

# 재생확률과정에 의한 최적 포장계획 수립에 관한 연구

이호창

## Approximate Solution to Optimal Packing Problem by Renewal Process

Hochang Lee\*

### Abstract

We are concerned with the packing policy which determines the optimal packing of products with variable sizes to minimize the penalty costs for idle space and product splitting. Optimal packing problem is closely related to the optimal packet/record sizing problem in that randomly generated data stream with variable bytes are divided into a unit of packet/record for transmitting or storing. Assuming the product size and the production period are independently determined by renewal process, we can approximate the renewal process and formulate the optimization problem that minimize the expected packing cost for a production period. The problem is divided into two cases according to whether a product is allowed to split or not. Computational results for various distributions will be given to verify the approximation procedure and the resulting optimization problem

## 1. 서론

무작위의 크기로 발생하는 생산물을 동일한 크기의 상자로 포장하는 일은 생산 현장에서 흔히 보게 되는 문제이며 이와 유사한 상황은 통신망의 패킷 교환이나 컴퓨터 기억장치의 레코

드 크기를 정하는 문제 등에서도 일어나게 된다. 생산 현장에서 최적의 포장단위를 결정하여 유휴 공간을 최소화하는 일은 무작위의 크기로 발생하는 전송자료를 담는 패킷의 크기를 정하여 유휴 공간을 줄임으로써 전송효율을 높이는 일과 동일하다. 이와 흡사한 상황은 자료 저장단위인 클러스터(cluster)의 크기를 1024바이트로 정

\* 경희대학교 사회과학대학 경영학부  
이 연구는 1996년도 경희대학교 교비지원에 의한 결과임

한 DOS 운용체계에서도 그 예를 찾아볼 수 있는데 가령 양면 디스켓에 10바이트 내외의 화일을 112개 저장한다면 FAT(file allocation table)의 한계로 인하여 디스켓은 꼭 차버릴 것이며 이때의 디스켓 용량 대비 실제 사용 면적 비율은 0.3%에 불과하다. 이때 만약 클러스터의 크기를 줄이고 FAT의 크기를 늘인다면 디스켓 사용효율은 대폭 향상될 것이다. 더구나 포장문제인 경우에는 생산품의 크기뿐만 아니라 생산 로트 크기도 무작위로 변하기 때문에 로트별로 포장을 하거나 컨테이너를 이용한 트럭적재(trucking loading)인 경우에는 이 두개의 독립적인 확률과정(stochastic process)이 동시에 발생하므로 문제가 더욱 복잡해 진다.

이와 같이 어떤 확률분포에 따라 무작위의 크기로 발생하는 개체들을 일정한 규모로 그룹핑하는 최적포장(optimal packing)문제는 단지 생산 및 컴퓨터 통신분야에만 국한된 문제는 아니며 행정구역의 구분 문제, 유통, 선적 등 물류관리 분야 또는 데이터 집괴(data clustering)문제와 같은 자료관리 분야에도 응용될 수 있는 중요한 문제이다. 패킷 및 레코드 크기 결정문제는 Erickson과 Luss[1], Erickson, Halfin과 Luss[2], Majithia와 Bhar[3,4], Wolman[5] 등에 의하여 제한된 조건하에서 연구된 바 있다.

이 연구는 확률과정에 따라 무작위로 발생되는 다양한 크기의 생산품을 담은 최적 포장단위를 결정하는 최적포장계획(optimal packing policy)을 수립한다. 최적포장문제는 통신네트워크에서 교환되는 패킷크기를 결정하는 패킷크기결정(packet sizing)문제나 컴퓨터 메모리의 레코드 크기를 결정하는 레코드크기결정(record sizing)문제와 매우 밀접히 연결되어 있는 확률 모형문제로서 포장에 포함된 여분의 공간 및 내용물의 분리를 최소화하는 가장 경제적인 포장단위를

결정한다. 생산품의 크기와 생산기간의 길이가 재생확률과정(renewal process)을 통하여 무작위로 독립, 결정된다고 가정하면 이러한 무작위 크기의 개체 발생을 재생확률과정으로 보아 이를 근사화하고 이때 발생하는 유휴공간과 개체의 분리에 따른 벌칙(penalty)비용을 포함한 총비용을 최소화하는 수학적 모형을 수립할 수 있다. 즉 이 모형의 분석을 통하여 임의의 확률분포에 따라 발생하는 개체의 최적 그룹핑단위를 결정하게 된다.

연구방법으로 볼 때 이 연구는 확률과정을 근사화하여 이로부터 확정적(deterministic) 최적화 모형을 도출하고 최적해의 타당성을 시뮬레이션을 통하여 검증하는 방식을 택하며 분석 도구면으로 보면 확률과정론에 기반한 이론적 근사기법이 이용된다. 문제는 두 가지로 나뉘어 지는데 하나는 생산품의 분리가 허용되지 않는 경우이고 다른 하나는 분리가 허용되는 경우이다. 다양한 확률분포에 따른 시뮬레이션 계산결과를 통하여 최적화 모형과 최적해의 타당성이 검토된다.

## 2. 문제와 변수의 정의

### 2.1 문제의 설정과 가정

제품생산과정 및 포장절차의 설정과 가정은 다음과 같다.

