

## 홀로그래픽 간섭법을 이용한 편심하중에 의한 외팔보의 변형률분포 해석\*

박승욱 · 김홍석

대진대학교 물리학과

권혁홍 · 조동현

대진대학교 기계설계학과

(1997년 8월 8일 받음)

홀로그래픽 간섭법을 이용하여 외팔보에 편심하중이 가해졌을 때 발생하는 변형을 해석하였다. 물체에 휨(bending)과 미소한 비틀림(torsion)의 복합변형이 발생될 때 사선의 홀로그래픽 간섭무늬를 얻었으며, 간섭무늬 개수와 경사도를 이용하여 변위분포함수를 근사적으로 구하여 간편하게 변형률분포를 해석할 수 있는 방법을 제시하였다. 자유단 근처에서의 최대 휨량이  $9.7 \pm 0.6 \mu\text{m}$ 일 때, 고정단 부근에서 수직변형률의 최댓값  $\epsilon_x$ 는 약  $1.0 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon_y$ 는 약  $-0.3 \times 10^{-6}$ 이고, 전단변형률은 약  $1.3 \times 10^{-6}$ 으로 측정되었다. 본 방법의 신뢰성을 확인하기 위하여 FEM으로 변위 및 변형률을 이론적으로 해석하여 실험 결과와 비교해 보았다.

### I. 서 론

기계공학을 비롯한 공학 분야에서는 구조물의 응력분포를 알기 위해서 주로 유한요소법(FEM)으로 이론적 계산을 하고 있다. 그러나 대상체의 구속 조건이나 물성, 그리고 외력상태 등을 정확하게 알 수 없을 경우 실제 상황 그대로 묘사하기가 어려우므로 계산된 결과가 실제와는 차이가 있게 된다.

한편 레이저를 사용한 광학적 계측방법인 홀로그래픽 간섭법은 실제 외력이 작용하는 상태에서 비접촉식으로 변형량을 측정할 수 있다. 홀로그래픽 간섭법으로 대상체에 레이저를 비추면 미소한 변형에 대해서도 정교한 간섭무늬가 형성되는데, 이 무늬 등고선으로부터 대상체 전체의 변위 분포를 매우 정밀하게 측정할 수 있으므로 미소변위 측정에 관한 연구가 행해져 왔다.<sup>[1-4]</sup> 그러나 공학 분야에서 기계나 구조물의 정밀도, 안정성 및 수명 등을 평가하기 위해서는 물체가 하중을 받았을 때의 변형률 및 응력의 측정이 필수적이다. 변위값으로부터 변형률을 구하기 위해서는 수학적 처리 과정을 거쳐야 하는데, 특히 복잡한 변형에 대해서는 매우 복잡한 기법이 요구된다.<sup>[5]</sup>

본 연구에서는 외팔보에 편심하중을 가해졌을 때 발생하는 휨(bending)과 비틀림(torsion)의 복합된 변형에 대해 홀로그래픽 간섭법을 적용하였다. 특히 간섭무늬 해석 과정의 복잡한 수학적 처리를 단순화시키는데 주력하였다. 물체의 변형이 순수한 휨만에 의한 것이 아니고 미소한 비틀림이 동반된 경우 홀로그래픽 간섭무늬는 사선의 줄무늬를 이루게 됨을 보였으며, 간섭무늬 개수와 경사도를 이용하여 변위분포의 이원 3차 다항식을 근사적으로 결정하는 방법을 제안하였다. 변위분포함수를 2차 편미분함으로써 수직변형률 뿐만 아니라

전단변형률까지도 알아낼 수 있었다. 또한 이러한 결과들의 신뢰성을 확인하기 위하여 FEM으로 변위 및 변형률을 이론적으로 해석하여 실험 결과와 비교해 보았다.

### II. 홀로그래픽 간섭무늬로부터 변위, 변형률 해석

탄성체에 외력이 가해졌을 때 물체는 변형을 하게 되므로 물체 내의 각 점들은 움직이게 된다. 물체 표면에 레이저를 비추고 변형 전과 후에 산란된 파면을 서로 겹치도록 하면 두 파면 사이에는 변형에 의한 미소한 위상차가 발생되어 간섭이 일어나게 된다.

