

미분증가치의 최적성 평가법을 도입한 감쇠최소자승법에 의한 광학 설계*

김태희 · 김경찬* · 박진원 · 최옥식

영남대학교 물리학과

*계명대학교 물리학과

이윤우 · 조현모 · 이인원

한국표준과학연구원 영상그룹

(1996년 10월 31일 받음)

감쇠최소자승법을 최적화 기법으로 사용하여 사진 렌즈계와 픽업 광학계용 비구면 대물렌즈를 설계하였다. 최적화 초기에 임의로 감쇠계수를 선택한 다음 최적화 과정의 수렴 속도와 안정성을 높이기 위하여 미분증가치의 최적성 평가법을 도입하였다. 최적성 평가법을 만족하는 미분증가치를 사용한 경우 최적화의 수렴성과 안정성이 증진되었으며, 최적화에 의해 설계된 렌즈계들의 성능은 설계 목표치를 잘 만족하였다.

I. 서 론

감쇠최소자승법(damped least squares method)은 컴퓨터를 사용하는 광학 설계에서 가장 널리 사용하고 있는 최적화 기법이다.

감쇠최소자승법을 사용하는 최적화의 안정성과 수렴성은 최적화 초기에 선택한 감쇠계수와 해벡터 계산의 정확성에 의존한다. 적절한 감쇠계수를 선택하는 방법에 대한 연구는 Wynne와 Wormell,^[1] Jamieson,^[2] Faggiano,^[3] Matsui와 Tanaka^[4]등에 의해 발표되었다. 정확한 해벡터를 계산하는 방법에 대한 연구는 Grey,^[5,6] Matsui와 Tanaka^[7,8]등에 의해 발표되었다. 국내에서도 이들을 이용한 사진 렌즈계 설계에 대한 연구가 수행되었다.^[9]

그런데 감쇠최소자승법을 사용하는 최적화 과정에서는 감쇠계수를 선택하는 단계와 해벡터를 계산하는 단계의 중간 단계에서 설계 변수에 대한 오차 함수의 1계 미분을 계산하는데 이들은 다음 단계에서 수행하는 해벡터의 계산에 직접 영향을 미친다. 1계 미분 계수는 오차 함수, 설계 변수, 설계 변수에 대한 미분 증가치의 크기에 의존하나 이 단계에서 설계자가 조절할 수 있는 유일한 성분은 미분 증가치의 크기이다. 부적절한 미분 증가치는 정규 방정식의 불량 조건과 stagnation의 원인이 되어 최적화 과정의 안정성과 수렴성을 감소시킨다.^[10] 이에 Matsui와 Tanaka는 Jacobian 행렬의 제곱 ($A^T A$)의 고유값들의 중간치가 최적의 감쇠계수가 된다는 분석을 토대로 하여 주어진 미분증가치가 최적화 과정에 적합하지 여부를 평가하는 방법을 제시하였다.^[11]

본 연구에서는 감쇠최소자승법을 최적화 기법으로 사용하여 double-Gauss형 사진 렌즈계, triplet 형 사진 렌즈계와 광

자기 디스크 장치(MODD, magneto optical disk drive)용 픽업 광학계의 비구면 대물렌즈를 설계하였다. 임의로 감쇠계수를 설정한 다음 최적화 과정의 안정성과 수렴성을 높이기 위하여 Matsui와 Tanaka가 제시한 미분증가치 최적성 평가법을 도입하였으며, 감쇠계수와 ($A^T A$)의 고유값들의 분포의 상대적인 관계에 따른 최적화 과정의 수렴성과 안정성을 비교하였다.

II. 감쇠최소자승법

$F(X)$ 는 $f_i (i=1, 2, \dots, m)$ 를 성분으로 하는 오차 함수, X 는 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 을 성분으로 하는 설계 변수이다. 이때 merit 함수는

$$\phi = F^T F \quad (1)$$

로 정의한다. ϕ 를 최소로 하는 해벡터 ΔX 를 구하기 위하여 감쇠최소자승법에서는 식 (1)에 Newton-Raphson 법을 적용한다. Additive damping을 사용하는 감쇠최소자승법의 정규 방정식은

$$(A^T A + \rho I) \Delta X = -A^T F_0 \quad (2)$$

로 주어진다. 식 (2)에서 A 는 $a_{ij} = (f_i(x_j + \delta x_j) - f_i(x_j)) / \delta x_j$ 를 성분으로 하는 Jacobian 행렬이며, 스칼라량인 ρ 는 감쇠계수, I 는 단위 행렬이다.

