韓國經營科學會誌
第22卷 第3號
1997年 9月

유효 절단 부등식을 이용한 오목함수 0-1배낭제약식 문제의 해법

오세호

A Concave Function Minimization Algorithm Under 0-1 Knapsack Constraint using Strong Valid Inequalities

Seho Oh*

Abstract

The aim of this paper is to develop the B & B type algorithms for globally minimizing concave function under 0-1 knapsack constraint. The linear convex envelope underestimating the concave object function is introduced for the bounding operations which locate the vertices of the solution set. And the simplex containing the solution set is sequentially partitioned into the subsimplices over which the convex envelopes are calculated in the candidate problems.

The adoption of cutting plane method enhances the efficiency of the algorithm. These mean valid inequalities with respect to the integer solution which eliminate the nonintegral points before the bounding operation. The implementations are effectively concretized in connection with the branching strategys.

1. 서 론

본 연구에서는 아래와 같이 0-1 배낭 제약식을 갖는 오목함수 최소화 문제에 대한 해법을 제시하고자 한다.

(CKP)

$$\min f(x) \tag{1}$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \ (a_i : \text{positive}) \tag{2}$$

$$x_i = 1 \text{ or } 0 \quad i = 1, \cdots, n \tag{3}$$

* 청주대학교 산업공학과

$f(x)$: 오목함수

고전적인 0-1 배낭 문제가 NP-complete 이므로 (CKP)도 이 범주에 속하는 문제임이 자명하다. Tuy[19]가 처음으로 오목함수 최소화 문제를 제기한 이후, 새로운 모형과 해법들이 개발되어 왔는데 부분 최적화 기법으로 다룰수 없는 전체 최적화 문제인 바 효율적인 해법을 찾기가 어렵지만 고정비용 문제, 분해할당 문제, 몇몇 물류 시스템등 중요한 수리모형들이 오목함수 최소화 문제로 모형화 되어 이에 대한 연구가 요구된다. More,J. & Vavasis,S.A[16]는 f가 완전 오목(strictly concave)이면서 분해가능 2차 함수(separable quadratic)인 문제에서 부분 최적해를 O(nlogn)안에 판별할 수 있는 해법을 제시하였고 Pardalos, P.M & Kovddr, N[18]는 목적함수를 부분 선형 함수로 근사시켜 근사 해법을 개발하였다. Kalantari & Bagchi[13]는 2차 오목함수 0-1 최소화 문제를 2차 오목함수 최소화문제로 변환하여 변수의 값을 0 혹은 1로 고정시킴으로써 만들어지는 부문제들을 Kalantari & Rosen[14]의 해법에 적용시키는 방법을 개발하였다. Benson & Erenguc[4]은 일반적인 오목함수 정수계획 모형에 대한 최적해법을 제시하였다.

일반적으로 목적함수식이 1차식이 아닌 수리계획 문제의 경우에는 비선형문제로 분류되어 선형제약식을 갖는 문제라하더라도 정점을 찾아가는 방식의 해법은 무의미하다. 최적해가 선형계획문제처럼 정점에서 발견되지 않기 때문이다. 그러나 (CKP)와 같이 목적함수가 비선형 목적함수에 속하지만 오목이면 최적해가 정점에서 구해진다.

오목함수 최소화 문제에 대한 B & B 형태의 선형 제약식을 갖는 오목함수들은 이러한 특성을 이용하여 한계 연산 방법을 구성하고 있다. 즉 해집합의 정점들이 발견될 수 있도록 1차식을 도입하여 목적함수 값의 상한 혹은 하한 값을 계산하게 된다.

본 연구에서 개발하고자 하는 해법은 다음과 같은 절차를 따른다.

첫째, 정수 조건을 완화시켜 전술한 오목함수 최소화 문제의 정점 추적 방식이 되도록 한다.

둘째, 완화된 제약식의 해집합상에서 원목적함수를 하한 추정하는 유일한 1차식을 구하기 위해 이 해집합을 포함시키는 단체를 잡는다.

세째, 정수점을 제외시키지 않는 범위내에서 단체의 크기를 줄일수록 하한 추정값을 개선시킬 수가 있기 때문에 유효 절단 부등식을 도입하여 단체의 크기를 줄이는 방법을 모색한다.