- 하나의 생산시스템은 한 종류의 제품을 생산한다
- 주생산주기(production period)는 다수의 소생산주기(production subperiod)로 나뉘어 진다

- 주생산주기에 포함된 소생산주기의 수는 무작위적이다
- 생산되어 나오는 제품의 크기는 무작위적이다
- 소생산주기 동안 만들어지는 제품수는 무작위적이다
- 제품은 생산되어 나오는 순서대로 표준화된 규격 상자에 포장된다
- 서로 다른 소생산주기에 만들어진 제품을 같은 상자에 포장할 수 없다
- 제품을 포장한 규격 상자들은 다시 표준화된 규격의 컨테이너에 담겨진다
- 상자나 컨테이너의 크기는 일정한 범위로 한정된다
- 상자는 생산제품보다 충분히 크다

문제는 하나의 생산주기내 생산되는 제품을 최소의 비용으로 포장하기 위한 상자와 컨테이너의 크기를 결정하는 것인데 포장시에 유휴 공간을 줄이기 위해 생산된 제품이 임의로 절단될 수 있는가에 따라 두가지의 결정문제로 나뉘어진다. 이러한 최적화 문제는 컴퓨터의 기억장치를 효율적으로 사용하기 위해 디스크 블록과 트랙의 최적 크기를 결정하는 일이나 지면을 경제적으로 할당하기 위해 조판시 줄과 페이지 크기를 결정하는 일과 동일하다.

2.2 변수와 비용의 정의

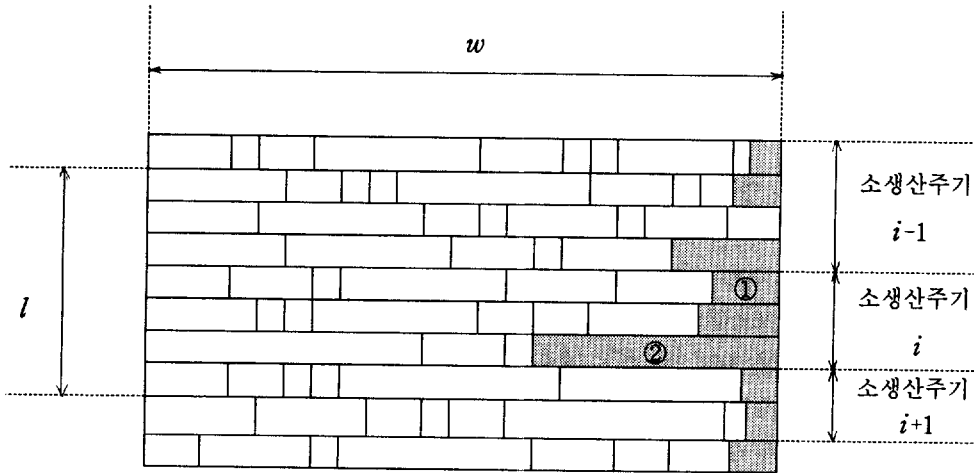
최적화 모형의 정식화 과정에 필요한 각종 변수와 비용을 정의 하면 다음과 같다.

- 포장상자의 고정비용과 가변비용:  
 $G$ /상자당,  $\alpha$ /상자크기

- 컨테이너의 고정비용과 가변비용:  
 $K$ /컨테이너당,  $\beta$ /컨테이너크기
- 유휴공간에 대한 벌칙비용:  $\gamma$ /유휴공간
- 제품절단에 따른 벌칙비용:  $\delta$ /제품분리
- 생산제품의 크기: 분포함수  $F(\cdot)$ 를 갖는 확률변수  $X$   
 $E[X] = \nu_1, Var[X] = \sigma_1^2, E[X^2] = \nu_{12}$
- 소생산주기동안 생산되는 제품의 개수: 확률변수  $Y$   
 $E[Y] = \nu_2, Y \in I_+, \nu_2 \in I_+$
- 주생산주기에 포함된 소생산주기의 개수: 확률변수  $Z$   
 $E[Z] = \nu_3, Z \in I_+, \nu_3 \in I_+$
- 결정변수  
 $l$ : 컨테이너의 크기  
 $w$ : 포장상자의 크기

3. 생산품의 분리가 허용되지 않는 경우

<그림 1>은 제품분리가 허용되지 않는 경우, 임의의 주생산주기내 소생산주기  $i-1, i, i+1$  동안 생산된 제품의 포장 예를 보여준다. 각 블록은 생산품을 나타내며 그 크기는 그림에서 보는 바와 같이 서로 다르다. 물론 <그림 1>은 상품의 포장과정을 개념적으로 표시한 것으로서 반드시 생산품의 모양을 물리적으로 나타낸 것은 아니다. 제품들은 윗줄부터 왼쪽에서 오른쪽으로 생산순서대로 포장되며 칸을 채워나간다. 각 줄은 크기  $w$ 의 포장상자를 말하는데 이는 블록으로 표시된 여러 개의 생산제품을 포장하



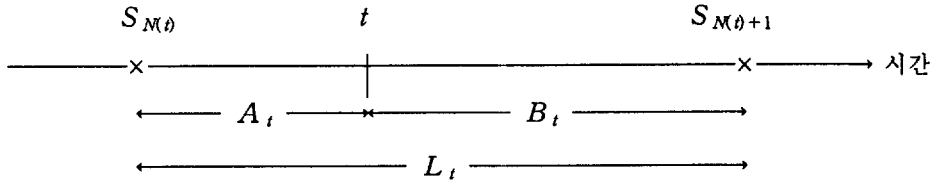
〈그림 1〉 제품분리가 허용되지 않는 경우의 생산제품 포장 예

고 다시 여러 개의 줄이 모여져서 하나의 컨테이너에 포장된다. 각 상자 끝부분의 회색 블록은 상자내의 유희공간을 표시한다. 소생산주기  $i-1, i, i+1$  동안 생산된 제품은 각각 4개, 3개, 2개의 상자에 담겨지며 소생산주기  $i-1$ 의 3번째 상자에는 유희공간이 없음을 알 수 있다. 이렇게 포장된 7개의 상자가 크기  $l$ 의 컨테이너에 담겨진다.

