 대한 독립성이나 대칭성같은 것을 위반하게 된다는 것을 나타낸다. 정리 4.2와 정리 4.3에서 보면 G는 H와 마찬가지로 이런 부류의 해가 됨을 알 수 있다.

또 다른 접근법은 위험에 민감하면서도 파레토 최적은 이루지 못하는 해를 찾아보는 것이다. 이런 부류의 해들은 협상이 결렬되고 공전될 소지가 있는 협상모형을 구체적으로 표현할 수 있을 것이다.

4.3 연속 평형점에 대한 고찰

연속평형점의 개념은 불합리한 Nash 해를 배제하려는 목적하에서 D. M. Kreps와 R. Wilson[24]에 의해 제안되었다. 연속평형점의 개념에 깔린 기본 가정은, Savage의 의미에서 게임의 참가자들이 합리적이라는, 다시 말해 불확실 상황하에서 참가자들은 자신들의 주관적 판단 하에서 기대효용을 극대화할 수 있는 선택을 한다는 것이다. 더욱 상세히 말하면 참가자들이 게임의 전개에 따라 평형점 ϕ에 도달할 수 있는 선택을 하여야 한다고 하면서도 실제로는 자신의 선택으로는 평형점에 도달할 수 없다는 정보를 입수했다면 그 참가자는 자신의 판단이 어딘가 잘못되었으니 이를 수정해야 한다고 생각할 것이다. 즉 사전확률을 수정하여 사후확률을 구성하고 이에 따른 행동을 취하려고 할 것이다. 즉, 연속평형점이란 각 참가자들의 전략이 각 정보집합에서 자신들의 수정된 믿음에 비추어 최적이라고 할 수 있는 선택을 설명할 수 있는 전략의 조합을 말한다.

이러한 개념에 의하면 게임의 합리적 해는 참가자들이 취한 전략에 대한 설명을 할 뿐만 아니라 그 참가자들이 가진 믿음을 설명해야 하는 것이다. 따라서 다음과 같이 말할 수 있다.

어떤 게임의 참가자에게 들어오는 모든 정보집합을 u로 표시, 이 참가자의 신념시스템을 μ라고 표기할 때, μ를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mu: \sum_{X\in u}\mu(X)=1 \text{ 이며,}$$
$$\mu: X\rightarrow[0,1] \text{로 사상되는 함수}$$

또한 게임의 참가자가 선택한 전략은 (b,μ)로 표기할 수 있는데, 여기서 b는 전략행동의 조합을 말하고 μ는 신념시스템을 말한다. 즉 (b,μ)는 b를 전략으로 취한 경우 그 참가자의 신념시스템이 μ라는 것을 의미한다. 다시 말해 게임의 환경을 이루는 모든 정보집합 중 참가자 i가 취득 가능한 정보집합을 U_i라고 할 때, $u\in U_i$에서 $X\in u$라면, $\mu(X)$는 참가자 i가 u라는 정보를 얻었을 때 X에 할당하는

확률값이 된다.

5. 조정게임과 베이지안 추론

5.1 불완비 정보에 대한 추론상의 문제점들

불확실 또는 불완비 정보를 다루고자 하는 목적 하에서 많은 이론 및 방법론들이 제시되어 왔다. 예를 들어, 이런 방법론에는 통상적인 모형상의 조건부 확률만을 기반으로 하는 고전 통계학적 기법, 주관확률을 적극 수용하는 베이지안 기법, 확실인자를 구하는 방법(Certainty Factor Model), 퍼지집합론(Fuzzy Set Theory) 등과 같은 것들이 있다. 하지만 이들 모두는 주어진 명제 하에서 사람들이 자신들이 이미 알고 있는 정보에 대치되는 어떤 정보에 대해 어느 정도 확신해야 하는지 조차 알고 있지 못하다는 사실은 설명하지 못하고 있다. 예를 들어, 어떤 사람이 명제가 참이 될 정도에 대해 알고 있을 때, 그는 실제로 그 명제가 거짓이 될 정도에 대해서는 정확히 언급하지 못하는 경우가 대부분이다. 즉, 그가 알고 있지 못하는 것들 중에는, 이 예에서 볼 때, 그 명제가 거짓이 되는 경우에 대한 사실 및 그 명제의 미지 부분이 포함된다는 것이다.

이런 고찰을 토대로 한다면 분석대상에 대해 자신이 주관적으로 부여한 확률은 해석이 가능한 부분과 그렇지 못한 부분의 확률값이 1을 초과할 수도 있다는 결론이 나온다. 엄밀한 확률이론으로는 수용하기 힘든 내용을 담고 있지만, 이것은 실제 의사결정을 내리는 사람들의 위험기피 성향에서 기인되는 결과인 것이다. 불완비 정보 상황에서 사전지식이나 전문가의 견해를 참고로 하는 예는 프로젝트나 제품설계단계에서의 위험도나 신뢰성 분석에서 자주 볼 수 있다. 그리고 그러한 분석들은 특정의 안전기준에 부합하다는 것을 보이기 위해 규정대로 실행되어야 한다. 보통 그러한 분석들은 과거의 데이타와 기타의 구체적이고 확실한 정보(Hard Information)에 입각한 것이 된다. 하지만 때로는 확실한 정보를 충분히 확보하지 못하게 되는 경우가 있다. 예를 들어, 과거의 관련 데이타가 전혀 존재하지 않거나 있다고 하더라도 희소한 데이타(Sparse Data)인 경우가 있는 것이다. 이와 같은 경우 위험 확률 부과는, 관련 분야에서 오랜 경험과 지식을 쌓은, 전문가들의 판단에 입각할 수 밖에 없게 된다. [10][11][12][39]

한 전문가의 견해는 이것이 제시된 시점에서 그 논리적 일관성을 검사할 수 있다. 일관성이 결여되었다는 사실이 발견되면 그 전문가가 재고하여 다시 결정할 수 있도록 이것을 알려줄 수 있다. 이러한 일련의 과정은 사전확률 부과에 있어서 필수적인 부분이다. 이와 흡사하게, 최소한 원리상으로는, 시간적 일치성을 검토하고 재구성하여 전체의 분석이 전 관심기간을 포괄하도록 할 수 있다. 하지만 이러한 일은 실무상 거의 행해지지 않는다. 따라서 여러 전문가들의 견해의 질을 비교하는데 있어서는 주로 교정(Calibration)과 정보성의 문제에만 관심을 기울이게 된다. S. Lichtenstein와 Fischoff[25]의 연구에 의하면 사람들의 확률 판정에는 그 수량적 척도가 잘 매겨진 것이 거의 없다는 것을 알 수 있다. 또한 C. Genest와 C. Wagner[13]에 의하면 일반적으로 독립성을 유지하면서 여러 전문가들의 견해를 결합시키는 방법으로서 독단적이지 않은 규칙(Non-Dictatorial Rule)은 전혀 존재하지 않는다.

의사결정을 위한 의견통합모형(Opinion Pool)

에서는 전문가들의 판정치들을 확률값으로 보고 이 값들에 대한 일종의 평균값을 구하려고 한다. 베이지안 기법에서는 분석자가 부과한 사전확률값을 갱신(Update)해야 한다는 측면에서 볼 때 전문가들의 판정치들을 일종의 데이타로 취급한다고 볼 수 있다. P. A. Morris [30][31]는 전문가들의 판정값들을 통합시키는 문제에 대해 완전한 베이지안 접근법을 처음으로 소개하였다. 베이지안의 입장에서 전문가들의 견해를 통합하는 Morris의 공리적 접근방법 및 기타의 방법론에 대한 연구로는 R. L. Winkler[43][44][45], D. V. Lindley[26][27]등의 연구 외에 많은 문헌을 들 수 있다.