식 (2)의 A 에 singular value decomposition을 적용하여

$$A = UTV^T \quad (3)$$

로 분해한다. 여기서 U 와 V 는 직교 행렬이고 T 는 A 의 singular value를 성분으로 갖는 대각 행렬이다. 식 (2)의 ($A^T A$)는 대칭 행렬이므로 eigenvalue-eigenvector decomposition^[12]을 적용하여

*본 연구가 수행되는 동안 도움을 주신 현대전자 산업연구소의 정진호 박사와 이종진님께 저자들의 고마운 마음을 전합니다.

$$A^T A = V S V^T \quad (4)$$

로 분해한다. 여기서 S 는 $(A^T A)$ 의 고유값($e_j, j=1, 2, \dots, n$)들을 성분으로 갖는 대각 행렬이다. 식 (2)에 식 (3)과 식 (4)를 대입하면

$$(S + \rho I) \Delta X' = Y \quad (5)$$

이 된다. 여기서 $\Delta X' = V^T \Delta X, Y = -T^T U^T F_0$ 이다. 식 (5)에서 $(S + \rho I)$ 는 대각 행렬이므로 $\Delta X'$ 의 j 번째 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta x_j' = \frac{y_j}{(e_j + \rho)} \quad (6)$$

식 (6)에 의해 해벡터 ΔX 는 감쇠계수와 $(A^T A)$ 의 고유값들에 의존함을 알 수 있으며, 이들의 의존성에 근거하여 감쇠계수(ρ)는

$$e_{min} < \rho < e_{max} \quad (7)$$

$$\rho \doteq e_{med} \quad (8)$$

인 조건을 만족해야 한다. 식 (7)과 식 (8)에서 $e_{min}, e_{med}, e_{max}$ 은 각각 고유값들의 최소치, 중간치, 최대치를 나타낸다.

III. 미분증가치의 최적성 평가법의 도입

아래의 (i)에서 (iv)로 정리되는 미분증가치의 최적성 평가법은 감쇠최소자승법을 사용한 최적화 과정에 다음의 순서에 따라 도입한다.

(1) 임의의 초기 감쇠계수(ρ_0)와 미분증가치($\Delta x_j, j=1, \dots, n$)

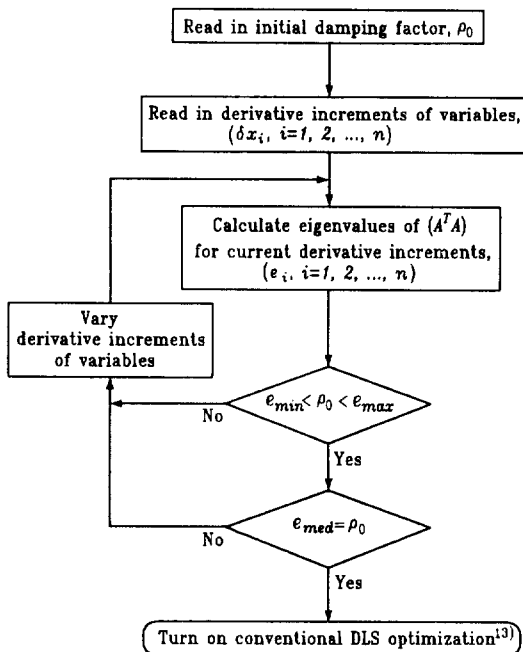


그림 1. Flow chart of routine that estimates adequate derivative increments of variables to DLS method.

를 읽어 들인다.

(2) Jacobian 행렬의 요소들과 $(A^T A)$ 의 고유값들을 계산한다.

(3) 미분증가치의 최적성 여부를 평가한다.

(4) 감쇠최소자승법을 사용한 최적화를 수행한다.

(3)단계에서 실행되는 미분증가치의 최적성 평가법은 아래의 조건들을 고려한다.

(i) $e_{min} < \rho_0 < e_{max}$, 인 경우는 (iii)을 수행한다.

(ii) $\rho_0 \leq e_{min}$, 혹은 $\rho_0 \geq e_{max}$, 인 경우는 (2)단계로 가서 미분증가치를 변화시킨다.

(iii) $\rho_0 \doteq e_{med}$, 인 경우는 (4)단계를 수행한다.

(iv) $\rho_0 \neq e_{med}$, 인 경우는 (2)단계로 가서 미분증가치를 변화시킨다.

이상의 과정을 그림 1의 순서도에 정리하였다.