포장상자내의 유희공간은 그 발생원인에 따라 두가지로 분류된다. 그중 하나는 〈그림 1〉의 ①번 블록과 같이 생산 순서에 따라 제품이 포장될 때 제품의 분리가 허용되지 않으므로 매 상자의 마지막 부분에서 공간부족으로 발생하는 유희공간이다. 다른 하나는 ②번 블록과 같이 매 소생산주기의 마지막 상자에서 발생하는 유희공간으로서 이는 서로 다른 소생산주기에 생산되는 제품이 같은 상자에 포장될 수 없기 때문에 발생하는 유희공간이다. 이 두가지 유희공간은 그 발생과정과 원인이 상이하므로 발생횟수와 크기를 통계적으로 추정하는데 서로 다른 분석

과정이 요구된다.

확률분포  $F(\cdot)$ 를 갖는 독립적 확률변수  $X_i$ 가  $(i-1)$ 번째 전이(transition)와  $i$ 번째 전이 사이의 시간간격이고  $\{N(t); t \geq 0\}$ 가 시점  $t$ 까지 발생한 전이의 횟수이면  $\{N(t); t \geq 0\}$ 는 재생확률과정(renewal process)을 따른다고 말한다. 주어진 시점  $t$ 에서 관측된 재생확률과정의 국지적 행태(local behavior)를 관찰하기 위해 확률변수  $A_t$ 를  $A_t = t - S_{N(t)}$ 라고 정의하면 이는  $t$ 이전 최근의 전이시점부터  $t$ 까지의 시간간격을 뜻하며 시점  $t$ 에서의 결손(deficit, age 또는 backward recurrence time)이라고 부른다. 여기서  $S_n$ 은  $n$ 번째 재생과정이 발생하는 시점을 말한다. 마찬가지로  $B_t$ 를  $B_t = S_{N(t)+1} - t$ 라고 정의하면 이는  $t$ 이후 최초의 전이시점까지 시간간격을 뜻하며 시점  $t$ 에서의 여분(excess, residual life 또는 forward recurrence time)이라고 부른다. 확률변수  $L_t$ 는



〈그림 2〉 재생활률과정의 결손과 여분

시점  $t$ 에서의 발생간격(recurrence time 또는 spread)이며  $L_t = S_{M(t)+1} - S_{M(t)}$ 가 된다. 이를 그림으로 표시하면 〈그림 2〉와 같다.

변수  $a, b$ 와 재생활률과정  $N^1(w), N^2(Y)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$a$  : 매 상자의 마지막 부분에 발생하는 유휴공간의 크기

$b$  : 매 소생산주기의 마지막 상자에 발생하는 유휴공간의 크기

$N^1(w)$  : 크기  $w$ 의 상자 한개에 포장되는 제품의 갯수

$N^2(Y)+1$  : 소생산주기동안 생산된 총  $Y$ 개의 제품이 포장된 상자의 갯수

생산제품의 크기  $X$ 를 재생활률과정의 발생 시간간격  $L_w$ 로 보면 매 상자에 발생하는 유휴공간의 크기  $a$ 는 주어진 시점  $w$ 에서 관측된 결손  $A_w$ 와 동일하며  $A_w = w - S_{N^1(w)}$ 이다. 유휴공간  $a$  또는  $A_w$ 의 분포함수를

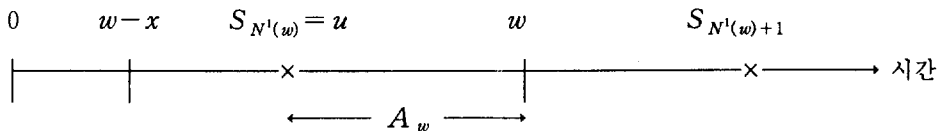
$A_w(x) = P\{A_w \leq x\}$  라고 하면  $x > w$  일 때  $A_w(x) = 1$  임은 쉽게 알 수 있다.  $x \leq w$  일 때는 아래 그림과 같이  $S_{N^1(w)}$ 이  $[w-x, w]$  사이 임의의 시점  $u$ 에서 발생하여 시점  $w$ 이후까지 생존하여야 한다. 즉  $S_{N^1(w)+1}$ 이 시점  $w$  이후에 발생함을 뜻한다.

따라서  $S_{N^1(w)}$ 이 시점  $u$ 에서 발생하여 시점  $w$ 이후까지 생존할 확률은  $F^c(w-u)$ 이고  $S_{N^1(w)}$ 이 시점  $u$ 에서 발생할 확률은  $m^1(u)du$ 이므로  $x \leq w$  일 때  $A_w(x)$ 는

$$A_w(x) = \int_{w-x}^w F^c(w-u) m^1(u) du \quad x \leq w \tag{1}$$

가 된다. 여기서  $F^c(t) = P\{X > t\}$ ,  $m^1(t) = \frac{d}{dt} M^1(t)$ ,  $M^1(t) = E[N^1(t)]$ 이다.