원리상으로 베이지안 모형은 고전적인 모형보다 더욱 현실적이라는 강력한 이점이 있다[14][15]. 베이지안 모형에서는 전문가들의 판정값들을 다시 교정하고 획득 가능한 모든 정보를 이끌어 내려고 한다[23]. 고전 모형에서는 잘 교정되어 있지 못한 전문가들의 판정치들을 무시하게 되며, 따라서 획득 가능한 정보 중의 일부만 추출할 수 있을 뿐이다.

5.2 동적게임의 평형점

일반적으로 동적게임에서는 두 가지 부류의 전략 선택 방법이 존재한다. 하나는 앞으로 취해질 전략이 과거의 전략과는 무관한 무기억 전략(Memoryless Strategies)이고 또 다른 하나는 과거 의존 전략 (History - Dependent Strategies)이다.

이산 시점에서 두 참가자들에 의해 관측되는 동적 시스템에 대해 생각해 보자. 각 관측점에서 두 참가자들은 그 시스템의 진화에 따라 동시에 행동을 취하고 그 시스템의 상태와 이들이 취한 행동에 의한 이득을 취하게 된다. 각 참가자들은 자신들의 총 이득을 최대화하려고 한다. 여기서는 두 참가자들 간에 결탁이 허용되지 않으며, 따라서 비협조게임이라고 가정한다. 일반적으로 참가자들의 이득은 완전히 상반되는 것은 아니기 때문에 비영합게임이 된다. 이는 앞에서 분석했던 쌍행렬게임이 시간이 지남에 따라 계속 반복되는 것으로 볼 수 있다.

각 참가자들이 그 시스템의 과거상태에 대해 정확히 기억하고 있으며, 따라서 어떤 관측점에서도 참가자는 자신의 의사결정을 그 순간까지 획득한 정보에 입각한다고 가정할 때, 우리는 이러한 전략을 과거의존전략이라고 부른다. 일반적으로 이러한 과거의존전략은 매우 복잡하게 분석되기 때문에 더욱 명확히 구조화된 전략집합으로 제한하게 된다. 동적계획법의 이론에 따르면 1인 동적 최적화 문제들에서는 전략을 무기억 전략, 즉 마코비안 전략으로 한정할 수 있게 된다. 즉, 어떤 관측점에서의 의사결정이 오직 그 순간의 시스템 상태에만 의존해서 이루어지는 것이라면 그 전략은 무기억 전략이라고 한다. 일단 한 참가자의 상대가 무기억 전략을 사용한다는 것을 알게 되면 그에게 남겨진 문제는 전형적인 동적계획문제가 된다. 따라서 어떤 무기억 전략에 대응하는 최선의 전략은 역시 무기억 전략이 된다. 그러므로 동적게임에서도 역시 무기억 전략으로 한정하는 것이 자연스럽게 보인다. 이런 내용이 바로 마코프 게임이나 차분 및 미분게임과 같은 동적 비협조게임에 관한 많은 문헌들에서 다루었던 내용들이다. 이런 문헌들의 공통적인 유일한 목적은 동적 게임에서는 Nash 평형점이 존재하고 이러한 존재성은 무기억전략이라는 한계 내에서 성립된다는 것을 증명하는 것이다. 그러나 이런 평형점이 과연 “얼마나 합리적”인가에 대한 문제는 항상 의문으로 남는다. “얼마나 합리적”인가라는 말이 의미하는 바의

몇 가지 측면은 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 다른 전략쌍으로 얻는 이득에 비교해 볼 때 이 평형점의 이득은 얼마나 큰가 ?

둘째, 이 평형점에 이르는 전략이 실제로는 얼마나 취해질까 ?

Eric van Damme[7][8]은 이런 동적게임에 대해 무기억 전략상의 평형점에 반하는 답을 하고 있다. 즉, 무기억 전략을 취하는 것 보다 과거의존적 전략을 취하는 것이 더 높은 이득을 낳는 평형점을 가지고 있다는 것이다. van Damme의 분석과는 별도로, 더 나은 평형점을 만드는 과거의존적 전략이 실제로는 자주 사용된다. 따라서 과거의존적 전략에 의한 평형점이 직관적으로 더욱 끌리게 되며, 이 현상을 잘 묘사하면 실생활의 행태를 설명하는데 아주 유용할 것이다.

완전히 기억하고 있다는 가정으로부터 참가자들은 스스로 어떤 특정 전략행태로 한정할 수 있다는 것을 알 수 있다. 무기억전략은 특정의 전략행태라고 볼 수 있다. 동적게임에서는 무기억전략을 쓸 때 동적계획법을 이용하여 특정의 평형점을 찾을 수 있다. 동적계획법으로 찾은 평형점을 재귀평형점이라고 부르기로 하자. 일반적으로 무기억전략을 쓰는 경우 모든 평형점들이 전부 재귀평형점이 되는 것은 아니다. 그 이유는 t시점에서의 상태가 이미 t시점에서의 과거정보에 대한 중요한 특성을 드러낸 것일 수도 있기 때문이다.

5.3 반복 쌍행렬 게임

G를 다음과 같은 쌍행렬게임이라고 하자.

G가 한번만 실행된다면 (U_2, V_2)의 단일 평형점만 존재하게 된다. 직관적으로 T가 충분히 크기만 하다면 두 참가자가 (U_1, V_1)에 도달할 수 있을 것이라고 기대할 수 있을 것이다. 즉 동

[표 5.5] 죄수의 딜레마 게임

G	V_1	V_2
U_1	(10,10)	(0,11)
U_2	(11, 0)	(1, 1)

적 환경 하에서는 명시적 협상이 불가능한 경우 참가자들이 자신들 모두에게 유리한 점에 도달하는데 암묵적인 동의를 하게 될 것이다. D. Luce와 H. Laiffa[28]에 의하면 이것도 불가능하다. 이와 같은 게임의 반복시행에서 모든 평형점은 (U_2, V_2)가 된다.

두 참가자들이 10의 이득을 얻을 수 있는 과거의존전략에도 하나의 평형점이 존재한다. 다음과 같은 전략을 생각해 보자 :

상대 참가자가 과거에 한번이라도 두번째 전략행동을 취한 적이 있다면, 두번째 전략을 취하고 그렇지 않다면 첫번째 전략을 취한다.

만약 양 참가자들이 둘 다 이러한 전략을 취한다면 하나의 평형점을 가지게 된다. 이 평형점은 두 참가자들에게 각각 10씩의 이득을 안겨다 준다. 따라서 본 게임과 같은 게임에서는 과거의존적 전략을 취하는 것이 효과적일 것이다.

비록 위에서 설명한 과거의존적 전략에 의해 얻어진 평형점이 아주 좋기는 하지만, 모든 평형점들의 무기억전략보다 양측 참가자들 모두에게 더 나은 결과를 주는 유일한 평형점은 아니다. 즉, 만약 (x, y)가 $\{(0,11), (11,0), (10,10), (1,1)\}$의 점들로 이루어지는 볼록포(Convex Hull)의 한 원소로서 $x \geq 1$, $y \geq 1$ 라면 위와 같은 추론방식으로 다음을 만족하는 전략쌍을 구성할 수 있게 된다.