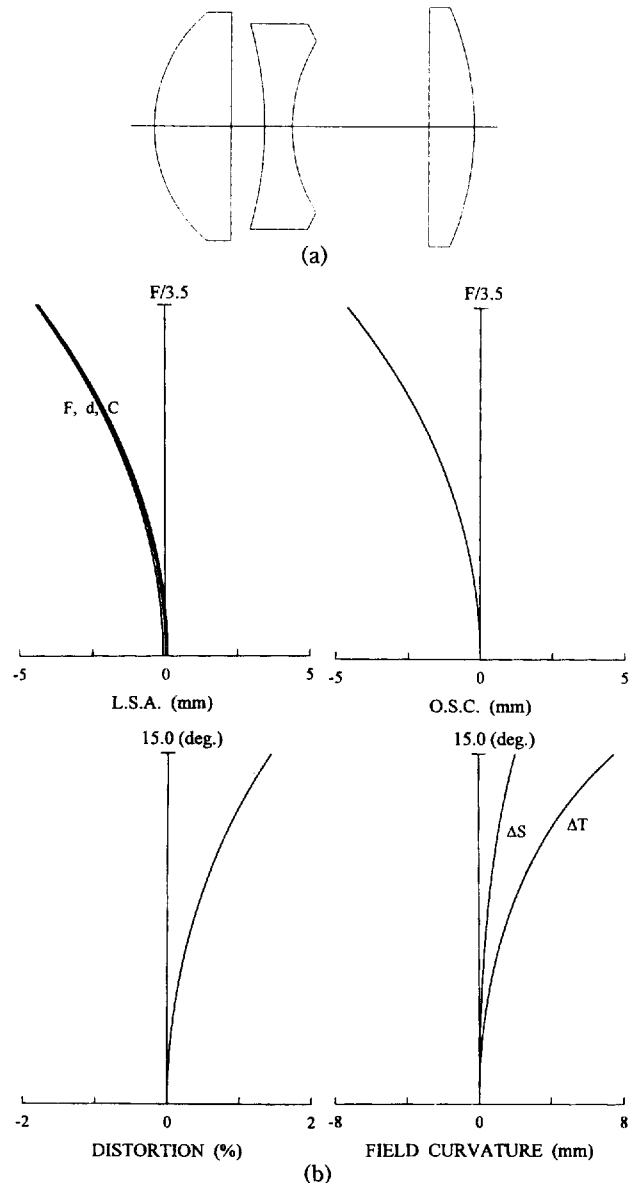


그림 2. The initial photographic lens in case 3. (a) configuration, (b) finite aberrations.

IV. 광학 설계에 적용

4.1. 사진 렌즈계 설계

앞에서 제시한 최적화 기법을 사용하여 double-Gauss 형 사진 렌즈계와 triplet형 사진 렌즈계를 설계하였다. Case 1과

표 1. Derivative increment of variables of A in design of photographic lens.

| Case | increment | $\delta x_j, (j=1,2,\dots, n)$ |
|--------|-------------|--------------------------------|
| Case 1 | increment 1 | 1.7×10^{-1} |
| | increment 2 | 1.0×10^{-5} |
| | increment 3 | 1.0×10^{-11} |
| Case 2 | increment 1 | 1.7×10^{-1} |
| | increment 2 | 1.0×10^{-5} |
| | increment 3 | 1.0×10^{-11} |
| Case 3 | increment 1 | 1.5×10^{-1} |
| | increment 2 | 1.0×10^{-5} |
| | increment 3 | 1.0×10^{-12} |

case 2의 초기 설계치는 이중용 등^[14]에 의해 발표된 double-Gauss형 사진렌즈계, 김기태 등^[15]에 의해 발표된 double-Gauss 형 사진 렌즈계의 초기 설계치와 각각 동일하게 두었다. 그림 2는 triplet 형 사진 렌즈계(case 3)의 초기 설계 형태와 수차이다.

이들 세가지 사진렌즈계의 최적화에서는 오차 함수로 유한 광선수차와 EFL와 BFL의 오차를 사용하였으며 목표로 왜곡 수차는 2%, 다른 유한광선수차는 0.2 mm이내로 두었고 설계 변수는 곡률 변수만을 사용하였다.

미분증가치의 최적성 평가법을 도입한 최적화에서 초기 감쇠계수는 최적화의 수렴성과 안정성에 크게 영향을 미치지 않으므로 임의로 1.0으로 두었다. 표 1에서 정리한 3개의 다른 미분증가치를 사용하여 3가지 사진렌즈계의 최적화를 실시하였다.

그림 3, 그림 4, 그림 5는 각기 다른 3개의 미분증가치에 대한 $(A^T A)$ 의 고유값들의 분포와 고유값들의 중간치를 나타내었다. Increment 1과 increment 3을 미분증가치로 사용한 경우에는 e_{med} 과 ρ_0 가 일치하지 않으나 increment 2를 미분증가치

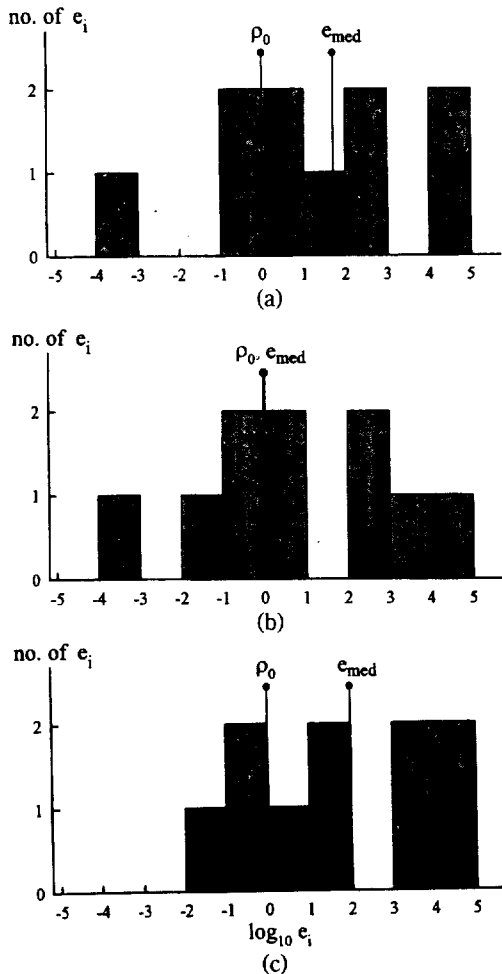


그림 3. Distribution of the eigenvalues of $(A^T A)$ in case 1. (a) increment 1, (b) increment 2, (c) increment 3.