끝으로 하한 추정값을 구하고 분지변수를 선택하여 0 혹은 1로 고정시킨다. 이렇게 함으로써 각각의 부문제들은 2개의 부문제들을 생성시키게 된다.

Ⅱ. 부문제 생성

2-1 정수조건을 완화시킨 문제

식 (3)을 식(6)로 완화시킨 문제를 (RCKP)라고 하자.

(RCKP)

$$\min f(x) \tag{4}$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \quad (a_i : \text{positive}) \tag{5}$$

$$0 \le x_i \le 1, \quad i=1,\cdots,n \tag{6}$$

$f(x)$: 오목함수

(RCKP)의 해집합은 볼록다면체이므로 다면체의 정점들 중의 하나가 (RCKP)의 최적해가 되고 이 점에서의 목적함수 값은 (CKP)의 최적목적함수 값의 하한 추정값이 된다. 이 값은 단지 하나의 하한 추정값으로의 의미밖에 없기 때문에 식 (4)을 부문제의 목적함수 식으로 사용하여 하나의 추정치를 계산하기 위해 많은 계산을 수행하는 것은 비효율적이다. 그러므로 하한 추정함수로서의 의미를 갖되 적은 계산으로도 다면체의 정점을 발견할 수 있도록 하는 1차식 하한 추정함수를 고려하게 된다.

2-2 하한 추정함수의 도입

전술한 것처럼 선형식을 하한추정함수로 하는 방법들이 시도되었는데 보다 적은 계산량으로 선형식을 유일하게 고정시키는 방법이 해법개발에 있어 주안점이 된다.

또한, 가능하면 원 목적함수에 근접한 함수를 찾는 것이 유리할 것이다.

실제 (RCKP)처럼 해집합이 볼록 유계다면체(convex polytope)이면 강력한 하한 추정함수로 볼록 덮개 함수(convex envelope)를 생각해 볼 수 있다. 이것은 볼록 유계 다면체 상에서 목적함수에 가장 가깝게 접근된 볼록 함수이다. [2]

<u>정의 2.1</u>: 다음을 만족시키는 함수 $\boldsymbol{\Gamma}(x)$ 를 볼록 유계 다면체 $\boldsymbol{P}$상에서 함수 f의 볼록 덮개 함수(convex envelope)라고 한다.

(i) $\boldsymbol{\Gamma}(x)$와 $g(x)$는 볼록 유계 다면체 $\boldsymbol{P}$ 상에서 볼록이다.

(ii) $\boldsymbol{\Gamma}(x) \le f(x),\ \forall\ x \in \boldsymbol{P}$

(iii) $g(x) \le \boldsymbol{\Gamma}(x),\ \forall\ x \in \boldsymbol{P}$이 성립한다.

특히 n차원 공간에서 $(n+1)$개의 점독립 (affinely indenpendent)인 점들, $\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_n$로 주어진 n차원 단체상에서는 선형방정식(PL)을 풀어 1차식인 볼록덮개함수를 얻을 수 있다. [3]

(PL)

$$\omega\nu_i + \gamma = f(\nu_i),\ i = 0, 1, \cdots, n$$
$$\omega,\ \nu_i \in R^n,\ \gamma \in R$$

벡터 ω 와 γ 를 구하게 되면 볼록덮개함수는 아래와 같다.

$$\Gamma(x) = \omega x + \gamma$$

부문제 연산과정에서 이러한 사실을 이용하기 위해 부문제의 해집합을 포함하는 단체를 점독립인 점들로 찾아낸다.

(CKP)의 해법은 정수 제약식을 해결해야 하기 때문에 일반적인 정수계획문제 해법에서와 같이 분지변수를 선택하여 0 혹은 1로 고정시킴으로써 부문제를 생성시키고자 한다.

(5) 경계식이 각 좌표축과 만나는 점과 원점에 의해 만들어지는 n-차원 단체를 시작으로 부문제의 한계연산후에 분지변수를 선택하여 0과 1로 고정시키면 1차원이 줄어든 단체를 쉽게 얻을 수 있다. 이러한 방법은 생성된 부문제에서 1차식인 하한 추정함수를 만들기 위한 별도의 단체 분할이 필요가 없게 한다.

다음의 정리들이 이러한 사실을 입증한다.