(1) (π, σ)는 $G(\infty)$의 평형점이다.

(2) $R_1^{(\infty)}(\pi, \sigma)=x$ 이고 $R_2^{(\infty)}(\pi, \sigma)=y$ 이다.

따라서 이것은 $G(\infty)$ 와 G 의 정적 협동게임과 아주 비슷하게 된다.

이 방법을 택하는 게임에서는 각 참가자들에게 무기억 전략을 취할 때 보다 더 많은 이득을 준다. 이런 현상은 과거의존 전략을 사용하는 경우 참가자들이 서로 암묵적으로 협조하게 되기 때문에 발생한다.

5.4 추론학습의 재귀구조

일반적인 베이지안 의사결정 모형에서는 게임에 참가하고 있는 상대방의 추론성향에 따라 이들이 취할 전략의 확률값을 구하고 이에 대응되는 최적전략을 구할 때 그 해로는 단일 전략이 얻어진다. 이것은 게임에 임한 참가자가 실제로 취할 행동으로써 불만이 없는 것으로 보인다. 하지만 위의 예는 "게임상황"을 묘사한 것이라는 점을 기억해야 한다. 즉 게임의 참가자들을 서로의 상대가 취할 것으로 생각되는 전략을 고려하고 있다는 점이다. 만약 한 참가자가 위의 분석방법을 통해 특정의 전략을 최선의 전략으로 생각했다면, 상대방 역시 이러한 분석방법을 그대로 활용하고 있다고 생각해야 한다는 것이다. 그렇다면 이러한 재귀적 구조 속에서 최적 전략은 과연 어떻게 구할 수 있을까. 우선 다음과 같이 생각해 볼 수 있을 것이다.

첫째, 예를 들어, 참가자 A가 B의 전략을 분석하여 구한 최적 대응전략이 a_2 였으며, 이 전략에 대해서는 B역시 A가 이런 분석을 할 것이라고 판단할 가능성이 높다. 이 때 A가 전략 a_2 를 취한다고 하더라도 B가 별 불만이 없다면 암묵적인 타협 및 조정이 이루어질 것이라고 생각할 수 있다.

즉 자신의 분석결과를 상대방이 안다고 가정했을 때 상대방이 별다른 불만이 없는 경우라면 이들은 이에 대응되는 단일 전략이나 또는 이러한 단일 전략의 선택 확률을 높이는 방법으로 협상점에 도달할 것으로 예상된다.

둘째, 일반적인 게임상황에서는 상대가 취할 전략 중 가장 확률이 높은 전략에 대응되는 하나의 순수 전략을 무조건 행동하는 것은 바람직하지 않다. 그 이유는 상대방 역시 이런 분석을 하고 있다고 가정하고 있기 때문이다. 물론 대자연 게임과 같은 1인게임에서는 "무정한" 상대를 대상으로 하고 있기 때문에 가장 기대이득이 높은 순수전략을 찾을 수 있다. 하지만 참가자들 서로의 이해가 엇갈리며 서로가 지능적인 일반 게임상황에서는 순수전략을 취해 상대방이 자신에 대한 정보를 파악하기 쉽게 하기보다는 혼합전략으로써 상대를 교란시키고 자신의 이득을 최대화하려고 한다. 때문에 상대방에 대해 분석된 혼합전략에 대응할 수 있는 최적 전략 역시 혼합전략이 되어야 할 것이다.

셋째, 자신의 이득을 최대화하기 위해 상대를 교란시키는 것도 가능하겠지만, 기대이익이 안정되지 못한 불안한 이득을 취하기보다는 상대가 자신의 전략행태를 배울 수 있도록 하여 이 전략에 순응하는 전략을 취하도록 유도함으로써 파레토 최적을 이루는 협상점으로 향할 수 있을 것이다. 이 전략이 순수전략이 아니라고 하더라도 반복되는 동적게임에서는 이러한 암묵적 협의가 가능할 것으로 생각된다.

이런 발상들을 토대로 한다면 파레토 최적을 이루는 두 이득점들 사이에서 협상해를 찾을 것으로 기대된다. 물론 이와 같은 동적게임의 참가자들은 협상점에 불만이 있는 경우 자신의 불만을 상대가 학습할 수 있도록 위협행동을 할 수

있을 것이다. 이러한 위협행동에는 어느 정도의 손해를 감수해야 할 것으로 기대되지만 게임의 진행에 따른 평균 기대이득은 향상될 것이다.

그렇다면 다음과 같은 현실적인 문제가 남는다.

첫째, 상대방이 취할 것으로 예측되는 혼합전략에 대응하는 최적 전략은 어떻게 구할 것인가. 둘째, 이러한 전략은 과연 의도하는 평형점으로 상대의 전략이 수렴되는가. 셋째, 상대방이 취한 전략이 예상과는 다른 변칙적인 것이라면 어떻게 해야 하는가.

이런 문제에 대한 한 대안이 될 수 있는 해결방안은 재귀구조와 게임상황이라는 것을 먼저 고려하여 다음과 같은 접근법을 구상해 보는 것이다.

6. 베이지안 동적게임의 사례 분석

6.1 기본 모형의 구성

참가자가 둘 있는 행렬게임을 먼저 생각해보자. 여기서 참가자 A, B의 최적전략은 각각 X와 Y로 표기하기로 한다. 또한 A의 이득행렬은 그대로 A라고 표시한다. 이 때 A와 B가 각각 m 개와 n 개의 전략을 쓸 수 있다고 하자.

(1) 갈등상황을 표시할 수 있도록 초기 효용으로 구성된 이득행렬을 작성한다.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \cdots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) 미니막스정리를 이용하여 상대방의 최적전략 Y^* 를 구한다.

이러한 분석은 뒤에서 다룰 (4)의 분석을 돕기 위한 것으로 여기서 큰 의미는 없다. 상대방의 최적전략은 행렬게임인 경우 이득행렬을 A에 대해서 표기한 것이므로 B에 관한 것으로 고치면 $B=-A^T$로 놓고 풀 수 있다. 따라서 다음과 같이, 제2장에서 다룬 것과 똑같은 방법으로, 풀 수 있다. 단 $B=-A^T$를 그대로 푸는 경우 B의 기대치가 $E(B)<0$ 인 경우 선형계획법의 조건을 만족시키지 못하므로 각 원소가 상수값이 되도록 임의의 상수를 더해 계산해야 한다. 이렇게 만들어진 새로운 행렬을 B'이라고 한다면 다음과 같이 풀 수 있다. 물론 이때의 전략벡터는 원래의 것과 같게 된다.

$$Min.\ \ \frac{1}{L}=\bar{y}_1+\bar{y}_2+\bar{y}_3+\ \ldots\ldots+\bar{y}_n$$
$$s.t.\ \ \bar{Y}B'\ge 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6.1)$$
$$\bar{Y}\ge 0$$

여기서 $\bar{Y}=\left[\frac{y_1}{L}, \frac{y_2}{L}, \frac{y_3}{L}, \cdots, \frac{y_n}{L}\right]=$ $[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \cdots, \bar{y}_n]$이므로 다음식이 성립한다.

$$Y^*=L\bar{Y} \qquad (6.2)$$

또한 참가자 모두 혼합의 최적전략을 사용한 경우 평균과 분산을 구하면 다음과 같다.

$$E(B)=-E(A)=-X^*AY^* \qquad (6.3)$$

$$V(B)=V(A)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}-E(A)\}^2x_iy_j \qquad (6.4)$$

(3) 상대방의 위험성향 또는 그 추론성향을 분

류, 사전확률을 부과한다.