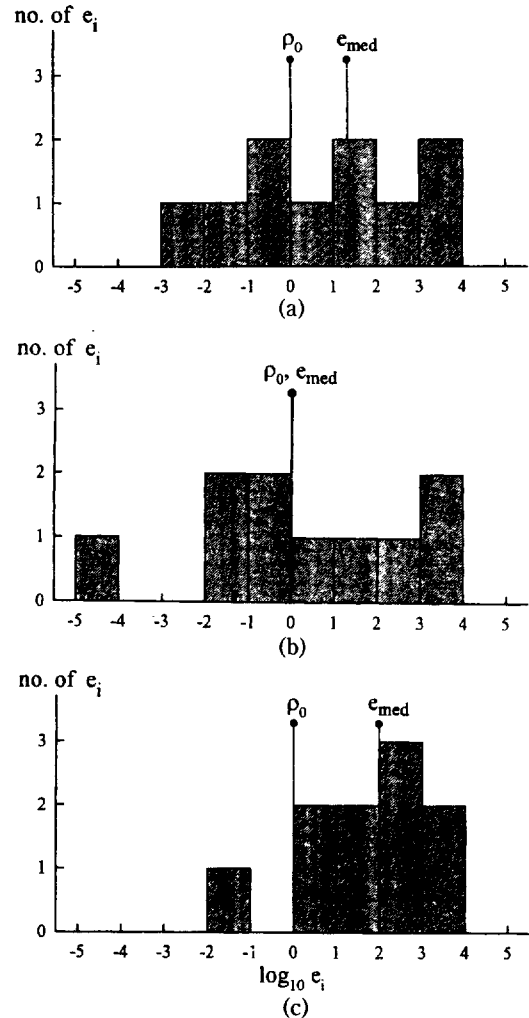


그림 4. Distribution of the eigenvalues of $(A^T A)$ in case 2. (a) increment 1, (b) increment 2, (c) increment 3.

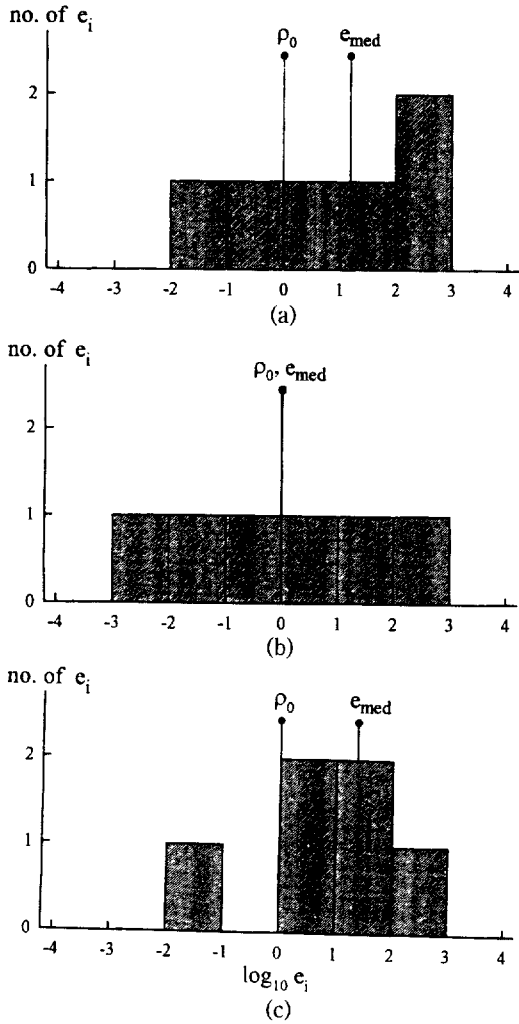


그림 5. Distribution of the eigenvalues of $(A^T A)$ in case 3. (a) increment 1, (b) increment 2, (c) increment 3.

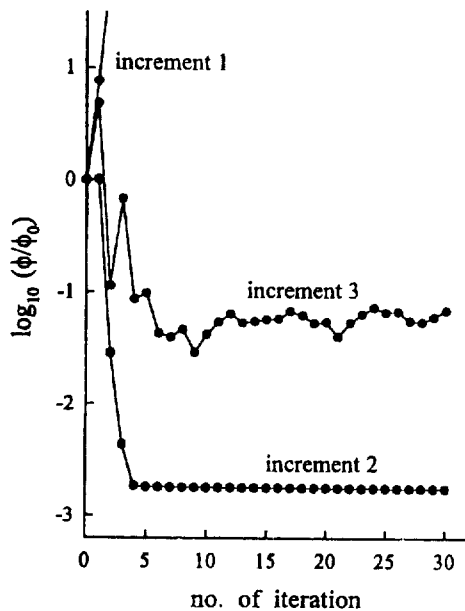


그림 6. Comparison of the rates of convergence and the stability of three different increments for optimizing case 1.

