韓國經營科學會誌
第22卷 第3號
1997年 9月

단순상한 및 확장된 일반상한제약을 갖는 선형배낭문제의 $O(n^2 \log n)$ 해법*

원중연**

An $O(n^2 \log n)$ Algorithm for the Linear Knapsack Problem with SUB and Extended GUB Constraints*

Joong-Yeon Won**

Abstract

We present an extension of the well-known generalized upper bound(GUB) constraint and consider a linear knapsack problem with both the extended GUB constraints and the simple upper bound(SUB) constraints. An efficient algorithm of order $O(n^2 \log n)$ is developed by exploiting structural properties and applying binary search to ordered solution sets, where n is the total number of variables. A numerical example is presented.

1. 서 론

선형계획은 경영과학의 여러 모형들 중에서 가장 사용빈도가 높은 실용적인 모형이다. 현실에서 모형화된 선형계획문제들에는 여러 특수제약구조가 발생하고 있으며, 이들중 빈번히 나타나는 제약에는 잘 알려진 단순상한(simple upper bound)제약 및 일반상한(generalized upper bound) 제약이 있다. 이외에 변수상한제약, 일반 변수상한제약등이 있다.[9,10]

단순상한제약이나 일반상한제약이 있는 선형

* 이 논문은 1997학년도 경기대학교 교내연구비에 의하여 연구되었음.
** 경기대학교 산업공학과

계획문제는 이미 오래전에 각 문제의 특성을 활용한 해법이 보고되었다.[2] 일반상한제약은 선형계획뿐만 아니라 정수계획, 비선형계획등에서 대규모 시스템을 모형화할 때 자주 활용되고 있으며[6] 발생하는 문제영역에 따라 다중선택제약[8], 특수배열제약[5], 상호독립제약[6]으로 불리운다. 최근에는 특히 일반상한제약을 갖는 선형배낭문제[4]에 대해서 그 특성을 활용한 여러 신속한 해법들이 집중적으로 연구된 바 있다.[3,8,12] 일반상한제약은 논문 [1]에서 제한적으로 확장되어 연구되었으며 유연생산시스템 등에서 각 작업들이 여러 기계군에 중복되어 할당되는 상황 등에 활용되고 있다.[11]

본 연구에서는 선형계획을 포함한 일반 수리계획분야와 유연생산계획등에서 유용하게 사용될 수 있는 확장된 일반상한제약을 제시하고 이 확장된 일반상한제약과 더불어 단순상한제약이 함께 발생하는 새로운 제약구조의 선형배낭문제를 고려한다. 이 문제는 기존 관련된 연구들을 포함하는 일반적인 문제로서 이론적 가치가 있을 뿐만 아니라 응용면에서 복잡한 문제를 풀기 위한 代用緩和(surrogate relaxation)문제로서 활용될 수 있다. 확장된 일반상한제약은 우변상수가 취하는 값에 따라 정수 우변의 일반상한제약과 실수 우변의 일반상한제약으로 구분된다.

본 연구에서는 단순상한제약과 더불어 정수 우변의 일반상한제약이 존재하는 선형배낭문제의 신속한 해법에 대해 연구한다. 해법의 개발을 위하여 문제구조에 기인한 특성을 파악하고, 최적해 탐색과정에서 해들에 대한 자료를 순서화시켜 이진탐색법[7]을 응용하므로써, 계산의 효율성을 높인다. 이러한 탐색과정은 최적비율 탐색해법에서 수행되어 최적해를 찾는데 필요한 최소한의 해들을 미리 구하고 이들의 집합을 생성한다. 본 문제의 주 해법에서는 우선 최적비율 탐색해법을 문제에 적용하고, 다음으로 그 결과 얻어지는 해들의 집합으로부터 순차적으로 쉽게 최적해를 결정한다. 개발된 해법의 계산시간은 문제의 각 목적함수, 제약식, 우변상수 계수들 값의 변화에 전혀 영향을 받지 않으며 단지 총 변수의 수 n에 의해 다항식 $O(n^2 \log n)$으로 표현되는 강성의 효율적 계산복잡도를 갖는다.

