《연구논문》 Hankook Kwanghak Hoeji Volume 8, Number 2, April 1997
(Journal of the Optical Society of Korea - Korean Edition)

회절 역문제로 유도한 변조된 Gauss 동함수에 대한 결상계의 OTF*

송영란 · 이민희
인하대학교 물리학과

이 상 수
한국과학기술원 물리학과

(1996년 11월 28일 받음)

Gauss 초기함수 $e^{-\sigma^2 x^2}$에 $e^{-q\omega_0|x|}$를 곱하여 선폭을 더욱 예리하게 하여 역문제(Inverse Problem)로 동함수를 구하고 다시 유한구경에서 결상하는 광파의 회절강도 분포를 구하였다. 이 광학계의 OTF를 구하고 이 값을 변조하지 않은 Gauss 동함수의 $(\mathrm{OTF})_{q=0}$의 값과 비교한 결과 변조된 Gauss 동함수의 OTF가 $(\mathrm{OTF})_{q=0}$보다 같거나 작음을 보였다. 회절 역문제취급에서 Gauss 함수의 선폭을 무조건 예리하게 한다하여 OTF가 향상되지 않는다는 사실을 증명하였다.

I. 서 론

진폭이 일정한 Rayleigh 동(Pupil)의 회절무늬에서 한계분해능은 $\varepsilon_R = \frac{\pi}{\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda}(NA)$(1차원 취급) 이다.[1] 이때 중심부에 있는 Airy disk의 반경이 ε_R이고, 반치폭($\frac{1}{2}(FWHM)$)은 대략 $\frac{1}{2}\varepsilon_R$이 된다. Rayleigh의 분해한계보다 더 작은 한계분해 $\varepsilon(<\frac{1}{2}\varepsilon_R)$를 얻고자 하면, 즉, 초분해능 광학계[2-6]에서의 ε는 몇 가지 변수의 함수로 표현된다. 한 개의 Gauss 동함수 $e^{\frac{-\omega^2}{4\sigma^2}}$ $(\omega = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\alpha}{l})$의 ε는 σ의 함수가 되며, 이때 $\varepsilon(\sigma)$를 $\frac{1}{2}\varepsilon_R$보다 작게할 수 있다는 것을 증명하였다.[7] 나아가서 여러개의 Gauss 동함수를 중첩하여 σ_1, σ_2....의 함수로 하면 한계분해능 ε값을 한 개의 Gauss 동함수보다 더욱 작게 할 수 있음을 알 수 있다.[8]

본 논문에서는 Gauss 함수에 $e^{-q\omega_0|x|}$를 곱하여 초기 진폭임펄스 $S_0(x)$를 더욱 예리하게 만듬으로써 회절무늬의 OTF를 ω와 q의 함수로 표현하여 변조하지 않은 Gauss 동함수 경우의 OTF보다 향상되지 않음을 알았으며 그 이유를 제시하였다.

II. 역문제 초기함수 $S_0(x)$의 $e^{-q\omega_0|x|}$ 변조와 동함수 $A(\omega)$의 유도

역문제의 초기 Gauss 함수 $e^{-\sigma^2 x^2}$에 지수함수 $e^{-q\omega_0|x|}$를 곱하여 변조한 후, 결상계의 동함수 $A(\omega)$를 구하고자 한다. 단, q는 양수, x는 상면의 좌표이고, $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\alpha_0}{l}$으로 α_0는 구경의 반지름이고 l은 동과 상면사이의 길이이다.

역문제에서 초기 진폭임펄스는

$$S_0(x) = e^{-\sigma^2 x^2 - q\omega_0|x|} \tag{1}$$

이고, (1)식의 Inverse Fourier Transform으로 동함수 $A(\omega)$를 구한다. 즉,

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma^2 x^2 - q\omega_0|x| + i\omega x}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\sigma^2 x^2 - q\omega_0|x| + i\omega x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-\sigma^2 x^2 - q\omega_0 x + i\omega x}\,dx \\ &= A_1(\omega) + A_2(\omega) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{단,}\quad \left.\begin{aligned} A_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\sigma^2 x^2 - q\omega_0|x| + i\omega x}\,dx \\ A_1(\omega) &= \int_{0}^{+\infty} e^{-\sigma^2 x^2 - q\omega_0 x + i\omega x}\,dx \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$A_1(\omega)$의 x를 $-x$로 변수변환을 하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= \int_{0}^{+\infty} e^{-\sigma^2 x^2 - q\omega_0 x - i\omega x}\,dx \\ &= e^{X^2}\int_0^{\infty} e^{-(\sigma x + X)^2}dx \quad (\text{단}, X = \frac{q\omega_0}{2\sigma} + i\frac{\omega}{2\sigma}) \\ &= e^{(\frac{q\omega_0}{2\sigma} + i\frac{\omega}{2\sigma})^2}\int_0^{\infty} e^{-(\sigma x + \frac{q\omega_0}{2\sigma} + i\frac{\omega}{2\sigma})^2}dx \\ &\approx \frac{1}{\sigma}e^{(\frac{q\omega_0}{2\sigma} + i\frac{\omega}{2\sigma})^2}\int_0^{\infty} e^{-(\sigma x + \frac{q\omega_0}{2\sigma})^2}dx \\ &\quad (\text{실수축 상의 적분으로 근사}) \\ &= \frac{1}{\sigma}e^{(\frac{q\omega_0}{2\sigma} + i\frac{\omega}{2\sigma})^2} \cdot a(x, q) \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $a(x, q) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma x + \frac{q\omega_0}{2\sigma})^2}dx$으로 값을 구하면