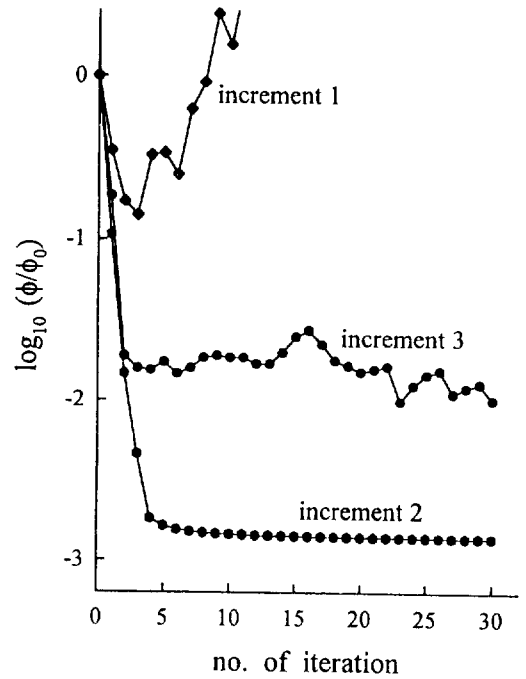


그림 7. Comparison of the rates of convergence and the stability of three different increments for optimizing case 2.

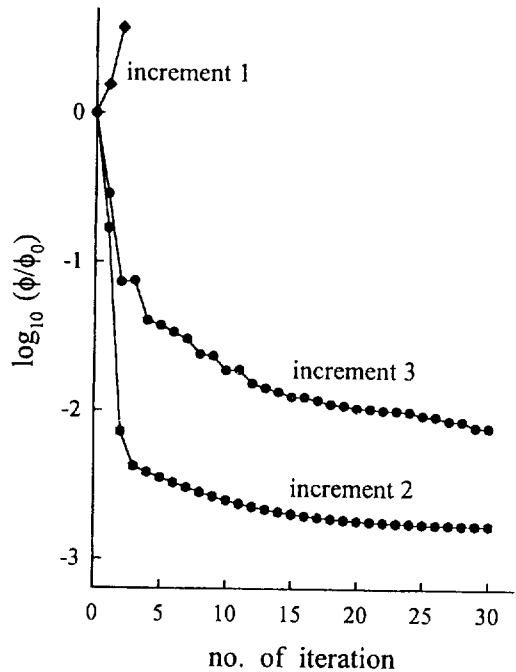


그림 8. Comparison of the rates of convergence and the stability of three different increments for optimizing case 3.

로 사용한 경우는 e_{med} 과 ρ_0 가 거의 일치하여 미분증가치 최적성 평가를 만족하고 있음을 알 수 있다.

3가지의 미분증가치에 대한 ϕ/ϕ_0 의 값들의 변동을 그림 6, 그림 7, 그림 8에 나타내었으며, ϕ_0 는 최적화 초기의 merit 함수 값이다.

너무 큰 미분증가치를 사용한 increment 1의 경우는 수치

계산 과정의 광선 추적 루틴에서 입사 광선과 구면사이의 교차점에서 ray missing 현상이 발생하였고, 너무 작은 미분치를 사용한 increment 3의 경우는 수치 계산 과정에서 round-off 오차가 발생하여 불완전한 수치 계산을 초래하였다. 그러나 e_{med} 이 ρ_0 와 일치하여 미분증가치의 최적성 평가법을 만족하

는 미분증가치를 사용한 increment 2의 경우는 안정하면서 빠르게 최적점에 도달하였으며 최적화에 의해 설계된 case 1, case 2, case 3의 최종 렌즈계의 형태와 이들의 수차 특성은 초기에 설정한 목표치에 도달하였다. Case 3에서 설계된 최종 렌즈계의 형태와 유한광선수차를 그림 9에 나타내었다.