2. 문제 및 해법

본 연구에서 고려된 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{(P)} \quad \text{Minimize} \quad \Sigma_{j \in S \cup G}\, c_j x_j \qquad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \Sigma_{j \in S \cup G}\, a_j x_j \geq b, \qquad (2)$$

$$\Sigma_{j \in G_i}\, x_j = b_i, \quad i \in I, \qquad (3)$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j \in S \cup G. \qquad (4)$$

여기서 $G = \bigcup_{i \in I} G_i$이고, 집합 S, G_i, $i \in I$, 들은 서로 중복되지 않는다. S는 단순상한제약을 갖는 변수들의 지수집합이며, G_i는 확장된 일반상한제약 (3) 및 (4)에 해당하는 변수들의 지수집합이다. 모든 $c_j > 0$, $a_j > 0$, $b > 0$이며, b_i, $i \in I$,는 $|G_i|$이하인 양의 정수이다. 여기서 $|G_i|$는 집합 G_i의 원소수를 의미한다. 문제 (P)의 확장된 일반상한제약 (3)에서 우변상수 b_i들은 1을 포함한 임의의 정수나 실수값을 취할 수 있다. 우변상수 b_i가 정수값을 갖을 경우 이 확장된 일반상한제약을 정수 우변의 일반상한제약이라 부른다. 정수 우변 b_i가 특별히 1이 될 경우는 단위 우변의 일반상한제약이

되므로 확장된 일반상한제약은 기존 단위 우변의 일반상한제약[2]을 특수한 경우로 포함하고 있는 확장된 제약이다. 확장된 일반상한제약에서 우변상수 b_i가 실수인 경우는 실수 우변의 일반상한제약이라 분류한다.

본 연구에서는 정수 우변의 일반상한제약을 갖는 확장문제 (P)에 대해 효율적인 해법을 개발한다. 문제 (P)의 특수경우에 해당하는 문제들에 대해 여러 연구들이 보고되었다. 문제 (P)에서 모든 우변상수 b_i가 1의 값을 취할 경우 이 문제는 일반상한제약 선형배낭문제[4]가 되며 효율적인 해법으로서 Dyer[3], Pisinger[8], Zemel[12]의 $O(n)$해법이 보고되었다. 문제 (P)에서 $S=\phi$이고 우변상수 b_i가 다중선택의 의미를 갖도록 $1\le b_i \le\sqrt{n_i}$, $i\in I$, 의 정수로 제한된 경우의 문제는 논문 [1]에서 연구되어 $O(b_{\max}n^2)$의 해법이 제시된 바 있다. 여기서 $b_{\max}=\max_{i\in I}\{b_i\}$이다.

문제 (P)의 구조적 특성은 다음과 같다. 우선, 한 기저해가 분수해로 발생한 경우를 고려한다. 기저변수들은 제약식 (2) 및 (3)의 구조적 특성에 의해 집합 S에서 최대로 한 기저변수만이 발생가능하고 분수값을 취할 수 있다. 따라서 기저변수들이 집합 G에서 발생하였을 경우는 어느 한 집합 G_i에 두 기저변수가 존재하게 되므로 제약식 (3) 및 (4)에 의해 이 두 기저변수는 λ 와 1-λ 형태의 분수값을 갖게된다.($0\le\lambda\le1$) 이 특성은 다음 제시할 정리 1에 활용되고 있다.

먼저, 문제 (P)의 각 집합 G_i에 속한 변수들에 대해서 해당지수들이 $j_1<j_2$ 이면 $a_{j_1}\le a_{j_2}$가 성립하도록 변수들을 재배열한다.($i\in I$) 집합 S에 속한 각 변수들 x_j와 집합 G_i에 속한 두 변수 x_{j_1}, x_{j_2} (단, $j_1<j_2$)에 대해 다음과 같은 비율들을 정의한다. 단, $a_{j_1}=a_{j_2}$이면 $\theta\equiv\infty$로 정의한다.