그림 1에서 점 S는 레이저의 위치이고 점 O는 물체 표면의 한 점이며, 점 F는 사진건판내의 한 점을 나타낸다. 변형이 일어나서 물체점 O가 점 O'로  $w$ 만큼 이동되면, 물체로부터 산란되어 점 F에 도달되는 빛의 경로는 선분 SO'F와 선분 SO'F의 길이 차만큼 달라지게 된다. 따라서 변형 전과 후의 홀로그램을 이중 노출시킨 필름에 다시 레이저를 비추어 물체의 상을 재생시키면 물체의 고정단으로부터 변형으로 인한 경로차가 레이저 파장의 정수배가 되는 지점마다 밝은 무늬가 형성된다. 즉, 그림 1에서 경로차는  $l_1 + l_2$ 가 되므로 다음과 같이 표현되어 진다.

$$w(\cos \alpha + \cos \beta) = n\lambda \quad (1)$$

여기서  $\alpha$ 는 변위방향에 대한 레이저의 입사각이고  $\beta$ 는 변위방향과 관측방향의 사이 각도이다. 따라서 간섭무늬 한 개에 해당되는 변위량은 다음과 같이 주어진다.

$$w_0 = \lambda(\cos \alpha + \cos \beta) \quad (2)$$

따라서 물체의 각 지점에서의 밝은 무늬의 개수를 세어 식(2)의 변위량을 곱해 주면 변위분포를 정밀하게 알아낼 수 있다.

\* 본 연구는 대진대학교 1995년도 교내연구비 지원을 받아 이루어졌음.

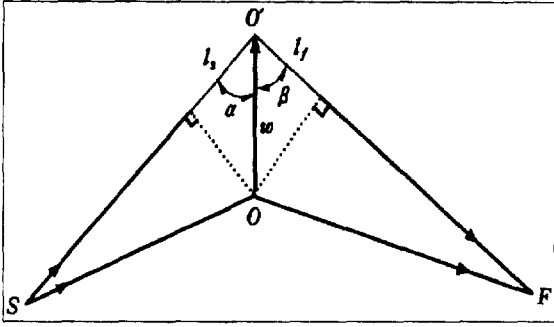


그림 1. The path length difference caused by displacement of an object point.

홀로그래픽 간섭법에 의하여 측정되는 변위의 크기는 매우 작기 때문에 소변형이론을 기초로 하여 변형률과 변위의 관계를 유도할 수 있다. 물체의 변형률은 변위의 도함수와 관련되는 텐서양으로 9개의 요소로 구성되어 있으나 대칭성 때문에 6개 요소만이 독립적이다. 물체 내의 임의의 점에서 물체의 아주 작은 요소가 늘어나거나 줄어드는 양을 나타내는 수직변형률의 세 요소는 식(3)으로 정의되고, 물체의 아주 작은 요소가 찌그러지는 양을 나타내는 전단변형률의 세 요소는 식(4)로 정의된다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4)$$

여기서  $u, v, w$  는  $x, y, z$  각 방향으로의 변위성분을 나타낸다. 따라서 홀로그래픽 간섭무늬로부터 각 지점의 변위성분을 측정하면 식(3)과 (4)에 의해 수직변형률과 전단변형률을 알아낼 수 있다.

홀로그래픽 간섭법으로 변형을 측정하는 경우에 레이저 빛이 비추어진 물체의 표면에 대한 간섭무늬를 얻게 된다. 따라서 실험 시편이나 간단한 구조물의 2차원의 변형상태를 대상으로 하는 경우가 많이 있다. 평면변형이란 얇은 판이 두께 방향으로 하중을 받고 있을 때를 나타내므로 두께 방향( $z$ )에 관련된 변형률은 0이 되고  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  만이 존재하게 된다. 이러한 평판의 변형률은 고체 역학의 이론에 따라 평판에 수직인 방향의 변위성분  $w$ 로부터 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $h$ 는 평판의 두께를 나타낸다.