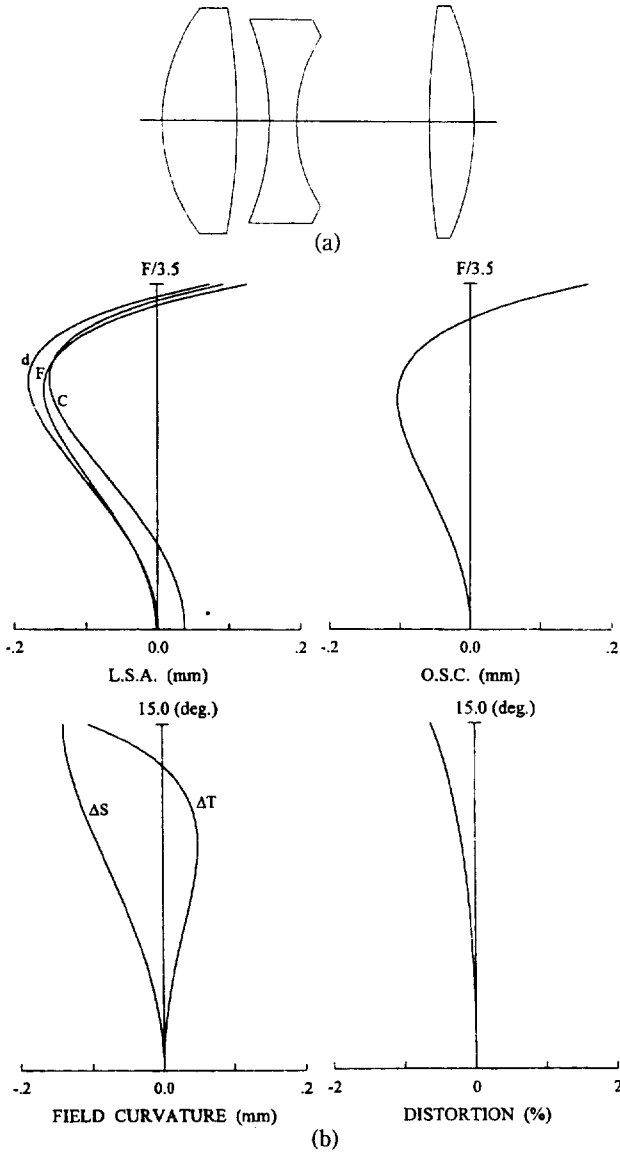


그림 9. The optimized photographic lens in case 3. (a) configuration, (b) finite aberration.

표 2. Initial design data of pickup lens. (unit : mm)

| # | c | d | $n_{0.78}$ | clear aperture | glass |
|---|-----------|-----|------------|----------------|---------|
| 1 | 0.46482 | 0.0 | 1.0 | 2.2 | air |
| 2 | -0.262263 | 2.5 | 1.55749 | 2.2 | S-BaL41 |
| 3 | plane | 1.1 | 1.0 | 5.0 | air |
| 4 | plane | 1.2 | 1.57346 | 5.0 | PC |

• EFL : 3.208 • N.A. : 0.46 • F-number : 1.06921
 • Wavelength : $0.78 \pm 0.015 \mu\text{m}$

4.2. 픽업 광학계용 비구면 대물렌즈 설계

앞에서 제시한 최적화 기법을 사용하여 MODD 광학계용 비구면 대물렌즈를 설계하였다. 초기 설계는 참고문헌¹¹⁾을 참고로 설계하였으며 초기 설계값은 표 2에 나타내었다. 파장 $0.78 \mu\text{m}$ 에서 회절효과가 고려된 MTF 곡선을 반시계각 $0^\circ, 0.57^\circ$ 에 대해 그림 10에 나타내었다.

여기서 비구면은

$$z = \frac{ch^2}{1 + \sqrt{1 - c^2(k+1)h^2}} + Eh^4 + Fh^6 + Gh^8 + Hh^{10} \quad (9)$$

에 의해 표현되며 z 는 접평면에서 비구면까지의 광축상의 거리, h 는 입사고, k 는 원추 상수이고 E, F, G, H 는 비구면계수이다.

최적화의 설계 변수는 양면의 원추 상수와 비구면계수를 사용하였다. 오차 함수로 사용한 45개의 유한광선수차중 축

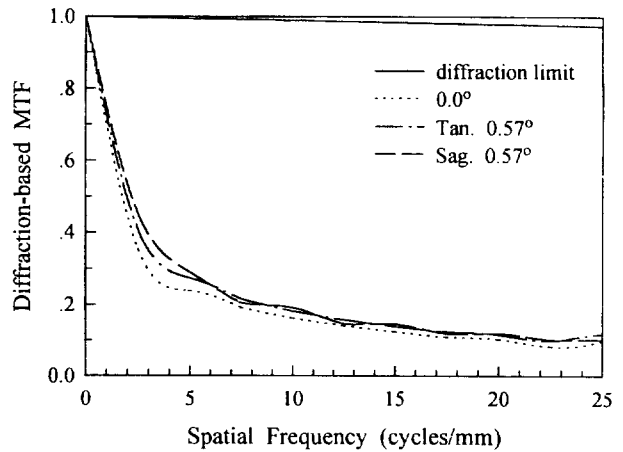


그림 10. The MTF of initial optical pickup lens.

표 3. Derivative increment of variables of A in design of pickup lens.

| Variable | increment 1 | increment 2 | increment 3 |
|--------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| δk_1 | 1.0×10^{-1} | 1.0×10^{-4} | 1.0×10^{-13} |
| δE_1 | 1.0×10^{-3} | 1.0×10^{-4} | 1.0×10^{-16} |
| δF_1 | 1.0×10^{-3} | 1.0×10^{-5} | 1.0×10^{-17} |
| δG_1 | 1.0×10^{-3} | 1.0×10^{-6} | 1.0×10^{-18} |
| δH_1 | 1.0×10^{-4} | 1.0×10^{-7} | 1.0×10^{-19} |
| δk_2 | 1.0×10^0 | 1.0×10^{-4} | 1.0×10^{-13} |
| δE_2 | 1.0×10^{-1} | 1.0×10^{-4} | 1.0×10^{-16} |
| δF_2 | 1.0×10^{-2} | 1.0×10^{-5} | 1.0×10^{-17} |
| δG_2 | 1.0×10^{-2} | 1.0×10^{-6} | 1.0×10^{-18} |
| δH_2 | 1.0×10^{-4} | 1.0×10^{-7} | 1.0×10^{-19} |

수차는 입사동의 반경을 10등분, 비축수차는 반시계각을 5등분하여 계산하였다. 최적화의 목표는 MODD 광학계용 대물

렌즈 설계규격¹⁶⁾을 만족하도록 하였다. 초기 감쇠계수는 임의로 1.0을 사용하였고 표 3에서 정리한 3개의 다른 미분증가치를 사용하였다.