<u>정리 2.1</u>: $\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_n$: 점 독립인 점들 $S = \mathrm{conv}\{\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_n\} \subset R^n$: n-차원 단체 정점 ν_0를 다른 정점들과 분리시키면서 정점들을 포함하지 않는 초 평면을 $\boldsymbol{H}$라고 하자.

$$S_H = \boldsymbol{H} \cap S$$

S_H는 $(n\text{-}1)$-차원 단체이다.

[증명] [1] ■

초평면 H를 임의 변수를 1로 고정시켜 만들면 S_H는 $(n\text{-}1)$차원 단체이거나 한개의 정점이거나 공집합이 된다. 0으로 고정시켜 만든 초평면은 S와 $(n\text{-}1)$차원 단체를 공유한다.

정리 2.2 n-차원 단체 : $S \subset R^n$ $(\Omega \subset S)$

$x_i=0$, $x_i=1$을 만족시키는 초평면을 각각 H_0, H_1이라면 S_0은 $(n\text{-}1)$-차원 단체이고, S_1는 $(n\text{-}1)$-차원 단체이거나 한개의 정점이거나 공집합이다.

$$S_0 = H_0 \cap S,\ S_1 = H_1 \cap S$$

[증명] 초평면 H_1이 a_ie_i를 다른 정점들과 분리시키면 정리 2.1에 의해 S_1은 $(n\text{-}1)$-차원 단체이다. H_1이 a_ie_i를 포함하면 한개의 정점이고 만나지 못하면 공집합이다. S_0는 S를 초평면 H_0 위에 직교투영 시킨집합이므로 $(n\text{-}1)$-차원 단체이다. ■

초평면 H_1, H_0와 단체 S와의 공통집합이 부문제의 단체가 된다. S_0와 S_1은 (RCKP)의 비정수해 정점들의 일부를 포함하고 있지 않기 때문에 부문제가 생성되면서 이러한 점들이 배제된다.

Ⅲ. 해 법

3-1 단체분할

분지변수가 x_j이고 q차원 단체로부터 q-1차원 단체를 생성시키는 경우를 살펴보자. ν_0, ν_1, …, ν_q를 단체의 점독립인 점들이라 하고 ν_0가 초평면 H_1에 의해 분리된다면 ν_0와 다른 점들간의 선분식은 (7)와 같다.

$$t\nu_0+(1-t)\nu_i,\ i=1\cdots n \qquad (7)$$

j번째 성분이 1이 되도록 t를 고정시키면 q개의 점독립인 점들을 얻는다.

3-2 부문제의 선택기준과 해법절차

용어정의

- F_0^N : 부문제 N에서 0으로 고정되어 있는 변수들의 집합
- F_1^N : 부문제 N에서 1로 고정되어 있는 변수들의 집합
- $L.B^N$: 부문제 N에서의 하한값
- $U.B^N$: 부문제 N에서의 상한값
- x^{LP} : 부문제의 최적해
- f^N : N번째 부문제 연산까지 개선된 상한값 (incumbent value)
- Ψ : 단체목록집합

해법

[단계 0] 초기화

N=0

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

위의 선형식이 각 좌표축과 만나는 점과 원점을 정점으로 하는 단체를 초기단체 S^0로 잡아 단체 목록에 등록한다.

$f^0 = f(0)$, $F_1^N = F_0^N = \{\ \}$

[단계 1] 단체 선택

$\Psi = \{\ \}$이면 최적해 발견, f^{N-1}의 값을 주는 해가 최적해 아니면 선택 기준에 의해 Ψ에서 단체 S^N을 선택한다.

[단계 2] 부문제의 목적함수 고정

S^N의 정점을 문제(PL)에 대입하여 볼록덮개 함수를 구한다.

$$\Gamma(x) = \omega\ x + \gamma$$

[단계 3] 분지 변수 선택 및 단체 생성

$x^{LP} = \arg\min \Gamma(\Omega^N)$, $\Omega^N = S^N \cap B$

F_1^N와 F_0^N에 속하지 않은 변수중에서 선택기준에 의해 분지 변수 선택

f^N, $L.B^N$, $U.B^N$을 계산

$f^N \le L.B^N$이면 N=N+1로 놓고 [단계 1]로 간다.