$$\begin{aligned} \{a(x, q)\}^2 &= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-t^2 - t'^2}dt\,dt', \quad (t = t' = \sigma x + \frac{q\omega_0}{2\sigma}) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}d(-r^2)\int_0^{\pi} d\phi \end{aligned}$$

*본 연구는 한국전자통신연구소의 차세대반도체 선행기초기술 연구사업(1996년)의 지원으로 수행하였습니다.

$$(\text{단},\ r^2 = 2(\sigma x + \frac{q\omega_0}{2\sigma})^2,\ dtdt' = rdrd\phi)$$

$$= -\frac{\pi}{2\sigma^2} \cdot \left| e^{-r^2} \right|_0^\infty \tag{5}$$
$$= \frac{\pi}{2\sigma^2}$$

이다. 즉,

$$a(x, q) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} \tag{6}$$

따라서 구하고자 하는 $A_1(\omega)$는 (4)식으로 부터 (6)식을 이용하면

$$A_1(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma^2} e^{(\frac{q\omega_0}{2\sigma} + i\frac{\omega}{2\sigma})^2} \tag{7}$$

이다.

마찬가지 방법으로 (3)식의 $A_2(\omega)$를 구하면

$$A_2(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma^2} e^{(\frac{q\omega_0}{2\sigma} - i\frac{\omega}{2\sigma})^2} \tag{8}$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 (2)식의 동함수 $A(\omega)$는 다음과 같다.

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma^2} \left\{ e^{(\frac{q\omega_0}{2\sigma} + i\frac{\omega}{2\sigma})^2} + e^{(\frac{q\omega_0}{2\sigma} - i\frac{\omega}{2\sigma})^2} \right\}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma^2} e^{\frac{q^2\omega_0^2}{4\sigma^2} - \frac{\omega^2}{4\sigma^2}} \left\{ e^{i\frac{q\omega_0\omega}{2\sigma^2}} + e^{-i\frac{q\omega_0\omega}{2\sigma^2}} \right\} \tag{9}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^2} e^{\frac{q^2\omega_0^2}{4\sigma^2}} \cos(\frac{q\omega_0\omega}{2\sigma^2}) \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}$$

지수함수 $e^{-q\omega_0|x|}$로 Gauss 함수를 변조하여 역문제로 구한 동함수 $A(\omega)$는 Gauss 동함수 $e^{-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}}$가 ω에 대하여 대칭적으로 $e^{\frac{q^2\omega_0^2}{4\sigma^2}} \cos(\frac{q\omega_0\omega}{2\sigma^2})$으로 변조되어 있음을 알수 있다.

III. 진폭임펄스 $S(x)$와 강도임펄스 $|S(x)|^2$의 유도

진폭임펄스 $S(x)$를 (9)식의 동함수 $A(\omega)$의 Fourier Transform으로 구하면,

$$S(x) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} A(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma^2} e^{\frac{q^2\omega_0^2}{4\sigma^2}}$$
$$\left\{ \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2 + i\frac{q\omega_0\omega}{2\sigma^2} - i\omega x} d\omega \right. \tag{10}$$
$$\left. + \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2 - i\frac{q\omega_0\omega}{2\sigma^2} - i\omega x} d\omega \right\}$$

이며, 우변의 첫 번째항의 적분은 다음과 같다.