가정한 바와 같이  $\nu_1 \ll w$  이면 유휴공간  $a$ 의 분포함수  $A_w(x)$ 는 균형상태의 결손분포함수(equilibrium deficit distribution function)



〈그림 3〉  $x \leq w$  일 때 결손

$A(x) \equiv \lim_{w \rightarrow \infty} A_w(x) = \lim_{w \rightarrow \infty} P\{A_w \leq x\}$ 로 근사화

할 수 있다. 따라서  $A(x) = \lim_{w \rightarrow \infty} \int_{w-x}^w F^c(w-u)$

$$m^1(u) du \text{ 인데 여기서 } \lim_{t \rightarrow \infty} m^1(t) = \frac{1}{\nu_1} \text{ ([7]}$$

의 Corollary 5-9b 참조)이므로  $y = w - u$ 로 변수변환하여 정리하면 다음과 같은 균형상태의 결손분포함수를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} A(x) &= \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^x F^c(y) m^1(w-y) dy \\ &= \frac{1}{\nu_1} \int_0^x F^c(y) dy \end{aligned} \quad (2)$$

이 결과를 이용하면 제품포장 상자내 유휴공간  $a$ 의 기대치  $E[a]$ 는

$$E[a] = \lim_{w \rightarrow \infty} E[a] = \frac{1}{\nu_1} \int_0^\infty y F^c(y) dy = \frac{\nu_{12}}{2\nu_1} \quad (3)$$

로 근사 계산되어 지는데 여기서  $\nu_{12} = E[X^2]$ 이다.

매 소생산주기의 마지막 상자에 발생하는 유휴공간  $b$ 는 서로 다른 소생산주기에 생산되는 제품이 같은 상자에 포장될 수 없기 때문에 발생하는 유휴공간으로서 제품분리가 불가능하여 생겨나는 유휴공간  $a$ 와는 그 발생과정과 원인이 상이하다. 기대치  $E[b]$ 를 계산하기 위해서는  $N^1(w)$ 와는 별도로 소생산주기동안 생산된 총  $Y$ 개의 제품이 포장된 상자 갯수를 헤아리는 재생확률과정  $N^2(Y)$ 를 고려해야 한다.  $N^1_i(w)$ 를  $i$ 번째 상자에 포장되는 제품의 갯수라고 하면  $N^1_i(w)$ 는 다시 재생확률과정  $N^2(Y)$ 의 발생간격이 된다. 즉 소생산주기동안 생산된 제품

의 갯수  $Y$ 는

$$\begin{aligned} Y &= N^1_1(w) + N^1_2(w) + N^1_3(w) + \dots \\ &\quad + N^1_{N^2(Y)}(w) + \epsilon(Y) \end{aligned} \quad (4)$$

로 표현된다.  $(N^2(Y) + 1)$ 은 소생산주기동안 포장된 제품상자의 갯수이고  $\epsilon(Y)$ 는 소생산주기중 마지막 상자에 포장된 제품의 갯수이다. 따라서 마지막 상자에 포함된 유휴공간  $b$ 는

$$b = w - (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{\epsilon(Y)}) \quad (5)$$

가 된다.

$$\begin{aligned} E[b | Y] &= w - E[X_1 + X_2 + \dots \\ &\quad + X_{\epsilon(Y)} | Y] \\ &= w - E[X] \epsilon(Y) \\ &= w - \nu_1 \{ Y - (N^1_1(w) + \\ &\quad N^1_2(w) + \dots + N^1_{N^2(Y)}(w)) \} \\ &= w - \nu_1 A_Y \end{aligned} \quad (6)$$

이며 여기서  $A_Y$ 는 재생확률과정  $N^1(w)$ 의 시점  $Y$ 에서의 결손이다. 따라서

$$E[b] = E[E[b | Y]] = w - \nu_1 E[A_Y] \quad (7)$$

인데  $Y$ 가 충분히 클 때 즉 균형상태에서 결손  $(A_Y)$ 과 여분  $(B_Y)$ 의 확률분포가 일치하여  $E[A_Y] = E[B_Y]$  이므로

$$E[b] = w - \nu_1 E[B_Y] \quad (8)$$

로 근사화된다. 한편  $N^2(Y) + 1$ 이  $N^1(w)$ 의 stopping time 이므로 Wald의 방정식에 의해

$E[S_{N^2(Y)+1}] = E[N^1(w)]E[N^2(Y)+1]$  가  
되며  $S_{N^2(Y)+1} = Y + B_Y$  이므로

$$\begin{aligned} E[B_Y] &= E[S_{N^2(Y)+1}] - E[Y] \\ &= E[N^1(w)]E[N^2(Y)+1] - \nu_2 \\ &= M^1(w)(M^2(Y)+1) - \nu_2 \quad (9) \end{aligned}$$

이다. 여기서  $M^1(t) = E[N^1(t)]$ ,  $M^2(t) = E[N^2(t)]$  이다. 따라서

$$E[b] = w - \nu_1 \{M^1(w)(M^2(Y)+1) - \nu_2\} \quad (10)$$

가 된다. 생산의 안정으로  $Var[Y]$ 가 매우 작다고 가정하면  $Y = \nu_2$  일때

$$E[b] = w - \nu_1 \{M^1(w)(M^2(\nu_2)+1) - \nu_2\} \quad (11)$$

가 되며 소생산주기당 두 종류의 유휴공간에 따른 총 벌칙비용은  $p = \gamma(M^2(\nu_2)E[a] + E[b])$  이다.  $c$ 와  $d$ 를 각각 주생산주기동안 생산된 제품의 포장을 위한 상자와 컨테이너의 개수라고 하면

$$E[c] = \nu_3(M^2(\nu_2)+1) \quad (12)$$

$$E[d] = E[\langle \frac{Z(N^2(Y)+1)}{l} \rangle] \quad (13)$$

가 된다. 여기서  $\langle x \rangle$ 는  $x$ 의 소수자리를 올림한(round up) 정수를 말한다.

**Fact 1**  $x$ 가 비음의 연속 확률변수이면

$$E[x] < E[\langle x \rangle] < E[x] + 1 \text{ 이고}$$

근사적으로  $E[\langle x \rangle] \approx E[x] + \frac{1}{2}$  이다.