아니면 $S_0^N = S^N \cap \{x \mid x_j = 0\}$

$S_1^N = S^N \cap \{x \mid x_j = 1\}$

S_0^N, S_1^N을 단체목록집합 Ψ에 등록하고 N=N+1로 놓고 [단계 1]로 간다.

Ⅳ. 유효절단 부등식의 도입과 해법의 보완

4-1 유효절단 부등식

해법의 효율성은 볼록덮개함수를 원함수에 얼마나 근접을 시키느냐에 달려있다. 그리고 한계연산이 수행되는 부문제 생성 갯수에 의해 판단된다.

본 절에서는 해법을 보완하는 방안으로 부문제에서 고려되는 단체와 해집합을 가능한 범위까지 축소시키거나, 정수해가 누락되지 않는 한 부문제들의 계산이 용이하도록 단체를 변형시키는 방법을 모색하고자 한다. 이러한 방법들 중의 하나가 (CKP)의 가능해가 누락되지 않는 범위에서 절단제약식을 도입하는 방법이다.

<u>정의 4.1:</u> 정수해 관점에서의 유효부등식 (valid inequality w.r.t integer solution)

주어진 다면체 P에 대하여 아래의 식이 성립하면 이 부등식을 유효 부등식이라고 한다.

$$\pi x \le \pi_0, \quad x \in P \cap Z_+^n$$

Z_+^n: n차원 공간에서 각 성분들이 양의 정수인 점들의 집합.

(RCKP)의 해집합을 Ω라면 Ω의 정점은 정수해 정점이거나 한 개의 성분만 분수인 비 정수해 정점이 된다.

$$B = \{x \mid 0 \le x_i \le 1, i = 1, \cdots, n\}$$
$$x^c = \arg\max h(\Omega)$$
$$h(x) = e^T x$$

x^c의 분수 성분을 0으로 고정시켜 만든 점을 x^*라 할 때 식 $e^T x \le e^T x^*$은 정수해 관점에서의 유효 부등식이다.

1차식이 입방체 B를 깊게 잘라내더라도 부문제가 정의된 공간의 차원은 동일하기 때문에 볼록덮개함수를 구하기 위해 풀어야하는 연립 일차방정식의 크기는 근본적으로 달라지지 않는다.

그러나, $e^T x^* \le n-1$의 경우에는 몇개의 변수를 잡아 0으로 고정시키면 부문제의 크기를 줄

일 수 있다.

따라서, 부등식 (8)을 도입하면 정수해가 아닌 부문제의 해집합 일부를 잘라내는 효과를 얻게 된다.

$$e^T x \le e^T x^* \qquad (8)$$

이러한 유효 부등식을 이용함으로써 각각의 부문제에서 좀더 개선된 상.하한값을 구할 수 있다. 또한 분지변수를 0혹은 1로 고정시키는 작업을 (9)과 (10)에 동시에 적용시키면 1차 제약식이 중복적(redundent)인 경우가 발생한다.

$$x \mid \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b,\ \ x \ge 0\{\} \qquad (9)$$

$$\{ x \mid e^T x \le e^T x^*,\ \ x \ge 0\} \qquad (10)$$

즉, 식(10)이 식(9)에 포함되는데 식(8)은 유효 부등식이고 1차 제약식을 중복적으로 만들기 때문에 1차 제약식과 대체될 수 있다. 이렇게 되면 식(10)위에서 볼록덮개함수를 구하게 되므로 계산이 용이하고 좀더 개선된 한계값을 얻게 된다.

지금까지 고찰한 내용을 토대로 부문제에서 식(10)과 식(11)에 의해 만들어지는 단체간의 관계를 생각해 보자.

$$P_= = \{ x \mid \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b\} \cap \mathrm{B}$$

$$x^{\min} = \arg\min h(P_=)$$

라 놓자.

$$e^T x^{\min} \ge \mathrm{n}\text{-}1 \qquad (11)$$

이면 $e^T x \le n-1$은 가능해가 아닌 입방체의 정점을 포함시키지 않는 절단 부등식이므로 부문제의 해집합의 일부를 잘라낸다.

e^Txmin과 $e^T x^*$ 값에 따라 절단 부등식을 어떻게 도입하고 볼록덮개함수는 어떻게 구하는지 다음과 같이 4가지 경우로 나누어 살펴 보자.