### III. 유한요소법에 의한 변위, 변형률 계산

홀로그래픽 간섭무늬로부터 구한 결과의 신뢰도를 높이기

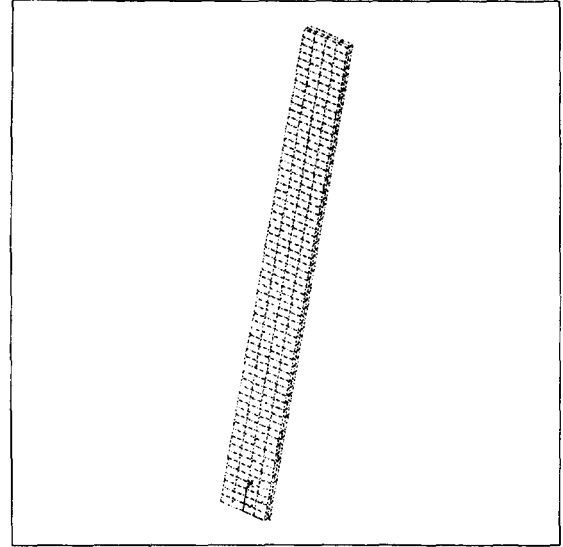


그림 2. Finite element mesh for strain analysis of cantilever beam.

표 1. The specification and material properties of cantilever(AI 2024)

Spec. & material property	value	unit
Length	250	mm
Width	25	mm
Thickness	5	mm
Young's modulus (E)	73.1	GPa
Poisson's ratio ( $\nu$ )	0.355	-

위하여 유한요소법에 기초를 둔 ANSYS-FEM Code<sup>6,7)</sup>를 사용하여 변형된 외팔보의 변위분포, 변형도 성분들을 수치적으로 계산해 보았다. SOLID 45인 8절점의 3차원 요소를 사용하여 솔리드 모델링을 행하였으며, 전체 절점수와 요소 수는 각각 990개와 520개로 구성된 구조이다(그림 2). 모델의 아래 부분은 실제의 구속 조건과 동일하게 변위를 고정시켰고, 마이크로미터에 의해 가해진 최대 처짐량( $w_{max}$ )을 발생시키는 데 필요한 집중 하중은 다음 식에 의해 구하여 졌다.

$$F = \frac{3EI w_{max}}{L^3} \quad (6)$$

여기서,  $E$ 는 물체의 탄성계수,  $I$ 는 2차 관성모멘트,  $L$ 은 고정단으로부터 마이크로미터를 가한 지점까지의 거리이다.

### IV. 홀로그래피 실험장치 및 간섭무늬 관측

대상물체로서 외팔보(cantilever beam)를 표 1과 같이 제작하였다. 외팔보의 한쪽 끝을 나사로 단단히 고정하여 고정단의 경계조건을 만족하도록 하였으며, 자유단에 힘을 가하여 변형을 일으켰다. 그림 3과 같이 외팔보 평판의 중앙을 마이크로미터로 밀어 순수한 휨만을 발생시키고 오른쪽 옆을 나사로 약간 밀어 비틀림의 양을 미소하게 부가하여 편심하중

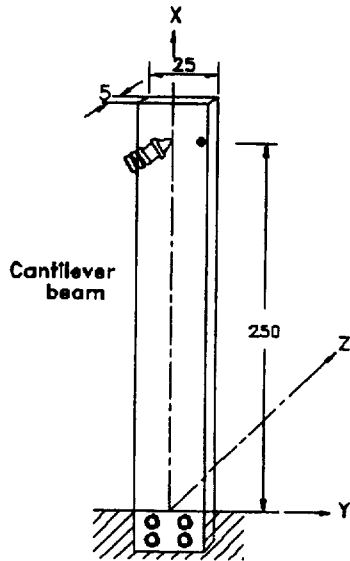


그림 3. Schematic diagram of the cantilever beam.