$$\theta_s(j)=c_j/a_j,\ j\in S,\ \ \theta_i(j_1,j_2)=(c_{j_2}-c_{j_1})/(a_{j_2}-a_{j_1}),\ j_1<j_2,\ j_1,j_2\in G_i,\ i\in I.$$

초기해 설정 및 해의 탐색을 위하여 집합 S, G_i, $i\in I$, 들에 각각 대응되는 지수집합 J_s, J_i, $i\in I$, 들을 정의한다. 초기 J_i의 원소로서 집합 G_i에 해당하는 변수들 중 목적함수의 계수 c_j가 가장 작은 b_i개 변수들을 찾아 해당지수들을 선택하고 J_s는 ϕ라 한다. 본 연구에서는 다음과 같이 쉽게 설정가능한 초기해 x^0를 사용하고 b^0를 정의한다.

$$x_j^0=1,\ j\in J_s,\ x_j^0=0,\ j\in S\setminus J_s,$$
$$x_j^0=1,\ j\in J_i,\ x_j^0=0,\ j\in G_i\setminus J_i,\ i\in I,$$
$$b^0=\Sigma_{j\in J_s} a_j+\Sigma_{i\in I}\Sigma_{j\in J_i} a_j.$$

해 x^0에 해당하는 목적함수치 z^0는 문제 (P)의 최적목적치에 대한 하한치가 된다. 해 x^0는 제약식 (3), (4)를 만족시키므로 $b^0\ge b$이면 해 x^0는 최적해가 된다. 그렇지 않으면 초기해 x^0에 다음 정리 1을 반복적용하여 b^0를 증가시키므로써 제약식 (2)가 만족되는 최적해가 구해질 때까지 비가능 정도가 향상된 해들을 연속적으로 구한다. 정리 1은 제약식 (2)의 우변상수 변화에 따라 발생하는 해들의 변화형태를 추적가능케 하며 이에 대한 정보는 지수집합 J_s 및 J_i, $i\in I$, 들에 의해 관리된다.

정리 1 b^0 가 증가하면서 분수해가 발생하는 집합의 지수 q 및 이 해의 목적함수치 증가비율 θ는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta_q = \min[\min_{j \in S \setminus J_s}\{\theta_s(j)\}, \min_{i \in I}\{\min_{j_1 \in J_i} \min_{j_2 \in G_i \setminus J_i,\ j_2 > j_1}\{\theta_i(j_1, j_2)\}\}]$$

(증명) 제약식 (2)의 우변상수가 b^0 일 때 1의 값을 취하고 있는 변수들의 지수집합은 J_s, J_i, $i \in I$, 이다. 1) b^0 가 α만큼 증가할 때 기저변수의 변화가 집합 S에서 발생하면, 증가된 α를 충족시키기 위하여는 현재 0의 값을 갖은 한 변수 x_j가 증가하여 양의 분수값을 갖는 기저변수가 된다. 이외의 현재 1을 취하고 있는 지수집합 J_i, $i \in I$,에는 변동이 없으며 이때 목적함수치의 변화는 다음과 같다.

$$z(b^0 + \alpha) = z(b^0) + \alpha\theta_s(j)$$

따라서 목적함수치가 최소로 증가하는 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\min_{j \in S \setminus J_s}\{\theta_s(j)\} \tag{5}$$

2) b^0 가 α만큼 증가할 때 기저변수의 변화가 임의의 한 집합 G_i에서 발생하면 증가된 α를 충족시키기 위하여 한 지수 $j_1(\in J_i)$에 해당하는 변수 x_{j_1}이 현재의 1에서 감소하여 분수값을 취하고 다른 지수 j_2 ($j_2 \in G_i \setminus J_i$, $j_2 > j_1$)에 해당하는 변수 x_{j_2}가 현재의 0에서 증가하여 분수값을 취하게 된다. 제약식 (2), (3)에서 집합 G_i에 해당한 열벡타로 이루어진 2x2 축소기저행열 B를 정의하면 B는 기저벡타 (x_{j_1}, x_{j_2})에 대응된다. 따라서 α의 변화에 따른 목적함수치의 증가비율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z(b^0 + \alpha) &= z(b^0) + \alpha c_B B^{-1} e_1 \\ &= z(b^0) + \alpha\theta_i(j_1, j_2) \end{aligned}$$