3가지 미분증가치에 대한 ($A^T A$)의 고유값들의 분포와 고유값의 중간치를 그림 11에 나타내었다. Increment 2를 미분증가치로 사용한 경우에 e_{med} 과 ρ_0 가 일치하여 미분증가치의 최적성 평가법을 만족하였다. 그림 12은 3가지 다른 미분증가치에 대한 ϕ/ϕ_0 값들의 변동을 나타내었는데 미분증가치의 최적성 평가법을 만족하는 increment 2에서 가장 안정되면서 빠르게 최적점에 도달하였다.

최적화된 최종 렌즈의 설계값을 표 4에 나타내었다. 이에 대한 strehl ratio는 0.99 이상의 값을 얻었으며 spot diagram은 Airy disk 반경($0.61 \lambda/N.A.$)인 $1 \mu m$ 이내로 집중하였다. 그림

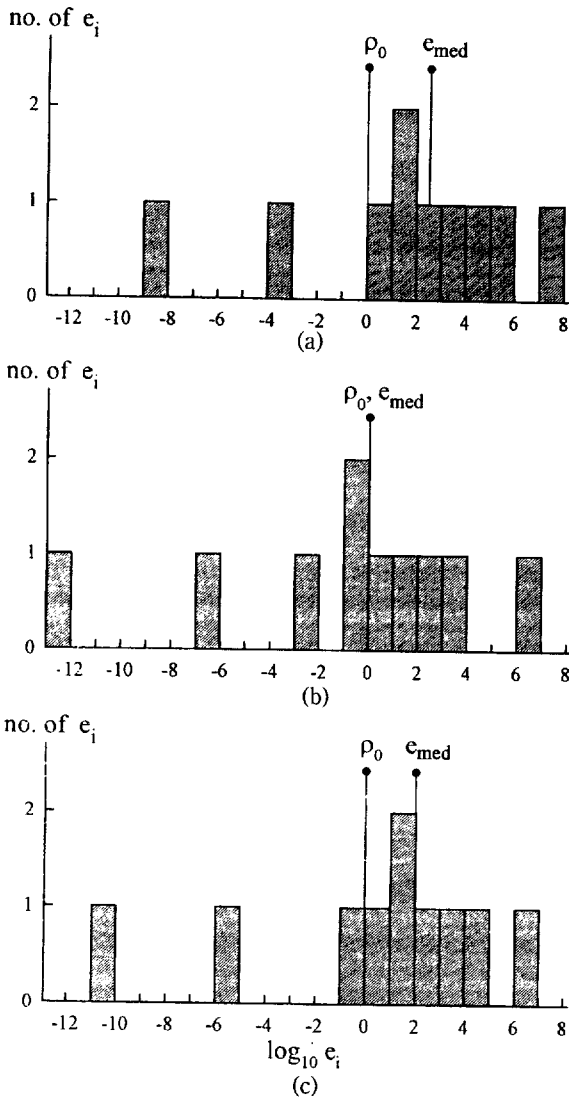


그림 11. Distribution of the eigenvalues of ($A^T A$) in design of pickup lens. (a) increment 1, (b) increment 2, (c) increment 3.

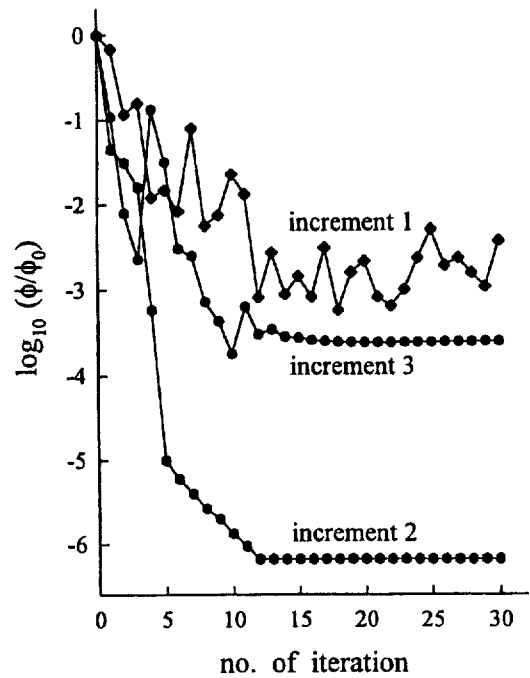


그림 12. Comparison of the rates of convergence and the stability of three different increments for optimizing optical pickup lens.

표 4. Design data of optimized pickup lens.