(증명)

$$\begin{aligned} E[\langle x \rangle] &= \int_0^\infty \langle x \rangle f(x) dx = \sum_{k=1}^\infty k \int_{k-1}^k f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^\infty k (F(k) - F(k-1)) \\ &= E[x] + (\int_0^\infty F(x) dx - \sum_{k=1}^\infty F(k)) \end{aligned}$$

한편  $0 < \int_0^\infty F(x) dx - \sum_{k=1}^\infty F(k) < \sum_{k=1}^\infty \{F(k) - F(k-1)\} < F(\infty) - F(0) = 1$  이므로  $E[x] < E[\langle x \rangle] < E[x] + 1$  가 된다.

$$\int_0^\infty F(x) dx - \sum_{k=1}^\infty F(k) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty \{F(k) - F(k-1)\} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } E[\langle x \rangle] \approx E[x] + \frac{1}{2}$$

이다. □

Fact 1을 이용하면  $E[d]$ 는  $\frac{\nu_3(M^2(\nu_2)+1)}{l} + \frac{1}{2}$  로 근사화되며 이상의 결과를 종합하여 아래와 같은 주생산주기당 총포장비용을 최소화하는 문제를 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min } C_1(l, w) &= K \left\{ \frac{\nu_3(M^2(\nu_2)+1)}{l} + \frac{1}{2} \right\} \\ &+ G\{\nu_3(M^2(\nu_2)+1)\} \\ &+ aw \\ &+ \beta l \quad (14) \\ &+ \gamma \nu_3(M^2(\nu_2)E[a] + E[b]) \end{aligned}$$

$$s.t. \quad w' \leq w \leq w'', \quad w \in R^+$$

$$l' \leq l \leq l'', \quad l \in I^+$$

여기서  $R^+$ 와  $I^+$ 는 각각 비음의 실수집합과

비움의 정수집합을 말한다. Blackwell의 renewal theorem을 이용하면  $t \rightarrow \infty$  일때

$$M^2(t) - M^2(t - \nu_2) \rightarrow \frac{\nu_2}{E[N^1(w)]} = \frac{\nu_2}{M^1(w)} \quad (15)$$

이므로  $M^2(\nu_2) = \frac{\nu_2}{M^1(w)}$  가 된다.  $M^1(w)$ 의 수렴결과치(asymptotic result)를 이용하면([7]

의 113쪽 참조)  $M^1(w) = \frac{w}{\nu_1} + \frac{\sigma_1^2 - \nu_1^2}{2\nu_1^2} + o(1)$

이며  $M^2(\nu_2) = \nu_2 / \left( \frac{w}{\nu_1} + \frac{\sigma_1^2 - \nu_1^2}{2\nu_1^2} \right)$ 이다. 이 결과를 이용하여 포장비용최소화 문제를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\text{Min } C_1(w, l) =$$

$$K \left\{ \frac{\nu_3}{l} \left( \frac{2\nu_1^2\nu_2}{2w\nu_1 + \sigma_1^2 - \nu_1^2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \right\}$$

$$+ G \left\{ \nu_3 \left( \frac{2\nu_1^2\nu_2}{2w\nu_1 + \sigma_1^2 - \nu_1^2} + 1 \right) \right\}$$

$$+ aw + \beta l \quad (16)$$

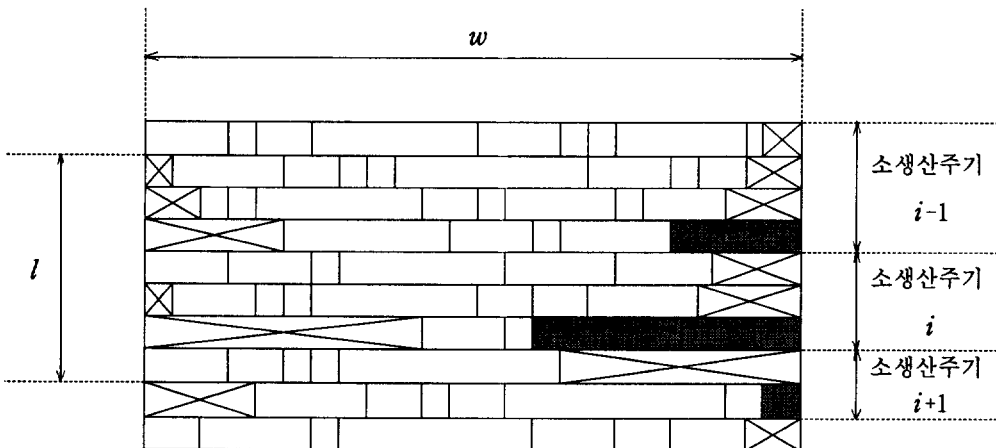
$$+ r\nu_3 \left( \frac{\nu_1\nu_2\nu_{12}}{2w\nu_1 + \sigma_1^2 - \nu_1^2} + \frac{\sigma_1^2 - \nu_1^2}{2\nu_1} \right)$$

$$\text{s.t. } w' \leq w \leq w'', \quad w \in R^+$$

$$l' \leq l \leq l'', \quad l \in I^+$$

### 4. 생산품의 분리가 허용되는 경우

<그림 4>는 제품분리가 허용되는 경우, 임의의 생산주기내 세 개의 소생산주기  $i-1, i, i+1$  동안 생산된 제품의 포장 예를 보여준다. 각 블록은 생산품을 나타내며 그 크기는 그림에서 보는 바와 같이 서로 다르다. 포장상자 끝부분의  $\boxtimes$  모양 블록은 유휴공간을 채우기 위해 분리된 제품의 일부분을 말하며 나머지 부분은 다음 상자의 첫 부분에 같은 모양의 블록으로 표시된다. 소생산주기 마지막 상자의 끝부분에 있는 회색 블록은 서로 다른 소생산주기에 생산되는 제품이 같은 상자에 포장될 수 없기 때문에 발생하



<그림 4> 제품분리가 허용되는 경우의 생산제품 포장 예



는 유휴공간이다. 따라서 생산품의 분리가 허용되는 경우에는 소생산주기의 마지막 포장 상자에만 유휴공간이 발생하게 된다.