여기서 $c_B = (c_{j_1}, c_{j_2})$, $e_1 = (1, 0)^t$ 이다. 따라서 모든 집합 G_i, $i \in I$, 에 대해서 목적함수치가 최소로 증가하는 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\min_{i \in I}[\min_{j_1 \in J_i} \min_{j_2 \in G_i \setminus J_i,\ j_2 > j_1}\{\theta_i(j_1, j_2)\}] \tag{6}$$

이상의 1) 과 2)는 문제의 제약구조상 동시에 발생될 수 없으므로, 목적함수치가 최소로 증가하는 비율은 식 (5)와 (6)에서 계산된 비율중 더 작은 비율로 결정되고 해당하는 집합이 분수해가 발생하는 집합 q이다. 따라서 정리의 식이 성립된다. ■

정리 1에서 결정된 기저가 최적으로 유지되는 b^0의 추가 증가분은 $q=s$일 경우 a_j가 되고 이때 집합 J_s에는 지수 j가 추가포함된다. $q \in I$일 경우는 $a_{j_2} - a_{j_1}$ 이며 이때 집합 J_q에는 j_1이 탈락되고 j_2가 교체포함된다. 이외의 집합 J_i에는 변동이 없다.

다음의 최적비율 탐색해법은 이미 설정된 초기해가 최적해인지를 판별한다. 최적해이면 과정을 끝내고 아니면 정리 1을 적용하여 최적해가 구해질 때까지 찾아야 하는 최소한의 해들을 미리 탐색하여 구한다. 이때 해들을 직접 찾는 대신 대응되는 기저의 목적함수치 비율들을 탐색하고 이들의 집합인 최적비율목록 L을 생성한다.

최적비율 탐색해법

0. $L \leftarrow \phi$, $J_i \leftarrow \phi$, $CL_i \leftarrow \phi$, $i \in I$.

1. 각 집합 G_i에서 목적함수의 계수 c_j들중 가장 작은 b_i개를 찾고 해당한 지수들의 집합을 J_i라 한다.($i \in I$) 각 집합 J_i의 원소들을 비감소하는 순으로 배열하고 $\bar{b} \leftarrow \Sigma_{i\in I} \Sigma_{j\in J_i} a_j$ 라 놓는다.

2. $\bar{b} \geq b$ 이면 다음과 같은 최적해를 구하고 과정을 끝낸다. $\bar{b} < b$ 이면 단계 3으로 간다.
   $x_j = 1$, $j \in J_i$, $x_j = 0$, $j \in G_i \setminus J_i$, $i \in I$,
   $x_j = 0$, $j \in S$.

3. 각 지수 $j \in S$에 대해서 다음과 같은 비율들을 계산하고 목록 L에 넣는다.
   $\theta_s(j) = c_j / a_j$, $j \in S$.

4. 각 지수 j_1, j_2에 대해 다음과 같은 비율 $\theta_i(j_1, j_2)$를 계산한다.
   $\theta_i(j_1, j_2) = (c_{j_2} - c_{j_1})/(a_{j_2} - a_{j_1})$,
   $j_1 < j_2$, $j_1, j_2 \in G_i$, $i \in I$.
   각 G_i에 대해 계산된 비율들 $\theta_i(j_1, j_2)$를 비감소하는 순으로 해당 후보비율목록 CL_i에 넣는다.($i \in I$)

5. $CL_i \neq \phi$, $i \in I$, 인 CL_i를 선택한다. 모든 $CL_i = \phi$, $i \in I$, 이면 과정을 끝낸다.
   5.1 선택된 목록 CL_i에서 첫 번째 위치한 비율 $\theta_i(j_1, j_2)$를 선택한다.
   $j_1 \in J_i$, $j_2 \notin J_i$이면 $L \leftarrow L \cup \{\theta_i(j_1, j_2)\}$.
   $J_i \leftarrow J_i \setminus \{j_1\} \cup \{j_2\}$라 한다. J_i에 j_1을 삭제하고 j_2를 비감소순으로 추가시킬 때 이진탐색을 사용한다.
   단계 5.2로 간다.
   $j_1 \notin J_i$이거나 $j_1 \in J_i$, $j_2 \in J_i$이면 단계 5.2로 간다.
   5.2 $CL_i \leftarrow CL_i \setminus \{\theta_i(j_1, j_2)\}$이라 한다.
   $CL_i = \phi$ 이면 단계 5로, 아니면 단계 5.1으로 간다.