위험성향을 나타내는 상태 공간을 Θ라고 하고, 이때의 확률을 $P(\theta_i)$라고 한다면 다음 식을 만족한다.

$$\theta_i \in \Theta\ ,\quad \sum_{i=1}^{k} P(\theta_i) = 1 \tag{6.5}$$

또한 예를 들어, θ_i는 다음과 같이 분류할 수 있을 것이다.

θ_1 : 위험기피형
θ_2 : 위험선호형
θ_3 : 위험중립형
....
θ_k : 완전랜덤형

(4) 이러한 위험성향을 가진 상대의 전략 Y_{θ_i}를 추측한다.

여기서 Y_{θ_i}는 위험성향 θ_i를 조건으로 한 전략벡터 $Y|\theta_i$ 이다.

물론 상대가 어떤 특정의 위험성향을 가진 경우 그가 취할 전략을 예측하는 데는 몇가지 문제가 있다 [44][45]. 일단 여기서는 그러한 상황하의 전략을 예측할 수 있다고 가정한다. 게임상황에서라면 위험기피형은 될 수 있으면 그 효용의 크기보다는 안전하게 이를 얻을 수 있는 전략을 취하는 성향을 가질 것이고, 완전랜덤형은 대자연 게임에서 무정한 자연과 같은 전략행태를 보일 것이다.

$$\sum_{j=1}^{n} (Y_j | \theta_i) = (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \mid \theta_i = 1 \tag{6.6}$$

(5) θ_i에 대한 사전정보 $P(\theta_i)$를 활용하여 참가자 B의 최적전략 Y^*_Θ를 재구성한다.

물론 이는 실제로 B가 취하게 될 전략을 의미하는 것이 아니고 A가 분석한 결과일 뿐이다. B의 최적전략 Y^*_Θ는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y_j^* | \Theta = \sum_{i=1}^{k} P(\theta_i) P(y_j | \theta_i) \tag{6.7}$$

그런데 베이즈 정리에 의해 $P(\theta_i|y_j)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(\theta_i|y_j) = \frac{P(\theta_i)\cdot P(y_j|\theta_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(\theta_i)\cdot P(y_j|\theta_i)} \tag{6.8}$$

이 $P(\theta_i|y_j)$는 y_j를 경험하고 난 후의 사후확률로서 게임이 반복되는 경우 사전확률 $P(\theta_i)$로 대체된다

(6) 이득행렬의 각 원소에 해당 전략이 취해질 확률을 곱해 이득행렬을 재구성한다.

$$A'_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1^*, a_{12}y_2^*, \cdots, a_{1n}y_n^* \\ a_{21}y_1^*, a_{22}y_2^*, \cdots, a_{2n}y_n^* \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}y_1^*, a_{m2}y_2^*, \cdots, a_{mn}y_n^* \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

(7) 미니막스정리를 이용하여 재구성된 이득행렬을 푼다.

여기서는 A가 취할 전략을 구하는 것으로 제2장과 똑같은 방법으로 푼다. 단지 이득행렬이 A에서 A'으로 바뀌었다고 생각하면 된다. 이때의 최적 전략벡터는 X^*로 표기한다.

$$X^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*, \cdots, x_m^*] \tag{6.10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$$

(8) 원 이득행렬을 이용하여 A의 기대이득과

분산을 구한다.

$$E(A) = X^{*} A Y^{*}_{\Theta} \tag{6.11}$$

$$V(A) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij} - E(A)\}^2 x_i^{*}(y_j^{*} | \Theta) \tag{6.12}$$

(9) 게임을 실행하여, 상대가 취한 전략이 예측과 일치하는지 확인한다.

① 일치한다고 판단되면, 단일 평형점으로 수렴하는 것으로 볼 수 있다.

② 일치한다고 볼 수 없으면, 위험선호성향에 대한 사전확률을 수정한다.

여기서도 매우 어려운 문제가 남아 있다. 상대의 위험성향이 갑작스럽게 바뀐다고 하더라도 혼합전략을 사용하는 상태에서는 이를 쉽게 판단하기 어렵다. 즉 상대에 대한 최적전략의 예측은 $P(\theta_i | y_j)$를 통해서 이루어지는데[20] 확률통계학상의 추이적 관찰에 의하면 그 변화가 급하지 않기 때문이다. 즉, 혼합전략으로 구성된 상대의 전략이 실제로 시행된 경우 관측은 단일전략에 대해서만 이루어지고, 이로 인해 상대의 전략이 예측과 일치하는지의 여부를 쉽게 가늠하지 못하게 된다. 또한 낮은 확률값을 가진 전략이 실행된 경우 상대가 이를 학습하고 최적대응전략을 구하는 과정상의 내용은 본질적으로 게임의 이득값을 다른 효용함수로 바꾼 것과 동일한 효과를 낳는다 [17]. 따라서 안정된 평형점으로 나아가려면 상대의 전략에 대응하여 게임상황을 원래형태와 비슷한 모형으로 전환시킬 수 있는 전략의 활용도 있어야 한다. 즉 위험을 감수하고 일종의 위협전략도 활용하는 의도적인 장치가 필요하다는 것이다.

(10) 마지막으로 상대방의 위험선호성향에 대한 사후확률을 구성하고, (3)으로 간다.

베이즈 정리에 의해 $P(\theta_i | y_j)$는 (5)와 같다.

$$P(\theta_i | y_j) = \frac{P(\theta_i) \cdot P(y_j | \theta_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(\theta_i) \cdot P(y_j | \theta_i)} \tag{6.13}$$

6.2 행렬 게임

이제, 행렬게임을 예로 들어 위 접근법을 구체적으로 설명해 보기로 한다.

(1) 먼저 A와 B가 참가하는 (비협조)게임을 다음과 같은 이득행렬로 표기할 수 있다고 하자.

$$\begin{pmatrix} 46, & 22, & 39, & 27 \\ 10, & 34, & 39, & 27 \\ 55, & 31, & 48, & 24 \\ 19, & 43, & 12, & 36 \end{pmatrix}$$

(2) 그리고 이 행렬을 제2장에서 소개한 미니막스 정리를 이용하여 안전수준점을 구하고 그 때 B의 최적전략을 $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ 라고 하자.

$$Y = \left\{\frac{3}{16}, \frac{9}{16}, \frac{1}{4}, 0\right\}$$

(3) 그런 다음 Y의 위험선호성향 또는 추론성향의 집합을 Θ로 하고 특정의 성향을 가질 확률 $P(\theta_i)$를 구한다. 예를 들어 θ_i는 다음과 같

[표 6.1] 위험성향 θ_i 의 분류와 그 확률

$\theta_i \in \Theta$	$\sum_{i=1}^{4} P(\theta_i) = 1$
θ_1 : 위험기피형	$P(\theta_1) = 0.2$
θ_2 : 위험선호형	$P(\theta_2) = 0.3$
θ_3 : 위험중립형	$P(\theta_3) = 0.4$
θ_4 : 완전랜덤형	$P(\theta_4) = 0.1$

이 분류할 수 있을 것이다.