매 포장상자마다 제품의 분리가 발생할 수 있는데 이는 바로 이전 상자에서 분리가 발생했는가 여부에 따라 영향을 받게 된다. 왜냐하면 이전 상자에서 분리가 발생했을 경우에는 분리된 나머지 부분이 이번 상자에 맨 처음 포장됨으로써 재생활률과정의 발생간격에 왜곡을 초래하기 때문이다. 그러나 제품의 크기  $\nu_1$ 에 비해 상자의 크기  $w$ 가 충분히 크다면 최초 발생간격의 왜곡현상이 무시될 수 있다. 따라서  $\nu_1 \ll w$  일 때 제품분리가 일어나지 않을 확률은 결론이 0일 확률과 같으므로 식(2)로부터

$$P\{\text{임의의 상자에서 제품분리 발생}\} \approx 1 - a(0) = 1 - \frac{1}{\nu_1} \quad (17)$$

가 된다. 여기서  $a(x) \equiv \frac{d}{dx} A(x) = \frac{F^c(x)}{\nu_1}$ 이다. Fact 1을 이용하면 다음과 같은 기대치들이 쉽게 계산된다.

$$E[\text{소생산주기동안 포장된 상자의 갯수}] = E\left[\left\langle \frac{XY}{w} \right\rangle\right] \approx \frac{\nu_1 \nu_2}{w} + \frac{1}{2} \quad (18)$$

$$E[\text{소생산주기동안 발생된 제품분리 횟수}] \approx \left(1 - \frac{1}{\nu_1}\right) \left(\frac{\nu_1 \nu_2}{w} - \frac{1}{2}\right) \quad (19)$$

$$E[\text{포장상자내 유휴공간의 크기}] = E\left[w \left\langle \frac{XY}{w} \right\rangle - XY\right] = wE\left[\left\langle \frac{XY}{w} \right\rangle\right] - \nu_1 \nu_2 \approx w\left(\frac{\nu_1 \nu_2}{w} + \frac{1}{2}\right) - \nu_1 \nu_2 = \frac{w}{2} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E[\text{주생산주기당 컨테이너 갯수}] &= E\left[\left\langle \frac{Z\langle XY/w \rangle}{l} \right\rangle\right] \approx E\left[\frac{Z\langle XY/w \rangle}{l}\right] + \frac{1}{2} \\ &= \frac{E[Z]E\left[\left\langle \frac{XY}{w} \right\rangle\right]}{l} + \frac{1}{2} \\ &\approx \frac{\nu_3\left(\frac{\nu_1 \nu_2}{w} + \frac{1}{2}\right)}{l} + \frac{1}{2} \quad (21) \end{aligned}$$

이상의 결과들을 종합하면 제품의 분리가 허용되는 경우 제품분리와 유휴공간에 따른 벌칙비용을 포함한 총 포장비용을 최소화하는 최적화 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min } C_2(w, l) &= K\left\{\frac{\nu_3\left(\frac{\nu_1 \nu_2}{w} + \frac{1}{2}\right)}{l} + \frac{1}{2}\right\} \\ &+ G\left\{\nu_3\left(\frac{\nu_1 \nu_2}{w} + \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &+ aw + \beta l + \gamma\nu_3\left(\frac{w}{2}\right) \quad (22) \\ &+ \delta\nu_3\left\{\left(1 - \frac{1}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_1 \nu_2}{w} - \frac{1}{2}\right)\right\} \\ \text{s.t. } &w' \leq w \leq w'', \quad w \in R^+ \\ &l' \leq l \leq l'', \quad l \in I^+ \end{aligned}$$

## 5. 최적포장 계획의 수립

### 5.1 생산품의 분리가 허용되지 않는 경우

(16)에서 비용함수  $C_1(w, l)$ 의 Hessian 행렬을  $H_1(w, l)$ 라고 하면  $w' \leq w \leq w''$ ,  $w \in R^+$ ,  $l' \leq l \leq l''$ ,  $l \in I^+$ 의 범위에서

$H_1(w, l)$ 이 positive definite 임을 쉽게 알 수 있다. 따라서  $C_1(w, l)$ 은 strictly convex 이고 local 최적해  $(\overline{w}_1, \overline{l}_1)$ 는 유일한 global 최적해이다. 최적해의 대안은  $\frac{\partial}{\partial w} C_1 = 0, \frac{\partial}{\partial l} C_1 = 0$ 로부터 구할 수 있으며 만약 그것이 (16)의 가능역내에 존재할 경우는 이것이 단일 최적해  $(\overline{w}_1, \overline{l}_1)$ 가 된다. 여기서  $\overline{l}_1$ 는 소수해를 둘러싼 올림(round up)정수와 내림(round down)정수를 비교하여 얻은 정수해이다. 최적해의 대안이 가능역을 벗어났을 때는  $C_1(w, l)$ 이 strictly convex 이므로 그 대안의 위치에 따라서 가능역의 경계점중 하나를 최적해로 택한다.