최적비율 탐색해법은 최적목적치의 하한치를 갖는 초기해로부터 목적함수치가 최소로 증가되는 해들의 비율들을 찾으므로, 단계 4에서 비율들을 후보비율목록 CL_i에 넣을 때 음의 비율들은 고려할 필요가 없다.

정리 2 최적비율 탐색해법의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다.

(증명) 단계 1에서 각 지수집합 J_i를 구하는데 $O(b_i n_i)$, J_i의 각 원소들을 비감소순으로 배열하는데 $O(b_i \log b_i) \leq O(b_i \log n_i)$의 계산이 필요하다. 단, $n_i = |G_i|$이다. 따라서 모든 $i \in I$에 대해 총 $O(b_{\max} n) \leq O(n^2)$이 소요된다. 단계 2는 상수회에 계산된다. 단계 3에서 집합 S에 대한 비율계산에는 최대 $O(n)$이 소요된다. 단계 4에서 각 집합 G_i로부터 비율 계산하는데 최대 $O(n_i^2)$이 소요되고 이를 목록 CL_i에 비감소순으로 넣는데 $O(n_i^2 \log n_i)$가 소요된다. 따라서 모든 집합 G_i, $i \in I$, 에 대해서 총 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 단계 5에서 선택된 비율 $\theta_i(j_1, j_2)$의 j_1 및 j_2가 단계 5.1에서 각각 J_i에 속하는 가를 판단하는 데에는 집합 J_i의 원소들이 이미 크기순으로 배열되었으므로 이진탐색법[7]을 적용하면 $O(\log b_i) \leq O(\log n_i)$의 계산이 소요되며 또한 집합 J_i에

서 j_1을 삭제하고 j_2를 크기순으로 포함시키는데 $O(\log n_i)$가 소요된다. 단계 5.2에서 목록 CL_i의 원소 수는 최대로 $O(n_i^2)$이다. 따라서 최적비율 탐색해법의 주 회전단계인 단계 5.1 및 단계 5.2의 최대 반복계산양은 $O(n_i^2 \log n_i)$이다. 따라서 모든 집합 G_i, $i \in I$,에 대한 단계 5의 최대 반복계산양은 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 이상으로부터 최적비율 탐색해법의 최대계산양은 $O(n^2 \log n)$이 된다. ■

다음의 해법은 최적비율목록 L로부터 우변상수 증가에 따라 발생하는 해들을 순차적으로 찾음으로써 제약식 (2)가 만족되는 최적해를 매우 쉽게 찾고 있다.

해 법

0. $L \leftarrow \phi$, $J_i \leftarrow \phi$, $i \in I \cup \{s\}$.
1. 문제 (P)에 최적비율 탐색해법을 적용하여 목록 L 및 $\bar{b}$를 구하고 L의 모든 비율들을 비감소하는 순으로 재배열한다.
2. 최적비율목록 L로부터 첫 번째 위치한 비율 $\theta_i(j_1, j_2)$ (또는 $\theta_s(j)$)를 선택하고 다음과 같이 $\bar{b}$를 수정한다. $L = \phi$이면 문제 (P)는 비가해이므로 해법과정을 끝낸다.

   $i = s$이면 $\bar{b} \leftarrow \bar{b} + a_j$, $i \in I$이면 $\bar{b} \leftarrow \bar{b} + (a_{j_2} - a_{j_1})$라 한다.
3. $\bar{b} \geq b$이면 다음을 수행하고 단계 4로 간다.