(4) 그 다음 분석과정은 논란의 여지가 많을 것이다. 그 이유는 다음과 같이 설명할 수 있을 것이다. 어떤 위험성향을 가진 사람이 있다고 할 때 그 사람이 취할 혼합전략을 정확히 알 수 있다고 기대하기는 어렵다.

$$\begin{pmatrix} 11.5 & , & 7.04 & , & 11.505 & , & 5.265 \\ 2.5 & , & 10.88 & , & 11.505 & , & 5.265 \\ 13.73 & , & 9.92 & , & 14.16 & , & 4.68 \\ 4.75 & , & 13.76 & , & 3.54 & , & 7.02 \end{pmatrix}$$

물론 이 행렬은 실제의 이득행렬이나 기대효용을 가진 이득행렬을 나타내는 것은 아니다. 단지 $Y^*_\Theta=\{0.25,0.32,0.295,0.195\}$ 에 대응한

[표 6.2] Θ의 성향을 가진 B가 취할 전략의 확률

from Θ to Y	y_1	y_2	y_3	y_4	
θ_1	0	1/5	3/10	1/2	$\sum_{j=1}^{4} y_j=1$
θ_2	1/2	1/10	3/10	1/10	
θ_3	3/16	9/16	1/4	0	
θ_4	1/4	1/4	1/4	1/4	

(5) 이 때 Y^*_Θ를 구하면 다음과 같다.

$y^*_j|\Theta=\sum_{i=1}^{k} P(\theta_i)P(y_j|\theta_i)$ 이므로,

$Y^*_\Theta=\{0.250,0.320,0.295,0.195\}$

다고 생각하고 다시 한번 비관적 입장에서 미니막스 정리를 이용한 최적해를 찾고자 하여 만든 것일 뿐이다.

[표 6.3] Θ의 성향을 가진 B가 취할 최적 전략의 계산

$P(\theta_i\|y_j)$	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	
y_1	0.0000	0.6000	0.3000	0.1000	$\sum_{i=1}^{4} P(\theta_i\|y_j)=1$
y_2	0.1250	0.0938	0.7032	0.0781	
y_3	0.2034	0.3051	0.4068	0.0847	
y_4	0.5128	0.1538	0.2051	0.1282	

여기서 $Y^*_\Theta=\{0.25,0.32,0.295,0.195\}$ 이므로, 새로운 이득행렬을 구성하면 다음과 같다.

(6) 이 전략벡터를 각 열에 곱해서 다음과 같은 새로운 이득행렬을 구할 수 있다.

(7) 이 때의 최적 대응전략 X^*는 다음과 같다.

$X^*=\{0.3580,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.6420\}$

(8) 지금까지 B의 위험성향을 조건으로 한 최

적전략 Y^* 와 X^* 를 구하였다. 그렇다면 이 경우 A에게 기대되는 효용(이득)을 얼마나 될까. 이는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$X^*AY^* = [0.3580,\ 0.0000,\ 0.0000,\ 0.6420] \begin{pmatrix} 46 , & 22 , & 39 , & 27 \\ 10 , & 34 , & 39 , & 27 \\ 55 , & 31 , & 48 , & 24 \\ 19 , & 43 , & 12 , & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.32 \\ 0.295 \\ 0.195 \end{pmatrix}$$

$$= 31.3041$$

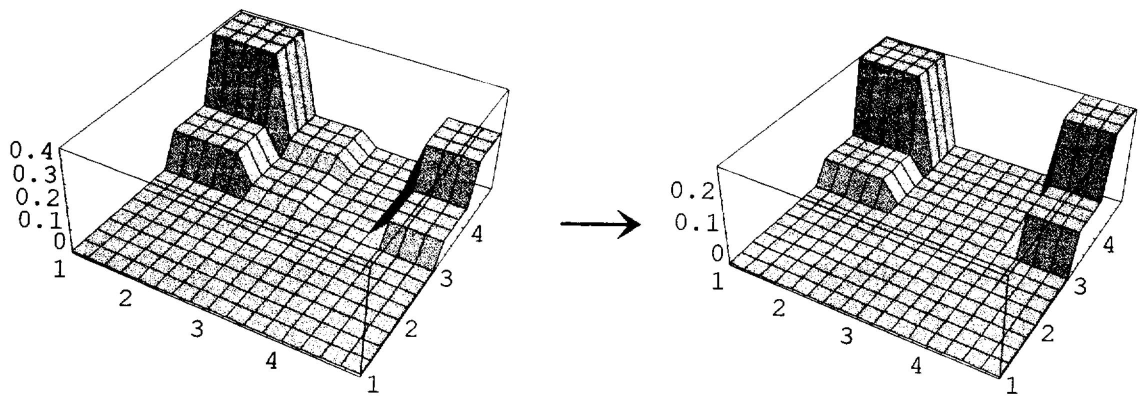
이 값은 원래의 안전수준값인 30보다 늘어난 값으로서, 분석과정에서 B의 최적전략을 예상하고 이에 대응하는 전략을 찾았다는 점에서는 당연하게 보인다. 하지만 단일 행동으로서 나타나는 순수전략을 찾아내는 것이 아니라 B의 전략을 예측한 상태에서 기대손실을 최대한 줄일 수 있는 혼합전략을 구한다는 점에서 그 의의가 있다 하겠다.

[그림 6.1]은 새로 만들어진 이득행렬을 가지고 안전수준점을 향하는 전략을 취할 때 각 전략에 대한 확률분포를 나타낸 것이다. 여기서 주의할 것은 B의 최적 전략벡터가 $Y^*_\Theta = \{0.25,\ 0.32,\ 0.295, 0.195\}$ 라고 예상되긴 했지만, B는 예상대로 하지 않고 A가 위 (6)의 분석에서 새로 구성한 득실표를 가지고 있다고 생각하여 이에 대응하는 최적전략을 활용한다고 보았다는 점이다. 따라서 [그림 5.1]은 B의 최적 전략벡터를 $Y^* = \{0.0,\ 0.0,\ 0.1806,\ 0.8194\}$ 라고 본 것이다. 제2장에서 구한 최적전략벡터와 큰 차이가 나지 않는다는 것을 알 수 있다.

6.3 쌍행렬 게임

여기서는 제3장의 2인 협조게임에 대해 다시 생각해 본다.

이 게임에서는 참가자 각자가 어떤 전략을 활용해야 자신의 효용을 증가시킬 수 있도록 상대의 협조를 유도할 수 있는지가 현실적인 문제가 된다. 즉 자신의 손해를 줄이면서 암묵적인 협조를 이끌어 낼 수 있는 초기전략을 어떻게 구성할 수 있을까를 문제시하게 된다. 따라서 어떻게 하면 원하는 이득쌍의 값을 구할 수 있도록 효용행렬을 표시할 수 있을까를 먼저 생각하게 된



[그림 6.1] 새로운 전략집합을 쓰는 경우의 확률분포

$$\begin{pmatrix} (-2, 8), (-13, -7), (16, 5), (-6, -9) \\ (4, 11), (9, 10), (-9, -4), (11, 3) \\ (7, -7), (2, -2), (-2, 5), (15, 1) \end{pmatrix}$$

다. 가장 기본적으로 다음과 같은 생각을 할 수 있을 것이다.

첫째, 게임 참가자들의 효용합을 새로운 단일 행렬로 표기하면 게임의 참가자는 그 효용합을 증가시키는 것을 목적으로 하게 된다. 즉 자신의 효용뿐만 아니라 상대의 효용을 함께 고려하는 셈이 된다.