## 5.2 생산품의 분리가 허용되는 경우

(22)에서 비용함수  $C_2(w, l)$ 의 Hessian 행렬을  $H_2(w, l)$ 라고 하면  $w' \leq w \leq w'', w \in R^+, l' \leq l \leq l'', l \in I^+$ 의 범위에서  $H_2(w, l)$ 도 역시 positive definite 이므로  $C_2(w, l)$ 은 strictly convex 이고 local 최적해  $(\overline{w}_2, \overline{l}_2)$ 는 유일한 global 최적해이다. 마찬가지로 최적해의 대안은  $\frac{\partial}{\partial w} C_2 = 0, \frac{\partial}{\partial l} C_2 = 0$ 로부터 구하며 그 대안이 (22)의 가능역내 존재할 때 단일 최적해  $(\overline{w}_2, \overline{l}_2)$ 가 된다. 최적해의 대안이 가능역을 벗어났을 때는 5.1에서와 마찬가지로 경우에 따라 가능역의 경계점중 하나를 최적해로 택한다.

## 5.3 최적해의 성능 분석

생산제품의 분리가 허용되지 않는 경우와 허용되는 경우 모두 비용최소화 목적함수가 positive definite 이므로 이 모형의 단일 최적해를 구하는 것은 용이하다. 그러나 비용최소화 모형은  $\nu_1 \ll w$ 이라는 가정하에서 균형상태의 재생활률과정을 근사화하여 도출한 것이므로 그 모형의 해가 일반적으로 최적의 포장단위를 결정할 수는 없다. 다만 모의 실험을 통해 비용최소화 모형의 성능을 사후적으로 검토할 필요가 있다. 성능분석을 위하여 가능역의 전구간을 비교대상으로 삼는 것은 불가능하므로 여기서는 모형의 최적해를 중심으로  $\pm 100\%$ 의 범위에서 비교대상이 되는  $(w, l)$ 을 선정하고 이에 근거한 난수발생을 통하여 포장작업을 모의실험함으로써 비교대상이 되는 포장비용을 계산해 낸다. 물론 매우 제한된 범위내에서 소수의 모의실험 결과들을 비교하기때문에 해외 성능을 완벽하게 평가할 수는 없지만 손쉽게 구한 해의 타당성은 검증할 수 있다. 최적해의 성능을 분석하기 위한 실험절차는 다음과 같다.

- ① 비용계수  $G, K, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  를 설정한다.
- ② 확률변수  $X, Y, Z$ 에 대하여  $\nu_1, \nu_{12}, \sigma_1^2, \nu_2, \nu_3$  를 설정한다.
- ③ 최적화 모형의 해를 구한다.
- ④ 여러 형태의  $F(\cdot)$  을 가정하고 이에 따라 확률변수  $X, Y, Z$  에 난수를 발생시킨다.
- ⑤ 최적해를 중심으로 비교대상이 되는 10개의  $(w, l)_i$  을 임의로 설정한다.
- ⑥ 각  $(w, l)_i$  에 대해서 발생된 난수에 따

라 제품포장을 모의실험하고 포장비용을 계산한다.

- ⑦ 모의실험에 의한 포장비용을 비교함으로써 최적화 모형의 타당성을 평가한다.

비선형의 최적화 모형을 풀기위해서 GAMS를 사용하였다. 생산제품의 크기  $X$ 의 분포함수  $F(\cdot)$ 로는 균등분포(uniform distribution)와 정규분포를 택하였으며 이에 따른 난수발생을 위해서 IMSL의 서브루틴 RNUN과 RNNOR을 이용하였다. <표 1>과 <표 2>는 각각 제품분리가 불가능한 경우와 가능한 경우에 있어서 최적해의 성능을 비교분석한 것이다.

각 경우 균등분포 10개, 정규분포 10개 총 20개의 문제에 대하여  $\nu_1$ 의 크기에 따라 두가지로 구분하고 최적화 모형의 해  $(\bar{w}, \bar{l})$ 와 임의로 설정된 10개의  $(w, l)_i$ 에 대하여 모의실험을 통해 계산된 포장비용을 비교하였다.

$(w, l)_1$ 에서  $(w, l)_{10}$ 까지 칸 속의 숫자는 최적해의 모의실험 포장비용을 100으로 보았을 때 임의로 설정된  $(w, l)_i$ 의 모의실험 포장비용을 나타낸다. (\*\*)로 채워진 칸은 1000이상의 수치를 기록한 경우이다. 비교대상이되는 10개의  $(w, l)_i$ 은 최적해의  $\pm 100\%$ 의 범위에서 임의로 설정된 것이므로 가능역의 전구간에 걸쳐 분석된 결과로 볼 수는 없다. 단지 두 개의 표를 종합하면 최적해의 성능을 능가하는 해의 숫자는 각각 200개중에서 26개, 14개로 총 400개중 40개에 불과하여 최적해의 좋은 성능을 간접적으로 보여준다. <표 1>과 <표 2>에서 볼 때 제품분리가 불가능한 경우와 가능한 경우에 있어서 최적해의 성능상 차이점을 발견하기는 어렵다.  $\nu_1$ 의 크기에 따른 구분에 있어서도 결과치의 차이점은 없으며 단지 정규분포보다 균등분포의 경우 1000이상의 총포장비용을 기록한 경우가 많음을 알 수 있다.