   $i = s$이면 $q \leftarrow s$, $f \leftarrow j$, $\bar{e} \leftarrow \bar{b} - b$, $i \in I$이면 $q \leftarrow i$, $f_1 \leftarrow j_1$, $f_2 \leftarrow j_2$, $\bar{e} \leftarrow \bar{b} - b$ 라 한다.

   $\bar{b} < b$ 이면 다음을 수행하고 단계 2로 간다.

   $i = s$이면 $J_s \leftarrow J_s \cup \{j\}$, $i \in I$이면 $J_i \leftarrow J_i \setminus \{j_1\} \cup \{j_2\}$으로 수정한다.
4. 최적해는 다음과 같다. 해법과정을 끝낸다.

   $q = s$이면 $x_f = (a_f - \bar{e})/a_f$, $x_j = 1$, $j \in J_s$, $x_j = 0$, $j \in S \setminus J_s \setminus \{f\}$, $x_j = 1$, $j \in J_i$, $x_j = 0$, $j \in G_i \setminus J_i$, $i \in I$.

   $q \in I$이면 $x_{f_1} = \bar{e}/(a_{f_2} - a_{f_1})$, $x_{f_2} = (a_{f_2} - a_{f_1} - \bar{e})/(a_{f_2} - a_{f_1})$, f_1, $f_2 \in G_q$, $x_j = 1$, $j \in J_q \setminus \{f_1\}$, $x_j = 0$, $j \in G_q \setminus J_q \setminus \{f_2\}$, $x_j = 1$, $j \in J_i$, $x_j = 0$, $j \in G_i \setminus J_i$, $i \in I \cup \{s\} \setminus \{q\}$.

정리 3 문제 (P)에 대한 해법의 계산 복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다.

(증명) 단계 1에서 목록 L을 구하기 위하여 문제 (P)에 최적비율 탐색해법을 적용하면 정리 2에 의해 계산 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 또한 목록 L의 원소수는 최대 $O(n^2)$이므로 원소들을 크기순으로 배열하는데 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 단계 2, 단계 3, 단계 4는 상수회에 계산이 끝나고 해법의 주 회전단계인 단계 2 및 단계 3의 최대회전수는 $O(n^2)$이다. 따라서 해법은 단계 1에서 $O(n^2 \log n)$, 단계 2 및 단계 3에서 최대 $O(n^2)$의 계산이 필요하므로 최악상황하의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다. ■

3. 수치예제

다음과 같은 문제의 최적해를 구한다.

(P) Minimize $\Sigma_{j\in S\cup G}\ c_j x_j$

subject to $\Sigma_{j\in S\cup G}\ a_j x_j \ge b,$

$\Sigma_{j\in G_i}\ x_j = b_i,\ i\in I=\{1,2\},$

$0\le x_j \le 1,\ j\in S\cup G.$

여기서 $S=\{1,2,3,4,5\}$ $G_1=\{6,7,8,9,10,11\}$, $G_2=\{12,13,14,15,16,17\}$, $b=96$, $b_1=2$, $b_2=2$, 그리고 c_j, a_j 값은 아래의 표와 같다.

문제 (P)에 해법을 적용하면 다음과 같다.

〈1회〉

0. $L\leftarrow\phi,\ J_s\leftarrow\phi,\ J_1\leftarrow\phi,\ J_2\leftarrow\phi.$

1. 문제 (P)에 최적비율 탐색해법을 적용하여 L을 구한다.

(1) $J_1=\{6,7\},\ J_2=\{13,14\}$

$\bar{b}=3+7+5+9=24$

(2) $\bar{b}<b(=96)$이므로 단계 3으로 간다.