먼저 다음과 같이 득실표를 정의한다.

$$A = \begin{pmatrix} -2, & -13, & 16, & -6 \\ 4, & 9, & -9, & 11 \\ 7, & 2, & -2, & 15 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 8, & -7, & 5, & -9 \\ 11, & 10, & -4, & 3 \\ -7, & -2, & 5, & 1 \end{pmatrix}$$

여기서 $A+B$의 새로운 득실표를 구성한다. 물론 참가자들의 효용에 대해서 엄밀한 1대 1의 비교는 비현실적일 수도 있다. 보통 그 대비정도는 선형함수 $\alpha A+(1-\alpha)B$로 나타내어 (단 $0 \le \alpha \le 1$ 이다.), 두 득실표를 볼록결합(Convex Combination)시킨 형태를 가지고 분석할 수도 있을 것이다. 여기서는 가장 간단히 생각할 수 있는 형태인 $A+B$를 고려하기로 한다.

$$A+B = \begin{pmatrix} 6, & -20, & 21, & -15 \\ 15, & 19, & -13, & 14 \\ 0, & 0, & 3, & 16 \end{pmatrix}$$

이것이 A의 입장에서 최대화하겠다는 이득행렬이라면 미니막스 정리에 의해 소극적인 해 $X^* = (0.4201,\ 0.5318,\ 0.0380)$을 구할 수 있다. 둘째, 상대방도 이와 같은 전략을 활용한다고 가정할 때, 상대방이 구한 최적 전략은 협조적 전략해임을 알 수 있으며, $(A+B)^T$를 B가 생각하는 득실표로 보고 최적 전략을 찾아낼 수 있다. 따라서 여기서도 미니막스 정리에 의해 소극적인 해 $Y^* = (0.3938,\ 0.0000,\ 0.3353,\ 0.2709)$를 계산할 수 있다.

셋째, 이러한 효용함수를 두 참가자가 모두 인정하고 전략을 활용하는 경우의 기대이득은 각각 다음과 같이 구할 수 있다. (단 여기서 Y^*는 열벡터라고 가정한다.)

$$E(A) = X^* A Y^* = 2.3071,$$

$$E(B) = X^* B Y^* = 3.0334$$

위 기대값들은 제3장의 분석에서 얻어진 안전수준점 (0.5745, 1.7000)보다는 참가자 모두에게 큰 효용값을 돌리는 것으로, 가장 단순화시킬 수 있는 최소한의 협조 방안으로도 이와 같은 효용의 부가가 가능하다는 것을 알 수 있다. 만약 협상 및 중재자를 통해 명시적인 협조방안을 마련하지 못한다고 하더라도 이와 같은 단순한 형태의 분석을 통해 협조적인 전략을 구상하고 이를 실행한다면 상대의 동조 분위기를 유도할 수 있을 것으로 생각된다.

그런데 이 게임에서 실질적으로 문제가 되는

것은 두 참가자들이 보는 게임의 득실표가 각각 다른 논리를 통해 구성된 경우일 것이다. 예를 들어 두 참가자 모두가 새로운 득실값으로서 원 득실표를 선형 볼록결합시킨 형태를 활용한다고 하더라도, 참가자 A는 $\alpha A+(1-\alpha)B$로 득실표를 구성한 반면에, 참가자 B는 $\beta B+(1-\beta)A$로 구성하고, 여기서 "$\alpha+\beta\neq 1$"이라면, 이때 역시 게임의 기대이득이 증가될지 확인해 보아야 한다는 것이다.

득실표가 이와 같은 선형 볼록결합으로 만들어지는 경우 α와 β값의 변화에 따라 두 참가자들이 얼마나 이기적인지, 또는 이타적인지는 [표 6.4]와 같이 분류할 수 있을 것이다. [표 6.4]에서 보면 좌상에서 우하의 대각선에서는 두 참가자 모두가 비슷한 협조성향을 가진다는 것을 알 수 있다. 여기서 대각선의 우측방향은 두 참가자 모두의 협조성향이 늘어난다고 볼 수 있다. 또한 우상에서 좌하의 대각선 방향으로는 B의 협조성향이 줄어드는 반면에 A의 협조성향은 늘어남을 볼 수 있다. 결국 여기서의 문제는 참가자들의 협조 성향이 좌상에서 우하의 대각선에 위치하지 않는 경우, 각 참가자들의 기대이득은 어떻게 변할 것인지를 알아보는 것이 된다.

다음의 [표 6.5]에서는 두 참가자들의 협조성향, 또는 상대의 이득에 대한 자신들의 이득을 보는 비중이라고 볼 수 있는 α와 β값의 변화에 따라 두 참가자들이 기대할 수 있는 이득값의 몇가지 예를 살펴볼 수 있다.

즉, $\alpha=0.6$, $\beta=0.7$인 경우에는 $E(A)=2.2738$, $E(B)=1.9628$의 기대값을 볼 수 으며, $\alpha=0.8$, $\beta=0.3$인 경우에는 1.7399, $E(B)=5.9970$을, 또한 $\alpha=0.9$, $\beta=0.1$인 경우에는 $E(A)=2.8734$, $E(B)=-1.194$의 값을 찾을 수 있다. $\alpha=0.5$, $\beta=0.5$인 경우는 이득 행렬을 $A+B$로 본 것과 가중치 면에서 동일한 것이므로, 앞에서와 같은 $E(A)=2.3071$, $E(B)=3.0334$의 기대값을 찾을 수 있다.

[표 6.5]와 [그림 6.2]를 잘 살펴보면, 상대의 득실표를 고려하는 정도와 상대의 협조성향에 따라 게임의 기대값이 약간씩 차이를 보이고 있는데, 특히 극단적으로 한쪽으로만 치우치는 경우가 아니라면 각 참가자들의 안전수준점보다 나은 게임값을 기대할 수 있음을 알 수 있다.

이처럼 쌍행렬 게임의 경우에도 협상방안을 나타내는 효용함수의 결합이 가능하며, 이러한 결합을 통해 행렬게임으로 보고, 다시 이를 제3절의 분석방법과 결합시키면 훌륭한 게임전략을 기대할 수 있을 것으로 생각된다.