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma^2} e^{\frac{q^2\omega_0^2}{4\sigma^2}} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{-(\frac{\omega}{2\sigma} + X)^2 + X^2} d\omega \ (\text{단},\ X = i(\sigma x - \frac{q\omega_0}{2\sigma})) \tag{11}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^2} e^{-\sigma^2 x^2 + q\omega_0 x} \cdot b(\omega)$$

여기서 $b(\omega) = \int_0^{\frac{\omega_0}{2\sigma}} e^{-(\frac{\omega}{2\sigma})^2} d\omega$으로 (5)식의 적분과정을 따르면,

$$b(\omega) = \sqrt{2\pi}\sigma \left\{ 1 - e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

으로, (11)식에서 부터 (12)식을 이용하여 구한 (10)식의 첫 번째항은 다음과 같다. 즉,

$$\frac{2\pi}{\sigma} \left\{ 1 - e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\sigma^2 x^2 q\omega_0 x} \tag{13}$$

마찬가지 방법으로 (10)식의 우변 두 번째항을 구하면,

$$\frac{2\pi}{\sigma} \left\{ 1 - e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\sigma^2 x^2 - q\omega_0 x} \tag{14}$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 진폭임펄스 $S(x)$와 강도임펄스 $|S(x)|^2$의 최종표현은 각각 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} S(x) &= \frac{2\pi}{\sigma} \left\{ 1 - e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\sigma^2 x^2} (e^{q\omega_0 x} + e^{-q\omega_0 x}), \\ |S(x)|^2 &= \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \left\{ 1 - e^{-\frac{\omega_0^2}{2\sigma^2}} \right\} e^{-2\sigma^2 x^2} (e^{q\omega_0 x} + e^{-q\omega_0 x})^2 \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

IV. OTF(Optical transform function)의 유도

(15)식으로 주어지는 강도임펄스 $|S(x)|^2$의 Fourier Transform을 취하여 규격화된 $\psi(\omega)$가 OTF이다. 즉,

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(x)|^2 e^{-i\omega x} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma^2 x^2} (e^{q\omega_0 x} + e^{-q\omega_0 x})^2 e^{-i\omega x} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma^2 x^2 + (2q\omega_0 - i\omega)x} dx + 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma^2 x^2 - i\omega x} dx \tag{16}$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma^2 x^2 - (2q\omega_0 + i\omega)x} dx$$

첫 번째항은

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma^2 x^2 + (2q\omega_0 - i\omega)x} dx$$
$$= e^{X^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{2}\sigma x + X)^2} dx \quad (\text{단},\ X = -\frac{\sqrt{2}q\omega_0}{2\sigma} + i\frac{\sqrt{2}\omega}{4\sigma}) \tag{17}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} e^{(-\frac{\sqrt{2}q\omega_0}{2\sigma} + i\frac{\sqrt{2}\omega}{4\sigma})^2}$$

이고, 마찬가지 방법으로 두번째 항을 구하면

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma^2 x^2 - i\omega x} dx$$
$$= 2e^{X^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{2}\sigma x + X)^2} dx \quad (\text{단},\ X = i\frac{\sqrt{2}\omega}{4\sigma}) \tag{18}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{-\frac{\omega^2}{8\sigma^2}}$$

이고, 세번째 항도 다음과 같다.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma^2 x^2-(2q\omega_0+i\omega)x}\,dx$$

$$= e^{X^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{2}\sigma x+X)^2}dx \quad (\text{단},\ X=-\frac{\sqrt{2}q\,\omega_0}{2\sigma}+i\,\frac{\sqrt{2}\omega}{4\sigma}) \tag{19}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} e^{(\frac{\sqrt{2}q\,\omega_0}{2\sigma}+i\,\frac{\sqrt{2}\omega}{4\sigma})^2}$$

(16)식의 OTF를 (17), (18), (19)식을 합하여 구하면,

$$\psi(\omega,\ q) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma}\left\{ e^{(-\frac{q\,\omega_0}{\sqrt{2}\sigma}+i\frac{\omega}{2\sqrt{2}\sigma})^2} + 2e^{-\frac{\omega^2}{8\sigma^2}} + e^{(\frac{q\,\omega_0}{\sqrt{2}\sigma}+i\frac{\omega}{2\sqrt{2}\sigma})^2}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{-\frac{\omega^2}{8\sigma^2}}\left\{ 1+2^{\frac{q^2\omega_0^2}{2\sigma^2}}\cos(\frac{q\,\omega_0\omega}{2\sigma^2})\right\} \tag{20}$$

이고, $\omega=0$일때의 $\psi(0,\ q)$는

$$\psi(0,\ q) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\left\{1+e^{\frac{q^2\omega_0^2}{2\sigma^2}}\right\} \tag{21}$$

이다. 따라서 OTF는 다음과 같다.

$$OTF = \frac{\psi(\omega,\ q)}{\psi(0,\ q)} = e^{-\frac{\omega^2}{8\sigma^2}} \times \frac{1+e^{\frac{q^2\omega_0^2}{2\sigma^2}}\cos(\frac{q\,\omega_0\omega}{2\sigma^2})}{1+e^{\frac{q^2\omega_0^2}{2\sigma^2}}} \tag{22}$$