(3) $L=\{\theta_s(1)=1/3,\ \theta_s(2)=4/7,$

$\theta_s(3)=2/8,\ \theta_s(4)=1/9,$

$\theta_s(5)=5/10\}$

(4) $CL_1=\{\theta_1(6,8)=1/10,$

$\theta_1(9,10)=1/7,\ \theta_1(6,10)=5/25,$

$\theta_1(6,9)=4/18,\ \theta_1(8,10)=4/15,$

$\theta_1(7,10)=7/21,\ \theta_1(8,9)=3/8,$

$\theta_1(6,11)=10/27,\ \theta_1(7,9)=6/14,$

$\theta_1(7,8)=3/6,\ \theta_1(7,11)=12/23,$

$\theta_1(8,11)=9/17,\ \theta_1(9,11)=6/9,$

$\theta_1(10,11)=5/2\}$

$CL_2=\{\theta_2(12,15)=1/12,$

$\theta_2(12,16)=2/21,\ \theta_2(15,16)=1/9,$

$\theta_2(14,16)=3/15,\ \theta_2(13,16)=5/19,$

$\theta_2(12,17)=9/27,\ \theta_2(14,15)=2/6,$

$\theta_2(13,15)=4/10,\ \theta_2(14,17)=10/21,$

$\theta_2(13,17)=12/25,\ \theta_2(13,14)=2/4,$

$\theta_2(15,17)=8/15,\ \theta_2(16,17)=7/6\}$

(5) CL_1으로부터 L에 추가되는 비율들은 다음과 같다.

$L=L\cup\{\theta_1(6,8),\ \theta_1(8,10),\ \theta_1(7,9),$

$\theta_1(9,11)\}$

CL_2로부터 L에 추가되는 비율들은 다음과 같다.

$L=L\cup\{\theta_2(14,16),\ \theta_2(13,15),$

$\theta_2(15,17)\}$. 이상으로부터 L은 다음과 같이 구해진다.

$L=\{\theta_1(6,8),\ \theta_s(4),\ \theta_2(14,16),\ \theta_s(3),$

$\theta_1(8,10),\ \theta_s(1),\ \theta_2(13,15),$

$\theta_1(7,9),\ \theta_s(5),\ \theta_2(15,17),\ \theta_s(2),$

계수 \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
c_j	1	4	2	1	5	5	3	6	9	10	15	8	5	7	9	10	17
a_j	3	7	8	9	10	3	7	13	21	28	30	3	5	9	15	24	30

$\theta_1(9,11)\}$

2. $\theta_1(6,8)$선택, $\bar{b}=24+10=34$

3. $\bar{b}<b$이므로 $J_1=\{7,8\}$

〈2회〉

2. $\theta_s(4)$선택, $\bar{b}=34+9=43$

3. $\bar{b}<b$이므로 $J_s=\{4\}$

〈3회〉

2. $\theta_2(14,16)$선택, $\bar{b}=43+15=58$

3. $\bar{b}<b$이므로 $J_2=\{13,16\}$

〈4회〉

2. $\theta_s(3)$선택, $\bar{b}=58+8=66$

3. $\bar{b}<b$이므로 $J_s=\{3,4\}$

〈5회〉

2. $\theta_1(8,10)$선택, $\bar{b}=66+15=81$

3. $\bar{b}<b$이므로 $J_1=\{7,10\}$

〈6회〉

2. $\theta_s(1)$선택, $\bar{b}=81+3=84$

3. $\bar{b}<b$이므로 $J_s=\{1,3,4\}$

〈7회〉

2. $\theta_2(13,15)$선택, $\bar{b}=84+10=94$

3. $\bar{b}<b$이므로 $J_2=\{15,16\}$

〈8회〉

2. $\theta_1(7,9)$선택, $\bar{b}=94+14=108$

3. $\bar{b}>b$이므로 $q=1$, $f_1=7$, $f_2=9$,

   $\bar{e}=108-96=12$, 단계 4로 간다.

4. 최적해는 다음과 같다.

   $x_1=x_3=x_4=1$, $x_j=0$, $j\in S\setminus\{1,3,4\}$,

   $x_7=12/14$, $x_9=2/14$, $x_{10}=1$, $x_j=0$,

   $j\in G_1\setminus\{7,9,10\}$,

   $x_{15}=x_{16}=1$, $x_j=0$, $j\in G_2\setminus\{15,16\}$.