[경우 1] $e^T x^* = n$
[경우 2] $e^T x^* = n\text{-}1$ 이고 $e^T x^{\min} \ge n\text{-}1$
[경우 3] $e^T x^* = n\text{-}1$ 이고 $e^T x^{\min} \langle n\text{-}1$
[경우 4] $e^T x^* \le n\text{-}2$

$e^T x^*$=n 일 때 아래의 식은 (RCKP)의 해집합 상에서 정수해 관점에서의 유효 부등식이다.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (12)$$

아래의 포함 관계가 성립되지 않기 때문에 하한값을 개선시킨다는 보장을 할 수 없다.

$$\{ x \mid e^T x \le e^T x^* \}$$
$$\supseteq \{ x \mid \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \}$$

하지만, 단체의 모든 정점들이 정수의 성분을 갖고 있는 점을 이용하면 볼록덮개함수를 계산하기가 쉽고 아래로 세분되는 부문제에서는 똑같은 형태의 단체가 만들어지므로 부문제는 만들기가 용이해진다. 따라서 $e^T x^*$=n가 성립하면 단체를 결정하는 2가지 개선책으로 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$ 를 다음의 식들로 대체시킨다.

$$\mathrm{E1}: \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\mathrm{E2}: \quad e^T x \le n$$

두 번째의 경우로 $e^T x^*$=n-1 이고 $e^T x^{\min} \ge$

n-1 일때를 살펴보자.

$$S^1=\{x \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i - a_q\} \cap R^n_+ \quad (13)$$

$$S^2=\{x \mid e^T x \le n-1\} \cap R^n_+ \quad (14)$$

R^n_+ : n차원 공간에서 각 성분들이 실수인 점들의 집합.

Γ_1, Γ_2를 각각 S^1, S^2 상에서 구한 오목함수 f의 볼록덮개함수라면 다음 식들이 성립한다.

$$\min \Gamma_1(S^2 \cap B) \le \min \Gamma_1(S^1 \cap B),$$
$$\min \Gamma_2(S^2 \cap B) \le \min \Gamma_2(S^1 \cap B)$$

따라서 1차 제약식 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$ 를 제거시키고 $e^T x^* \le$n-1을 제약식으로 사용하면 목적함수값과 부문제의 목적함수 값과의 오차를 줄일 수 있다. S^1, S^2 상에서 구한 볼록덮개함수 간의 우열을 가릴 수는 없다고 해도 (PL)계산과 차후에 현재의 부문제로부터 파생되는 부문제를 고려할 때 단체를 S^2로 잡는 것이 유리할 것이다.

2차원상에서 간단한 예를 들어보면 [그림 1]과 같다.

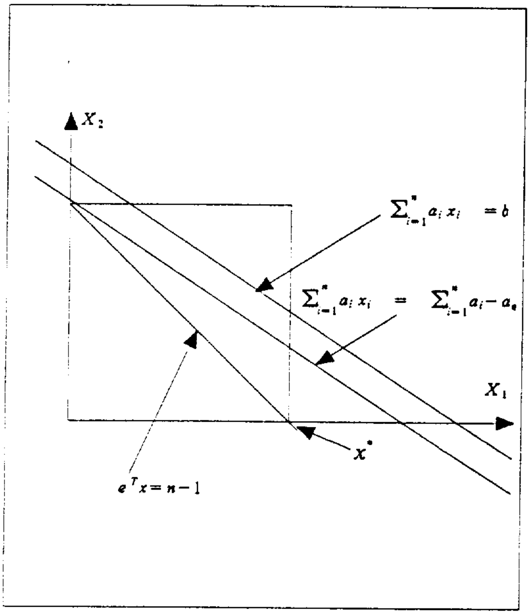
$e^T x^*$=n-1 이고 $e^T x^{\min}$<n-1인 [경우3]에서는 볼록덮개함수를 구하기 위해 필요한 단체를 다음과 같이 3가지로 잡을 수 있다.