[표 6.4] 득실표의 선형 볼록결합과 게임의 협조 성향

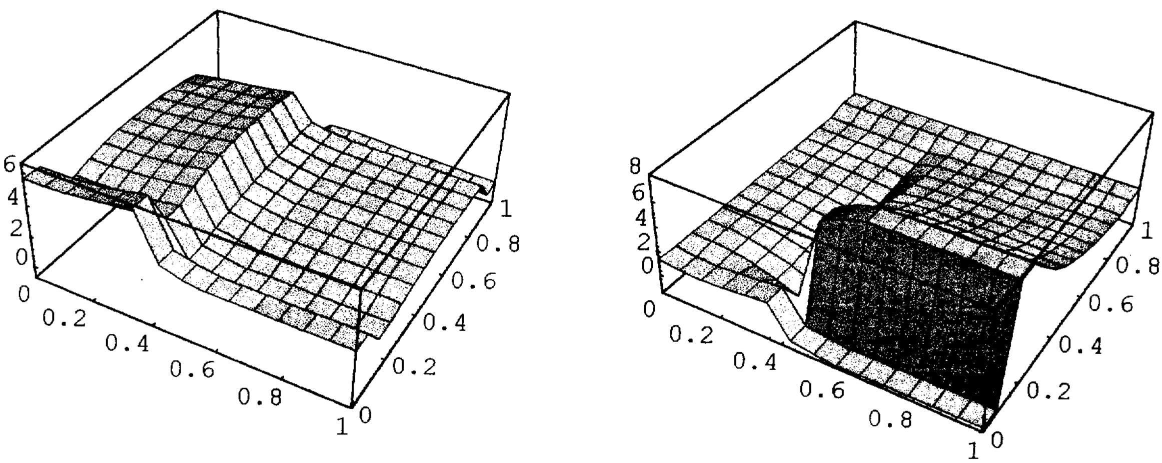
게임의 협조 성향		$\beta=1$ (이기적)	$0\le\beta\le1$			$\beta=0$ (이타적)
			$0.5\le\beta\le1$	$\beta=0.5$	$0\le\beta\le0.5$	
$\alpha=1$ (이기적)		$A=B$				$A\ll B$
$0\le\alpha\le1$	$0.5\le\alpha\le1$		$A\approx B$		$A\le B$	
	$\alpha=0.5$			$A=B$		
	$0\le\alpha\le0.5$		$A\ge B$		$A\approx B$	
$\alpha=0$ (이타적)		$A\gg B$				$A=B$

↓ :A의 협조성향 증가
→ :B의 협조성향 증가

[표 6.5] 득실표의 선형 볼록결합과 각 참가자의 기대이득

β \ α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	5.6737	5.6592	5.8485	6.1536	6.6323	3.1031	2.9048	2.9048	2.9048	2.9048	2.9048
	1.2759	1.0210	1.1184	1.3237	1.6563	-1.210	-1.320	-1.278	-1.240	-1.205	-1.174
0.1	5.5326	5.5441	5.7335	6.0336	6.5034	3.0835	2.8859	2.8814	2.8774	2.8734	2.8704
	1.2759	1.0338	1.1342	1.3419	1.6778	-1.191	-1.320	-1.263	-1.227	-1.194	-1.165
0.2	3.4424	3.4428	3.5802	3.7995	4.1430	1.6283	1.4847	1.4829	1.4812	1.4796	1.4783
	1.2759	1.2672	0.8098	0.0812	-1.060	7.2818	7.7596	7.7671	7.7739	7.7800	7.7855
0.3	3.7632	3.7831	3.9301	4.1629	4.5256	1.9039	1.7501	1.7447	1.7399	1.7355	1.7316
	1.2759	1.2294	0.8847	0.3433	-0.503	5.6144	5.9733	5.9857	5.9970	6.0072	6.0165
0.4	4.0003	4.0510	4.2087	4.4504	4.8269	2.1558	1.9927	1.9819	1.9722	1.9634	1.9554
	1.2759	1.1997	0.9632	0.6007	0.0358	4.0425	4.2872	4.3033	4.3179	4.3311	4.3431
0.5	4.0646	4.1521	4.3161	4.5610	4.9409	2.3071	2.1384	2.1213	2.1058	2.0918	2.0791
	1.2759	1.1884	1.0244	0.7795	0.3996	3.0334	3.2021	3.2192	3.2347	3.2487	3.2614
0.6	4.0148	4.1447	4.3133	4.5570	4.9333	2.3978	2.2258	2.2013	2.1793	2.1593	2.1411
	1.2759	1.1892	1.0769	0.9143	0.6635	2.3538	2.4685	2.4848	2.4995	2.5128	2.5250
0.7	3.8765	4.0554	4.2272	4.4665	4.8337	2.4475	2.2738	2.2408	2.2112	2.1843	2.1598
	1.2759	1.1992	1.1256	1.0230	0.8656	1.8883	1.9628	1.9769	1.9896	2.0011	2.0116
0.8	3.6597	3.8954	4.0695	4.3015	4.6548	2.4663	2.2918	2.2492	2.2108	2.1760	2.1443
	1.2759	1.2170	1.1734	1.1154	1.0271	1.5742	1.6178	1.6285	1.6381	1.6468	1.6547
0.9	-0.489	-0.022	0.0327	0.0289	0.0028	0.9840	0.9416	0.8610	0.7883	0.7224	0.6623
	1.7547	1.7028	1.6967	1.6971	1.7000	1.5910	1.5957	1.6047	1.6128	1.6201	1.6267
1.0	-0.595	-0.049	0.0195	0.0222	0.0028	1.0682	1.0140	0.9197	0.8346	0.7575	0.6872
	1.7000	1.7000	1.7000	1.7000	1.7000	1.7000	1.7000	1.7000	1.7000	1.7000	1.7000

	α의 값
β의 값	A의 기대이득
	B의 기대이득



[그림 6.2] 득실표의 선형 볼록결합과 각 참가자의 기대이득

7. 결 론

본 논문에서는, 어떤 시스템의 구성원들이 이해관계가 서로 얽혀 이들의 이득을 최대화하려는 갈등과정에서 의사결정 상황이 만들어 질 때, 이를 협조게임의 형식으로 환원시켜 고찰하였다. 게임의 경우 해를 구하기 위한 제약조건으로서 가장 중시되는 것은 재귀적 사고 체계이며, 이 때문에 몇 가지 조건이 일치하는 경우 향상된 게임값을 기대할 수 있게 된다는 것을 보였다. 또 이 조건들은 동적 게임인 경우 게임을 진행시키면서 상대에 대해 학습한 결과로 확인할 수 있는데, 이를 위해 베이지안 동적게임을 의사결정 모형으로 활용하였고, 여기서 고려해야 할 제반 사항들을 고찰하였다.

게임의 해를 구하기 위한 모형에서 나타나는 재귀구조는 게임의 가능해 영역을 복잡하게 만들며, 효용으로 표현된 이득행렬의 해석이 아주 다양할 수 있다. 효용의 엄밀한 표현은 사실상 불가능한 것으로 분석을 위해 단계적 구분이 필요하다. 협상안이나 위협점을 선정하는 방식이 추론의 행태에 관련된 것이면 게임의 해를 구하는 것이 점점 더 어려워지게 되며 현실적인 대응책이 필요하게 된다. 따라서 합리적이라고 판단할 수 있는 추론의 행태가 다양하게 존재할 수 있으며, 개인의 주관을 합리적 분석도구로서 활용하는 베이지안의 견해를 적극 수용하는 것이 현실 상황에 더욱 다가서는 의사결정 지침이 된다는 것을 보였다.

베이지안 동적 게임에서 고려해야할 사항은 크게 관측 데이타에 대한 해석의 다양성과 그 통합의 문제로 대별할 수 있으며, 이는 사전확률의 임의성, 게임 참가자들의 추론성향과 위험성향에 따른 효용함수의 변화 때문에 발생한다. 따라서 본 논문에서는 상대방의 추론 및 위험성향을 제고할 수 있는 해석적 틀을 마련하려고 하였다. 게임의 참가자들이 서로의 전략에 대해 학습하는 경우 묵시적 타협 전략을 취할 수 있게 되며, 이는 게임해의 향상을 가져온다는 것을 고찰하였다. 참가자들의 추론 및 위험성향에 따른 해의 변화는 엄밀하게 정의된 동일차원의 효용부과가 불가능하다는 것을 단적으로 설명하는 것으로, 효용에 대한 몇 가지 공리의 변화가 새로운 해의 개념도 가져올 수 있음을 고찰하였다.