<표 1> 최적해의 성능분석 (제품분리가 불가능한 경우)

비교해	균등분포										정규분포									
	$\nu_1$ 이 작을때					$\nu_1$ 이 클때					$\nu_1$ 이 작을때					$\nu_1$ 이 클때				
	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50
$(\bar{w}_1, \bar{l}_1)$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$(w_1, l_1)_1$	117	201	185	112	134	243	143	334	663	342	282	623	664	672	153	635	654	254	576	372
$(w_1, l_1)_2$	85	569	756	192	**	252	**	245	183	146	465	262	568	682	136	643	465	238	652	67
$(w_1, l_1)_3$	78	187	17	176	437	75	342	67	284	89	650	134	987	272	187	54	568	246	253	**
$(w_1, l_1)_4$	167	190	**	29	**	732	272	99	212	153	792	67	654	887	112	133	56	242	345	463
$(w_1, l_1)_5$	200	266	266	244	243	226	478	287	215	317	424	37	457	176	531	345	165	221	574	187
$(w_1, l_1)_6$	276	867	182	**	645	153	446	387	822	56	461	733	452	190	346	356	453	178	78	648
$(w_1, l_1)_7$	142	777	658	153	107	42	242	472	205	89	173	857	47	49	764	453	346	731	145	362
$(w_1, l_1)_8$	**	56	111	171	47	173	226	**	133	183	464	373	465	187	376	735	222	136	333	257
$(w_1, l_1)_9$	85	190	**	548	736	342	253	282	198	855	276	103	876	69	567	225	474	436	316	173
$(w_1, l_1)_{10}$	175	622	96	356	635	112	882	109	256	309	663	564	105	167	689	200	467	68	247	68

〈표 2〉 최적해의 성능분석 (제품분리가 가능한 경우)

비교해	균등분포										정규분포									
	$\nu_1$ 이 작을때					$\nu_1$ 이 클때					$\nu_1$ 이 작을때					$\nu_1$ 이 클때				
	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50
$(\overline{w_2}, \overline{l_2})$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$(w_2, l_2)_1$	548	**	112	113	733	373	384	585	68	**	419	321	267	823	232	121	152	141	141	80
$(w_2, l_2)_2$	347	642	352	**	666	347	321	574	221	688	144	873	156	832	611	351	63	363	625	228
$(w_2, l_2)_3$	978	**	512	84	223	221	343	**	543	351	932	149	842	765	432	118	**	153	233	212
$(w_2, l_2)_4$	234	111	101	834	**	**	90	622	311	263	281	178	**	324	459	73	237	222	211	145
$(w_2, l_2)_5$	**	733	522	233	754	**	222	123	176	271	476	164	326	134	255	549	537	125	54	346
$(w_2, l_2)_6$	124	**	152	881	632	433	**	539	73	884	**	236	428	441	141	**	262	131	630	356
$(w_2, l_2)_7$	232	287	733	**	190	343	734	872	122	**	220	111	834	144	251	214	643	143	754	541
$(w_2, l_2)_8$	**	431	85	156	174	192	**	457	134	204	122	865	82	643	**	761	151	62	234	233
$(w_2, l_2)_9$	532	88	**	442	456	326	222	541	**	**	442	363	243	236	122	115	432	487	548	721
$(w_2, l_2)_{10}$	346	523	255	443	241	281	146	183	235	**	529	61	145	475	245	151	45	211	621	131

### 6. 결 론

재생활률과정을 근사화함으로써 무작위의 크기로 생산되는 제품의 포장단위를 결정하는 최적화 모형을 수립하였다. 생산제품의 크기를 재생활률과정의 발생간격(recurrence time)으로 보면 제품의 분할이 허용되지 않을 때 일정규격의 포장상자에 발생하는 유휴공간은 결손(deficit)이 되며 제품에 비해 포장상자가 충분히 크다는 가정하에 이 유휴공간의 크기를 근사화할 수 있다. 마찬가지로 제품의 분할이 가능한 경우에도 분할횟수를 근사화하여 벌칙비용을 부과함으로써 재생활률과정에 기반한 확률적 모형(stochastic model)을 포장비용을 최소화하는 확정적 모형(deterministic model)으로 재구성하였다.

비용최소화 모형은 비교적 간단한 비선형계획 문제가 되며 목적함수가 순수볼록(strictly

convex)이므로 단일 최적해를 갖는다. 이 단일 최적해의 성능을 검증하기 위하여 최적해 부근에 임의로 10개의 포장단위  $(w, l)_i$ 를 설정하고 각각에 대해 실제 포장과정을 모의 실험함으로써 총 포장비용을 계산하고 이를 비교하였다. 결론적으로 최적해의 성능은 우수한 것으로 판단되며 제품크기의 확률분포에 따라 다소 영향을 받는 것으로 나타났다. 최적해의 성능이 가능역의 전범위에서 검토된 것이 아니고 국지적인 영역에서 모의 실험결과를 통해 비교된 것이므로 이 연구에서 제시한 비용 최소화 모형은 “좋은 해”를 제공한다고 결론 내릴 수 있다.

## 참 고 문 헌

- [1] Erickson R.E. and H. Luss (1980) Optimal sizing of records used to store messages of various lengths. *Management Science*, 26, 796-809.
- [2] Erickson R.E., S. Halfin and H. Luss (1982) Optimal sizing of records when divided messages can be stored in records of different sizes. *Operations Research*, 30, 29-39.
- [3] Majithia J.C. and R. Bhar (1974) Analysis of overheads in packet-switched data network. *Proc. IEE*, 121, 1375-1376.
- [4] Majithia J.C. and R. Bhar (1974) Optimum packet size in a packet-switched data network. *Electron. Lett.*, 10, 191-193.
- [5] Wolman E. (1965) A fixed optimum cell-size for records of various lengths. *J. Ass Comput. Mach.*, 12, 53-70.
- [6] Kleinrock L. (1976) *Queuing Systems, Vol.II, Computer Applications*. Wiley, New York.
- [7] Heyman D.P. and M.J. Sobel (1982) *Stochastic Models in Operations Research, Vol.1*. McGraw Hill, New York.
- [8] Ross S.M. (1993) *Introduction to Probability Models*. Academic Press, San Diego, CA