$$\{x \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b\} \cap R^n_+ \quad (15)$$

$$\{x \mid e^T x \le n-1\} \cap R^n_+ \quad (16)$$

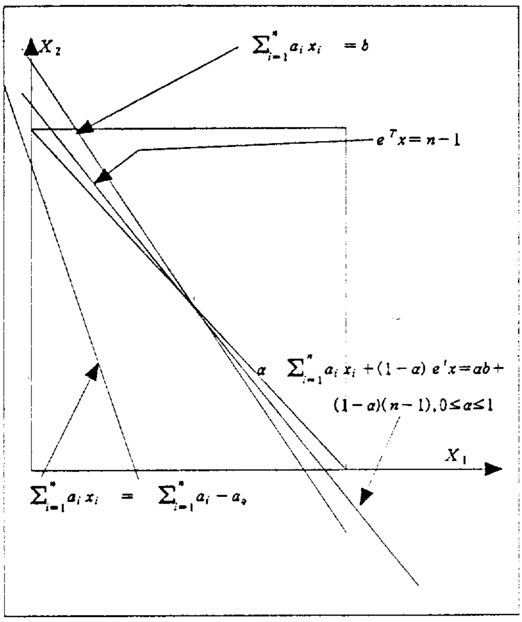
$$\{x \mid \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + (1-\alpha) e^T x \le \alpha b + (1-\alpha)(n-1),\ 0 \le \alpha \le 1\} \cap R^n_+ \quad (17)$$

각각을 그림으로 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 1] 경우 2에서 식(13)과 (14)을 이용하여 단체를 잡는 방법

(17)은 원점과 초평면 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ 이 각 좌표축과 만나는 점을 정점으로 하는 다면체이고 (16)은 원점과 새로운 초평면 $e^T x$ =n-1이 각 좌표축과 만나는 점을 정점으로 하는 다면체이다. (17)은 위의 두 제약식을 볼록조합하여 만든 것이다. 위의 3가지 단체를 결정짓는 부등식들은 R^n_+상에서 서로를 지배하지 않기 때문에 각각의 단체에서 구한 볼록덮개함수 간의 우열을 따질 수가 없다.



[그림 2] 경우 3에서 식(15), (16), (17)을 이용하여 단체를 잡는 방법

4-2 유효절단 부등식을 도입한 해법

4-2-1 볼록덮개함수 결정을 위한 단체 선택과 부문제 해집합 축소

앞 절의 결과를 바탕으로 3장의 해법을 보완하고자 한다. 본 절의 해법은 부문제의 목적함수를 어떤 단체상에서 구할 것인지 결정하고 부문제의 해집합을 축소시키는 과정을 포함한다. 이 과정에서 첫째 경우가 나타나면 식 E1 이나 식 E2를 사용하여 단체를 결정한다. 선택된 분지변수를 0과 1로 고정시켰을 때 생성되는 부문제의 단체들은 각각의 식에서 우변상수에다 분지 변수 계수를 빼주면 결정된다. 둘째 경우가 나타나면 식(18)이나 식(19)를 이용하여 볼록덮개함수를 구하고 식(19)를 제약식으로 삼는다.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i - a_q \quad (18)$$

$$e^T x \le n-1 \quad (19)$$

식(19)를 이용하면 많은 정수해가 볼록덮개함수가 구해지는 다면체의 면 상에 나타나기 때문에 한계값들을 개선시킬 수 있을 것이다. 또한 부문제의 최적해가 정수해일 가능성이 높아지므로 최적해가 발견될 확률이 커진다고 볼 수 있다. 다음에 생성되는 부문제는 분지변수를 0으로 고정시키면 경우 1이 되고 1로 고정시키면 다시 똑같은 경우가 됨을 알 수 있다. 세째 경우에서는 앞 절에서 제시된 3가지 방법으로 볼록덮개함수를 구한다. 그리고 식(19)를 제약식으로 첨가시킨다. 다음에 생성되는 부문제에서는 어떤 분지 변수가 선택되느냐에 따라 각 경우가 나타날 수 있다. 마지막 경우에서는 가능성(feasibility)을 만족시키는 범위까지 분지변수를 선택하여 고정시킴으로써 선택된 분지변수 갯수만큼 정의역 공간을 줄인다.

<u>단체 선택 기준</u>

1. 1차 제약식이 유효 부등식인 범위까지 평행 이동시켜 만들어지는 단체 선택
2. 새로 도입된 절단 제약식으로 만들어지는 단체 선택
3. 위의 두식의 볼록조합으로 만들어지는 단체 선택

4-2-2 해법의 보완과 수치예제

본절에서는 볼록 덮개함수 고정을 위한 단체 선택과 부문제 해집합의 축소 절차를 알아보고 간단한 예제를 통해 앞장에서 제시된 해법의 경

우와 비교해 보고자 한다.