(unit : mm)

| # | c | d | $n_{0.78}$ | clear aperture | glass | conic constant | aspheric coefficients |
|---|-----------|-----|------------|----------------|---------|----------------|---|
| 1 | 0.46482 | 0.0 | 1.0 | 2.2 | air | -0.10429 | E -0.00452 F 8.2555 E-4 G 7.8945 E-5 H -3.6474 E-5 |
| 2 | -0.161163 | 2.5 | 1.55749 | 2.2 | S-BaL41 | -41.000 | E 0.00279 F 3.3305 E-4 G -6.6036 E-5 H -3.7093 E-6 |
| 3 | plane | 1.1 | 1.0 | 5.0 | air | | |
| 4 | plane | 1.2 | 1.57346 | 5.0 | PC | | |

• EFL : 3.208 • N.A. : 0.46 • F-number : 1.06921 • Wavelength : $0.78 \pm 0.015 \mu m$

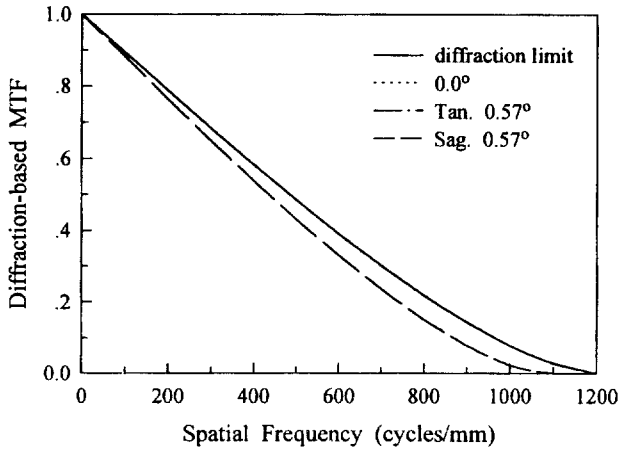


그림 13. The MTF of optimized optical pickup lens.

13의 MTF 곡선을 살펴보면 0°, 0.57°의 tangential 방향에 대한 MTF 곡선은 회절한계 곡선과 일치하여 회절한계의 성능을 가짐을 알 수 있다.

V. 결 론

최적화 기법으로 감쇠최소자승법을 이용하여 사진 렌즈계와 pickup 광학계용 비구면 대물렌즈를 설계하였다. 최적화 초기에 임의로 감쇠계수를 선택한 다음 최적화 과정의 수렴성과 안정성을 증가시키기 위하여 미분증가치의 최적성 평가법을 도입하였다.

본 연구의 최적화에서 미분증가치의 최적 크기는 ($A^T A$)의 고유값들의 분포와 감쇠계수와의 상대적인 관계에 의존하였

다. 또한 ($A^T A$)의 고유값들의 중간치와 감쇠계수가 거의 일치하는 미분증가치, 즉 미분증가치 최적성 평가법을 만족하는 미분증가치를 사용한 최적화 과정이 그렇지 않은 경우보다 안정되고 빠르게 수렴하였다.

최적화에 의해 설계된 4가지 렌즈계들은 초기에 설정한 설계 목표를 잘 만족하였다.

참 고 문 헌

- [1] C. G. Wynne, J. H. Wormell, *Appl. opt.*, **2**, 1233(1963).
- [2] T. H. Jamieson, *Optimization Techniques in lens Design*, Monographs on Applied Optics No. 5, American Elsevier Pub., New York(1971).
- [3] Faggiano, *Appl. Opt.*, **19**, 4226(1980).
- [4] H. Matsui, K. Tanaka, *Appl. Opt.*, **33**, 2411(1994).
- [5] D. S. Grey, *J. Opt. Soc. Amer.*, **53**, 672(1963).
- [6] D. S. Grey, *J. Opt. Soc. Amer.*, **53**, 677(1963).
- [7] K. Tanaka, *Appl. Opt.*, **29**, 4537(1990).
- [8] H. Matsui, K. Tanaka, *Appl. Opt.*, **31**, 2241(1992).
- [9] 김태희, 김경찬, *한국광학회지*, **6**, 178(1995).
- [10] J. McDonald, Y. Wang, *SPIE*, **655**, 49(1986).
- [11] H. Matsui, K. Tanaka, *Appl. Opt.*, **34**, 2411(1995).
- [12] C. L. Lawson, R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.(1974), p. 237.
- [13] D. P. Feder, *Appl. Opt.*, **2**, 1209(1963)
- [14] 이종웅, 이상수, *새물리*, **27**, 8(1987).
- [15] 김기태, 이종웅, *한국광학회지*, **4**, 372(1993).
- [16] 정진호, 설정식, *경남대학교 부설 기초과학연구소 연구논문집*, **7**, 343(1995).

Lens design by using damped least squares method with special procedure for estimating numerical adequacy of derivative increments of variables.

Tae Hee Kim, Kyung Chan Kim*, Jin Won Park and Ok Shik Choe
Department of Physics, Youngnam University, Kyungsan 712-749, Korea
 **Department of Physics, Keimyung University, Taegu 704-701, Korea*

Yun Woo Lee, Hyun Mo Cho and In Won Lee
Image Technology Group, Korea Research Institute of Standards and Science
P. O. Box 102, Yusong, Taejon 305-600, Korea

(Received : October 31, 1996)

Photographic lenses and an aspheric optical pickup-lens are designed by using damped least-squares(DLS) method. We start optimization with arbitrary initial damping factor. To improve the rate of convergence and the stability in optimization, we apply the special procedure that estimates numerical adequacy of derivative increments of variables to the DLS method. When the initial damping factor is almost equal to the median of series of eigenvalues, the convergence and the stability of the method significantly are improved. Optimized lenses have the performance of each target.