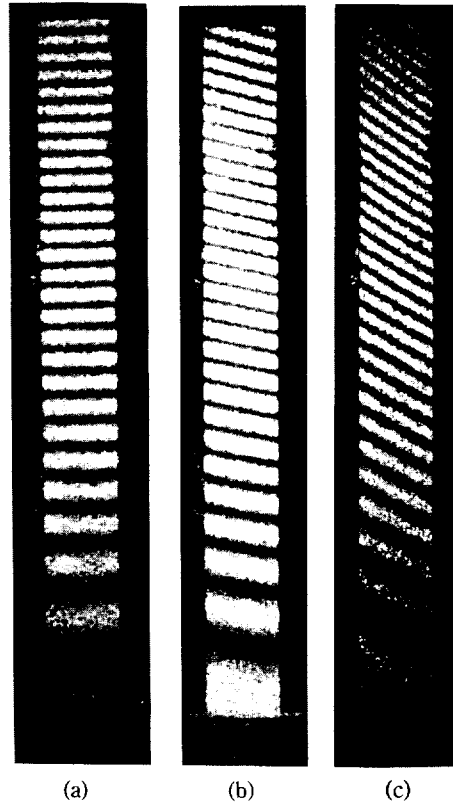


그림 5. Photographs of holographic fringe patterns subjected to various forces (a) centric force, (b),(c) eccentric forces.

향으로 평행한 무늬를 볼 수 있는데 이로써 외팔보 폭 방향의 각 지점은 동일하게 휘었음을 확인할 수 있다. 그러나 사진의 위쪽으로 갈수록 간섭무늬의 간격이 좁아지는데 이는 자유단으로 갈수록 처짐의 변화율이 점점 커짐을 보여준다. 따라서 임의의 y지점에서 x축을 따라 간섭무늬의 개수 및 밝은 지점의 좌표를 측정하면 모든 y값에 대해 동일하므로 변위분포함수  $w(x)$ 만으로 식(5)에 의해 변형률  $\epsilon_x$ 를 간단히 구할 수 있다.

일반적으로 대상체에 정확한 중심하중을 가하기 어려워 휨과 비틀림이 동반되는 편심하중이 가해지기 때문에 간섭무늬가 그림 5(a)와 같이 평행하게 되지 않는다. 그림 5(b)와(c)는 외팔보 자유단의 중심에 마이크로미터로 하중을 줌과 동시에 오른쪽 가장자리 부분을 나사로 눌러서 편심하중이 가해지게 하여 얻은 간섭무늬이다. 그림 5(c)는 그림 5(b)에 비해 약 2배의 비틀림을 부가한 것이다. 비틀림이 생길수록 경사진 무늬가 형성되는데, 이는 오른쪽은 눌러서 무늬 개수가 증가하고 왼쪽은 들어서 무늬 개수가 감소하였기 때문이다. 이러한 경우에는 수직변형을 뿐만 아니라 전단변형률도 발생하게 되므로 평면적 변위분포함수  $w(x,y)$ 를 구해야 한다. 이를 위해서는 영상처리기법을 도입해야 할뿐 아니라 이원 다항식 fitting 방법을 사용하여야 하므로 매우 복잡해진다. 본 연구에서는 간섭무늬의 간격과 경사도를 이용하여 근사적으로  $w(x,y)$ 을 구하는 방법을 제안하였다.

그림 5(c)의 간섭무늬를 해석하여 외팔보의 x축상 점들의 휨

이 가해지도록 하였다.

그림 4에 나타낸 홀로그래픽 간섭법 실험장치에 외팔보의 중심을 원점으로 하여 변위가 +z방향으로 발생되도록 하였다. 레이저 빛을  $\alpha=15^\circ$ 가 되도록 물체에 비추었으며, 사진건판은 -z방향으로 떨어진 지점에 장착하여  $\beta=0^\circ$ 가 되도록 하였다. 사용한 He-Ne 레이저의 출력은 20 mW이고 사진건판에서의 기준광과 물체광의 세기 비는 5:1이 되도록 조절하여 변위발생 전과 후의 홀로그램을 이중으로 기록하였다. 현상 처리한 후 다시 제자리에 장착시키고 기준광만을 비추면서 사진건판을 통해 간섭무늬로 덮인 외팔보상을 재생시켰다.