용어 정의

f^N : 단체 S^N에서 고정되어 있지 않는 변수

F^N : 단체 S^N에서 1로 고정되어 있는 변수들의 집합

해법

[단계 1] 단체 목록에서 단체 S^N를 선택 한다.

$q = \dim(S^N)$

[단계 2] $x^{min} = \arg\min h(P^N)$

$x^{max} = \arg\max h(P^N)$

$h(x) = e^T x \quad (e, x \in R^q)$

$P^N =$

$\{x \in R^q \mid \sum_{i \in f^N} a_i x_i \le b'\} \cap B^N$

$B^N = \{x \in R^q \mid 0 \le x_i \le 1, \ i \in f^N\}$

$b' = b - \sum_{i \in F^N} a_i$

x^{max}의 분수인 성분을 0으로 고정시켜 만든점을 x^*라 하자.

$e^T x^* = q$이면 [단계 3]으로,

$e^T x^* = q-1$이고

$e^T x^{max} \ge q-1$이면 [단계 4]로,

$e^T x^* = q-1$이고 $e^T x^{max} < q-1$ 이면 [단계 5]로,

$e^T x^* < q-1$이면 [단계 6]로 간다.

[단계 3] 단체를 $S^N = \{x \in R^q \mid e^T x \le q, \ x_i \ge 0, \ i \in f^N\}$

해집합을 $\Omega^N = B^N$ 으로 잡고 [단계 7]로 간다.

[단계 4] 단체를 $S^N = \{x \in R^q \mid e^T x \le q-1, \ x_i \ge 0, \ i \in f^N\}$

해집합을 $\Omega^N = S^N \cap B^N$으로 잡고 [단계 7]로 간다.

[단계 5] 단체를 $S^N = \{x \in R^q \mid e^T x \le q-1, \ x_i \ge 0, \ i \in f^N\}$

혹은, $S^N = \{x \in R^q \mid \sum_{i \in f^N} a_i x_i \le b' \ x_i \ge 0, \ i \in f^N\}$

해집합을 $\Omega^N = \{x \in R^q \mid e^T x \le q-1, \ \sum_{i \in f^N} a_i x_i \le b'\} \cap B^N$ 으로 잡고 [단계 7]로 간다.

[단계 6] (n-q-1)개의 변수를 선택하여 가능성 (feasibility)이 유지될때 까지 1과 0으로 고정시켜 2개의 단체를 만들어 단체 집합에 넣고 [단계 1]로 간다.

[단계 7] S^N, Ω^N을 결정한다.

수치예제

$Min \ f(x) = x_1 + x_2 + x_3$

$$-\frac{1}{2}(x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3)$$

s.t $4x_1+3x_2+9x_3 \le 12$

$x_i = 0$ or 1, $i = 1, 2, 3$

<u>1 회</u>

S° : (0, 0, 0), (3, 0, 0),
(0, 4, 0), (0, 0, 2)

x^{min} = (1, 2/3, 1)

x^{max} = (1, 1, 5/6)

x^* = (1, 1, 0)

$\Gamma(x) = -2x_2 - x_3$

x^{LP} = (0, 1, 1)

분지변수 : x_2

$L.B$ = -3, $U.B$ = -5/2

S_0 : (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 0, 2)

S_1 : (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)

<u>2 회</u>

S_0 선택

$x^{min} = x^{max} = x^*$ = (1, 0, 1)

$\Gamma(x) = -x_3$

x^{LP} = (0, 0, 1)

분지변수 : x_2

$L.B^2$ = -1

분지 끝

<u>3 회</u>

S_1 선택

$x^{min} = x^{max} = x^*$ = (1, 1, 0)

$\Gamma(x) = \frac{3}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_3 - 1$

x^{LP} = (0, 1, 1)

분지변수 : x_3

$L.B^3$ = -5/2

f^* = -5/2

최적해 발견

앞장에서 제시된 방법대로 단체를 선택하여 부문제의 볼록 덮개 함수를 구하면 5회 계산후에 최적해가 발견이 된다.