향상된 게임값을 기대할 수 있도록 만드는 몇 가지 조건에는 다음과 같은 것들이 포함된다. 첫째, 게임에 임한 상대방의 추론성향 및 위험성향에 대해 충분히 학습할 수 있는 동적 게임체계가 요구된다. 둘째, 상대방 역시 이와 비슷한 습숙체계를 가지고 있어야 한다. 셋째, 게임의 참가자들은 암묵적 협상에 의한 평형점을 기대하고 이에 순응하는 전략을 구사할 수 있을 정도로 충분히 현명해야 한다. 넷째, 혼합전략으로 구성된 상대의 전략이 실제로 시행된 경우 관측은 단일 전략에 대해서만 이루어지고, 차기의 게임진행에서는 이득행렬이 바뀔 수 있기 때문에, 이에 대응하여 게임상황을 원래형태와 비슷한 모형으로 전환시킬 수 있는 전략의 활용도 있어야 한다.

참 고 문 헌

[1] 김성회, 정병호, 김재경, 「의사결정분석 및 응용」, 영지문화사, 1994
[2] 김종호, 「마르코프 체인」, 동국대학교 출판부, 1987
[3] 박송택, 「완전한 협상」, 중앙일보사, 1994

[4] 박순달, 「게임이론」, 민영사, 1982

[5] 細江守紀, 「不確實性と情報の經濟分析」, 九州大學出版會, 1987

[6] Ackoff, R. L., ***The Art of Problem Solving - Accompanied by Ackoff's Fables***, John Wiley & Sons, New York, 1978

[7] Dame, E. E. C. van, "History-dependent Equilibrium Points in Dynamic Games", Game Theory and Mathematical Economics, North-Holland Publishing Company(1981), pp.27-38

[8] ________, Refinements of the Nash Equilibrium Concept, Springer-Verlag, 1983

[9] de Finetti, B., "Probability", In : ***International Encyclopedia of the Social Sciences***, Macmillan, New York(1968), pp.496-505

[10] French, S., "Calibration and the Expert Problem", ***Management Science***, Vol.32, No.3, March (1986), pp.315-321

[11] ________, "Conflict of Belief : When Advisers Disagree", In : Bennett, P.G. (Ed), ***Analysing Conflict and its Resolution***, Oxford University Press, 1987

[12] ______, Cooke, R. M. and Wiper, M. P., "The Use of Expert Judgement in Risk Assessment", ***Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications***, Vol.27(1991), pp.36-40

[13] Genest, C. and Wagner, C. , ***Futher Evidence against Independence Preservation in Expert Judgement Synthesis***, 1984

[14] Harsanyi, J. C., "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players", ***Management Science***, Vol. 14, No. 3 (1967), pp.159-182 : Vol. 14, No. 5 (1968), pp.320-334 : Vol. 14, No. 7 (1968), pp.486-502

[15] ________, "Subjective Probability and the Theory of Games :Comments on Kadane and Larkey's Paper", ***Management Science***, Vol.28, No.2, February (1982), pp.120-124

[16] Holtzman, S., ***Intelligent Decision Systems***, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989

[17] Hughes, W. R., "A Note on Consistency in Utility Assesment", ***Decision Sciences***, Vol.21 (1990), pp.882-887

[18] Isaacson, D. L. and Madsen, R. W., ***Markov Chains Theory and Applications***, John Wiley & Sons, New York, 1976

[19] Jones, A., J., ***Game Theory - Mathematical models of conflict***, John Wiley & Sons, 1980

[20] Kadane, J. B. and Larkey, P. D., "Subjective Probability and the Theory of Games", ***Management Science***, Vol.28, No.2, February (1982), pp.113-120

[21] Kalai, E. and Smorodinsky, M., "Other Solutions to Nash's Bargaining Problem", ***Econometrica***, Vol.43 (1975), pp.513-518

[22] Kihlstrom, R. E., Roth, A. E. and Schmeidler, D., "Risk Aversion and Solutions to Nash's Bargaining Problem",

In: Moeschlin, O., and Pallaschke, D., (Eds), ***Game Theory and Mathematical Economics***, North-Holland, Oublishing Company(1981), pp.65-71

[23] Klugman, S. A., ***Bayesian Statistics in Actuarial Science : with Emphasis on Credibility***, Kluwer Academin Publishers, 1992

[24] Kreps, D. M. and Wilson, R., "Sequential Equilibria", ***Econometrica***, Vol.50(1982), pp.863-894

[25] Lichtenstein, S. and Fischoff, B. , "Training for Calibration", ***Organisational Behaviour and Human Performance***, Vol.28 (1980), pp.149-171

[26] Lindley, D. V., "Another Look at an Axiomatic Approach to Expert Resolution", ***Management Science***, Vol.32, No.3, March (1986), pp.303-306

[27] __________, "The 1988 Wald Memorial Lectures : The Present Position in Bayesian Statistics", ***Statistical Science***, Vol. 5, No.1 (1990), pp.44-89

[28] Luce, D. , Raiffa, H. , ***Games and Decisions***, John Wiley and Sons, New York, 1957

[29] Madeder, R., ***Programming in Mathematica***, 2-nd Ed., Addison-Wesley, 1991

[30] Morris, P. A., "An Axiomatic Approach to Expert Resolution", ***Management Science***, Vol.29, No.1, January (1983) pp.24-32

[31] __________, "Observations on Expert Aggregation", ***Management Science***, Vol.32, No.3, March (1986), pp.321-328

[32] Nash, J. F., "The Bargaining Problem" , ***Econometrica***, Vol.28 (1950), pp.155-162

[33] Perles, M. A. and Maschler, M., "The Super-Additive Solution for the Nash Bargaining Game", ***Report No.1/80, The Institute for Advanced Studies***, The Hebrew University of Jerusalem, 1980

[34] Pratt, J. W., "Risk Aversion in the Small and in The Large", ***Econometrica***, Vol.32 (1964), pp.122-136

[35] Roth, A. E., ***Axiomatic Models of Bargaining***, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No.170, Springer-Verlag, 1979

[36] Rubinstein, A., "Choice of Conjectures in a Bargaining Game with Incomplete Information", In: Roth, A.E., ***Game-theoretic models of Bargaining***, Cambridge University Press (1985), pp.99-114

[37] Rubinstein, A., "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model", ***Econometrica***, Vol.50, 1982, pp.97-109

[38] Savage, L. J. , ***The Foundations of Statistics***, John Wiley & Sons, New York, 1954

[39] Schervish, M. J. , "Comments on Some Axioms for Combining Expert Judgements", ***Management Science***, Vol.32, No.3, March (1986), pp.306-312

[40] Selton, R., "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games",

International Journal of Game Theory, Vol.4, (1975), pp.25-55

[41]. Thie, P. R., ***An Introduction to Linear Programming and Game Theory***, John Wiley & Sons, New York, 1979

[42] von Neumann, J. and Morgenstern, O., ***Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press***, Princeton, 1944

[43] Winkler, R. L., "***Expert Resolution***", ***Management Science***, Vol.32, No.3, March (1986), pp.298-303

[44] ________, "Decision Modeling and Rational Choice: AHP and Utility Theory", ***Management Science***, Vol.36, No.3, March (1990), pp.247-248

[45] ________, "Research Directions in Decision Making Under Uncertainty" , ***Decision Sciences***, Vol.13 (1982), pp.517-533

[46] Wolfram, S., ***Mathematica - A System for Doing Mathematics by Computer***, Second Edition, Addison-Wesley, 1991