4. 결론 및 토의

선형계획으로 모형화된 현실문제들에 빈번히 발생하고 있는 제약형태로써 이미 잘 알려진 일반상한제약[2] 및 단순상한제약이 있다. 본 연구는 선형계획을 포함한 일반 수리계획분야와 유연생산계획[11]등에서 유용하게 쓰일 수 있는 확장된 일반상한제약 형태를 제시하였다. 확장된 일반상한제약은 우변상수가 취하는 값에 따라 정수 우변의 일반상한제약과 실수 우변의 일반상한제약으로 구분된다. 확장된 일반상한제약은 기존 단위 우변의 일반상한제약을 특수한 경우로 포함하는 확장된 제약이다.

본 연구에서는 정수 우변의 일반상한제약과 단순상한제약이 함께 존재하는 선형배낭문제를 고려하여 이에 대한 해법을 개발하였다. 먼저 제시된 최적비율 탐색해법에서는 문제의 구조특성을 활용하여 최적해를 찾는데 필요한 최소한의 모든 해들을 미리 구하고 이들의 집합을 생성한다. 이들 해의 탐색과정에 이진탐색[7]을 응용하므로써 계산의 효율성을 높였다. 다음으로 주 해법에서는 최적비율 탐색해법의 적용결과 얻어지는 해들의 집합으로부터 매우 쉽게 순차적으로 문제의 최적해를 결정하고 있다.

개발된 해법은 최악상황하의 계산단계가 문제의 각 계수들 크기변화에 관계없이 단지 총 변수의 수 n에 의해 $O(n^2\log n)$의 다항식으로 표현되는 강성의 효율적인 해법이다. 따라서 해법의 계산단계는 일반상한제약들의 개수증가나 우변상수값의 증가에 전혀 영향을 받지 않는다.

문제 (P)에서 실수 우변의 일반상한제약이 존재하는 경우는 본 연구에서 제시한 분수특성 및 정리 1이 성립하지 않는다. 실수 우변의 일반상한제약이 존재하는 문제들에 대한 효율적인 해법의 개발이 요망된다.

참 고 문 헌

[1] 원 중연, "일반 다중선택 선형배낭문제의 신속한 해법연구," 「대한산업공학회지」, 제21권, 제4호(1995), pp. 519-527.

[2] Dantzig, G. B. and R. M. Vanslyke, "Generalized Upper Bounding Techniques," *J. Compt. & System Sci.* 1(1967), pp. 213-226.

[3] Dyer, M. E., "An O(n) Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Linear Problem," *Math. Progr.* 29(1984), pp. 57-63.

[4] Glover, F. and D. Klingman, "A O(nlogn) Algorithm for LP Knapsacks with GUB Constraints," *Math. Progr.* 17(1979) pp. 345-361.

[5] Johnson, E. L. and M. W. Padberg, "A Note on the Knapsack Problem with Special Ordered Sets," *Opns. Res. Letters* 1(1981), pp. 18-22.

[6] Johnson, E. L., M. M. Kostreva, and U. H. Suhl, "Solving 0-1 Integer Programming Problems Arising from Large Scale Planning Models," *Opns. Res.* 33(1985), pp. 803-819.

[7] Kronsjo, L. I., *Algorithms: Their Complexity and Efficiency*, Wiley, N.Y., 1979.

[8] Pisinger, D., "A Minimal Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Problem," *European J. Opnl. Res.* 83(1995), pp. 394-410.

[9] Schrage, L., "Implicit Representation of Variable Upper Bounds in Linear Programming," *Math. Progr. Study* 4(1975), pp. 118-132.

[10] Schrage, L., "Implicit Representation of Generalized Variable Upper Bounds in Linear Programming," *Math. Progr.* 14 (1978), pp. 11-20.

[11] Stecke, K. E., "Formulation and Solution of Nonlinear Integer Production Planning Problems for Flexible Manufacturing Systems," *Mangt. Sci.* 29(1983), pp. 273-288.

[12] Zemel, E., "An O(n) Algorithm for the Linear Multiple Choice Knapsack Problem and Related Problems," *Inform. Proc. Letters* 18(1984), pp. 123-128.