### V. 간섭무늬 개수와 경사도에 의한 변위함수 및 변형률 분포 해석

그림 5(a)는 외팔보 자유단의 가운데 지점에 마이크로미터로 중심하중을 가해 z축 방향으로 약 10  $\mu\text{m}$ 의 순수한 휨만을 발생시켰을 때 얻은 간섭무늬의 사진이다. 외팔보의 폭 방

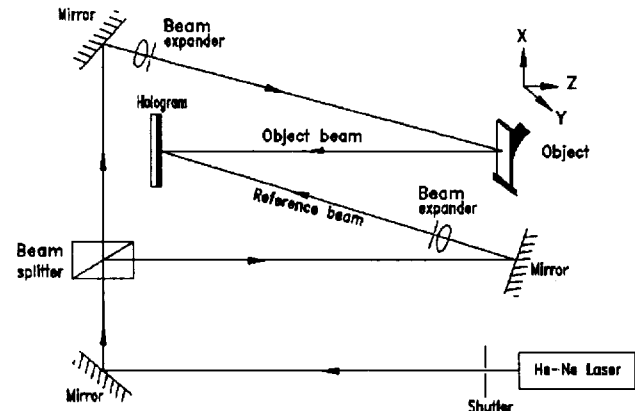


그림 4. Schematic diagram of the experimental setup.

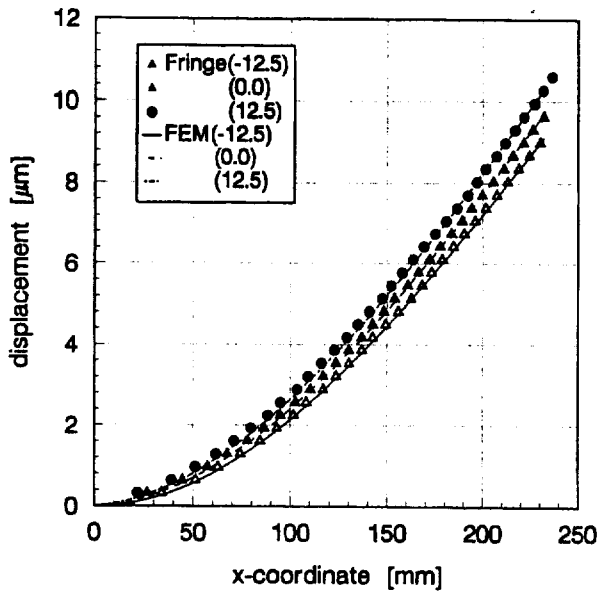


그림 6. Comparison of the displacements obtained from the holographic fringe pattern (Fig. 5(c)) and the FEM theoretical result.

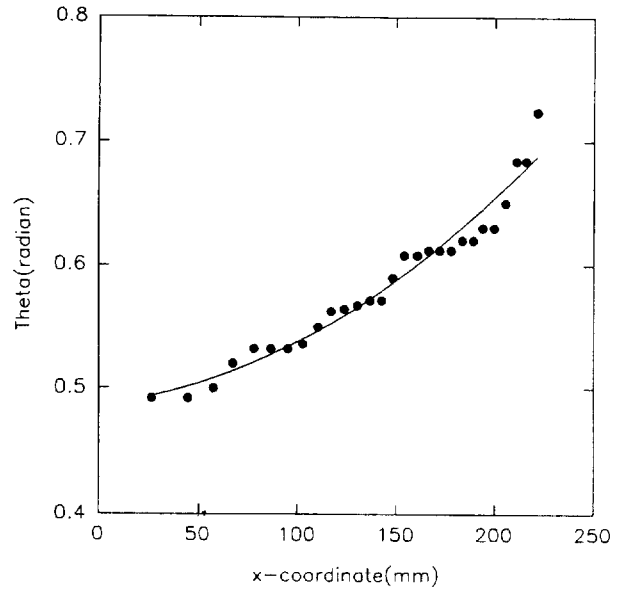


그림 7. Measured angles of interference fringe patterns in 그림 5(c).