(22)식의 변조된 Gauss 동함수의 OTF와 변조되지 않은 Gauss 동함수의 OTF, 즉, $(\mathrm{OTF})_{q=0}$의 경우를 비교하면,

$$(OTF)_{q=0} - OTF =$$

$$e^{-\frac{\omega^2}{8\sigma^2}}\left\{\frac{e^{\frac{q^2\omega_0^2}{2\sigma^2}}}{1+e^{\frac{q^2\omega_0^2}{2\sigma^2}}}(1-\cos\frac{q\,\omega_0\omega}{2\sigma^2})\right\} \geq 0$$

즉,

$$(OTF)_{q=0} \geq OTF$$

한 개의 Gauss 함수를 $e^{-q\omega_0|x|}$로 변조를 하지 않았을 때의 OTF, 즉, $(OTF)_{q=0} = e^{-\frac{\omega^2}{8\sigma^2}}$보다 변조된 Gauss 동함수에 의한 OTF 값이 같거나 작게된다.

V. 결 론

Gauss 함수 $e^{-\sigma^2 x^2}$를 지수함수 $e^{-q\omega_0|x|}$를 곱하여 변조하면, 역문제의 최초 함수 $S_0(x)$는

$$S_0(x) = e^{-\sigma^2 x^2 - q\omega_0|x|} \tag{23}$$

으로 표현되며, 변조하지 않은 Gauss 함수 $e^{-\sigma^2 x^2}$보다 더욱 예리한 선폭을 갖는다. 이 식을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} S_0(x) &= e^{\frac{q^2\omega_0^2}{4\sigma^2}} e^{-(\sigma|x|+\frac{q\,\omega_0}{2\sigma})^2} \\ &= e^{\frac{q^2\omega_0^2}{4\sigma^2}} e^{-\sigma^2(|x|+\frac{q\,\omega_0}{2\sigma^2})^2} \\ &= e^{\frac{q^2\omega_0^2}{4\sigma^2}} \times e^{-\sigma^2 x'^2},\ \text{단},\ x' = |x| + \frac{q\,\omega_0}{2\sigma^2} \end{aligned} \tag{24}$$

이므로, $e^{-q\omega_0|x|}$의 변조는 단지 $S_0(x)$를 $x=-\frac{q\,\omega_0}{2\sigma^2}$로 이동시킨데 불과하다.

(24)식에 의하여 $S_0(x)$를 Gauss 함수보다 더욱 예리하게, 즉, 반치폭을 작게하였으나, (15)식의 강도임펄스 $|S(x)|^2$에서 부터 OTF를 구하여 보면 OTF가 향상되지 않는다는 결론을 얻었다. 이 결론은 $S_0(x) \to A(\omega) \to S(x) \to |S(x)|^2 \to OTF$의 긴 과정으로 얻어졌으며 $S_0(x)$가 예리할수록 OTF도 향상될 것이라는 기대가 잘못이라는 사실을 증명하고 있다.

참 고 문 헌

[1] 이상수, 파동광학, 교학연구사, 서울, 1983.
[2] 조영민, 김종태, 이상수, 한국광학회지 **5**(3), 349(1994).
[3] 박성종, 이종진, 정창섭, 한국광학회지 **4**(1), 9(1993).
[4] P. J. Sementilli and M. S. Nadar, J. Opt. Soc. Am. A **10**(11), 2265(1993).
[5] P. C. Sun and E. N. Leith, Appl. Opt. **31**(23), 4857(1992).
[6] Chih-Chin Yang and M. A. Plonus, Appl. Opt. **32**(36), 7528(1993).
[7] 송영란, 이민희, 이상수, 한국광학회지 **7**(2), 89(1996).
[8] 송영란, 이민희, 이상수, 한국광학회지 **8**(1), 1(1997).

A modulated Gaussian pupil derived from diffraction inverse problem approach and the characteristics of the OTF of the system

Young Ran Song and Min Hee Lee
Department of Physics, Inha University, Inchon 402-751, Korea

Sang Soo Lee
Department of Physics, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Taejon 305-701, Korea

(Received : November 28, 1996)

The Gaussian diffraction pattern initially assumed in the diffraction inverse problem is further sharply defined by multiplying $e^{-q\omega_0|x|}$. The modified pupil function is obtained and the diffraction intensity distribution for the finite aperture $(-\omega_0 \sim +\omega_0)$ is obtained, and then the OTF is derived analytically. It is found the OTF is equal to or less than the $(\mathrm{OTF})_{q=0}$, namely the modulation is not useful. It is shown that the narrowing down the initial Gaussian diffraction pattern does not give the anticipated improvement in OTF and the reason is clarified.