V. 결 론

본 연구에서 제시된 해법은 오목함수 최소화 기법을 기초로 한계전략을 구체화하고 정수계획 문제의 해법에서 주로 채택하고 있는 분지변수 0-1 고정방법으로 부문제를 생성시킨다.

또한 절단 부등식을 도입하여 완화시킨 부문제의 비정수해를 잘라냄으로써 해법의 효율성을 높이고자 하였다. 수정된 부문제의 해집합의 정점이 가능한한 정수해가 되도록하였기 때문에 부문제의 해가 정수해일 가능성이 커져 상한값이 개선됨은 물론 다음에 고려되는 부문제에서 분지끝이 보다 일찍 일어날 수 있다.

1차 제약식을 정수해가 드러나도록 움직여줄 수 있다면 보다 강력한 절단 부등식의 도입을 의미하는데 이전 경우에는 부문제의 단체와 해집합이 동시에 수정되므로 한계 연산의 효율이 훨씬 높아진다.

앞으로 이러한 절단 부등식에 대한 연구가 요

구된다.

참 고 문 헌

[1] 오세호, 정성진, "0-1 배낭 제약식을 갖는 오목함수 최소화 문제의 해법". 대한산업공학회지 19. 3-13(1993).

[2] Benson, H. P., "A finite Algorithm for Concave Minimization over a Polyhedron-." ***Naval Research Logistics Quarterly*** 32. 165-177(1985).

[3] Benson, H. P., "Deterministic Algorithms for Constrained Concave Minimization : A Unified Critical Survey," ***Naval Research Logistics Quarterly*** 43, 756-795(1996)

[4] Benson, H. P. and Erenguc, S.S., "A finite Algorithm for Concave Minimization over a Polyhedron," ***Naval Research Logistics Quartely*** 37, 515-525(1990).

[5] Falk, J. E. and Hoffman, K L., "A Successive Underestimation Methods for Concave Minimization Problems," ***Math. Oper.Res.*** 1, 251-259(1976).

[6] Falk, J. E. and Hoffman, K L., "Concave Minimization via Collapsing Polytopes," ***Oper. Res.*** 34, 919-929(1986).

[7] Falk, J. E. and Soland, R. M., "An Algorithm for Solving Separable Nonconvex Programming," ***Management Sci.*** 15, 550-569(1969).

[8] Hoffman, K.L., "A Method for Globally Minimizing Concave Functions over Convex Sets," ***Math. Programming*** 20, 22-32(1981).

[9] Horst, R., "A General Class of Branch-and-Bound Methods in Global Optimization with Some New Approaches for Concave Minimization" ***J. Optim. Theory Appl.*** 51, 271-291(1986).

[10] Horst, R. and Thoai, N.V., "Branch-and-Bound Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations and Inequaltites," ***J. Optim. Theory Appl.*** 58, 139-146(1988).

[11] Horst, R., Thoai, N.V., and de Vries, J., "On Finding the New Verices and Redundant Constraints in Cutting Plane Algorithms for Global Optimization," ***Operations Research Letters*** 7, 85-90(1988).

[12] Kalantari, B., "Quadratic Functions with Exponential Number of Local Maxima," ***Operations Research Letters*** 5, 47-49(1986).

[13] Kalantari, B. and Bagchi, A., "An Algorighm for Quadratic Zero-One Programs," ***Naval Research Logisitcs Quarterly*** 37, 527-538(1990).

[14] Kalantari, B. and Rosen, J.B., "Construction of Large-Scale Global Minimum Concave Quadratic Test Problems," ***J. Optim. Theory Appl.*** 48, 303-313(1986).

[15] Mathur, K and] Salkin, H. M, "A Branch and Bound Algorithm for a Class of Nonlinear Knapsack Problem," ***Operations Research Letters*** 2,

155-160(1983).

[16] More, J. J. and Vavasis, S.A., "On the solution of concave knapsack Problem," ***Math. Prog.*** 49, 397-411(1991).

[17] Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A., "Integer and Combinatorial Optimzation", Wiley(1988).

[18] Pardalos, P. M. and Kovddr, N., "An Algorithm for a Singly Constrained Class of Quadratic Programs Subject to upper and lower Bounds," ***Math. Prog.*** 46, 321-328(1990).

[19] Tuy, H. Concave Programming Under Liner Constraints. Soviet Math. Dokl. 5, 1437-1440(1964).