량을 정밀하게 측정 한 결과를 그림 6에 나타내었다. 그림 4의 실험장치에서  $\alpha = 15^\circ, \beta = 0^\circ$ 가 되므로 이를 식(2)에 대입하여 간섭무늬의 개수가 증가할수록 각각  $w_0 = 0.32\mu\text{m}$ 씩 증가시켰다. ●, ▲, 그리고 △ 표시는 외팔보의 오른쪽 가장자리( $y = 12.5$ ), 가운데( $y = 0$ ), 그리고 왼쪽 가장자리( $y = -12.5$ )지점의 변위를 나타낸다. 자유단 부근에 마이크로미터 고정대가 설치되어 있어 고정단으로부터 약  $x = 232\text{mm}$ 까지만 간섭무늬를 볼 수 있었다. 최대힘이  $y = -12.5$ 에서는  $9.2\mu\text{m}$ ,  $y = 0$ 에서는  $9.7\mu\text{m}$ , 그리고  $y = 12.5$ 에서는  $10.3\mu\text{m}$ 로써 미소한 차이까지도 측정 가능하였다. 동일량의 변위가 일어난 지점의 x좌표를 비교해 보면 ●는 ▲보다 감소되고 △는 ▲보다 증가된 곳에 위치해 있다. 이는 오른쪽과 왼쪽의 휨량이 달라져서 간섭무늬가 사선을 이루고 있음을 정량적으로 나타내고 있다.

측정된 결과를 탄성체의 이론적 휨곡선과 비교해 보기 위하여 유한요소법(FEM)으로 변위를 계산하였다. 이때 실제로 가한 비틀림량을 알 수 없으므로  $x = 232\text{mm}$ 에서의 최대힘이 측정치와 같을 때 각 x지점에서의 휨양을 계산하여 곡선을 구하였다. 그림 6의 실선이 FEM으로 계산한 결과로써 그래프의 전체적인 분포가 측정 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다.

이원 다항식  $w(x,y)$ 를 구하기에 앞서 그림 6에서 중앙에 위치하는  $y = 0$ 인 x축상 점들의 변위량(▲표시)을 나타내는 다항식  $w(x)$ 를 SAS 패키지(통계 소프트웨어)를 사용하여 다항회귀분석(polynomial regression)법으로 3차식까지 결정하였다.

$$w(x) = -4.022 \times 10^{-10}x^3 + 2.664 \times 10^{-7}x^2 + 8.614 \times 10^{-7}x + 1.141 \times 10^{-4} \quad (7)$$

비틀림량이 미소할 경우에는 그림 5와 같이 간섭무늬를 사선

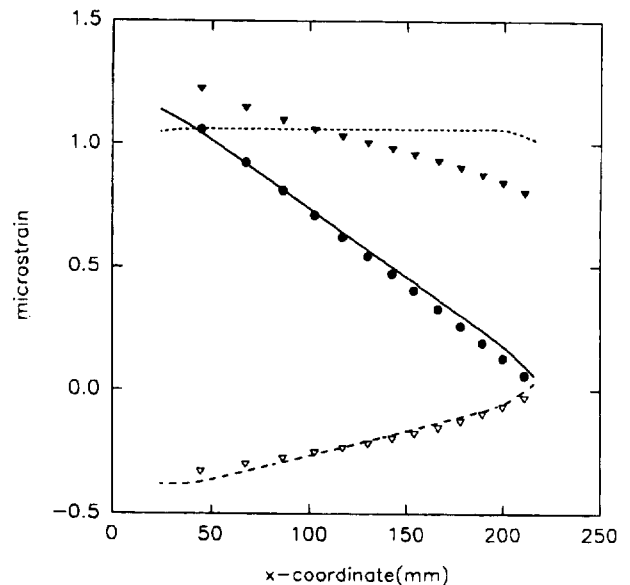


그림 8. Comparison of the strain distributions obtained from the holographic fringe pattern and the FEM theoretical result.

으로 고려할 수 있어 ▲의 위치가 x일 때 같은 무늬선상에 위치하는 지점들(예로써 ●나 △)의 x좌표는 다음과 같이 일반화시킬 수 있다.

$$x \rightarrow x + y \tan \theta \quad (8)$$

여기서  $\theta$ 는 간섭무늬가 y축과 이루는 경사도이다. 그림 7은 그림 5(c)의 간섭무늬 각 위치에서 각도를 측정한 결과이며, 이를 연결한 곡선의 다항식은 다항회귀분석법에 의해 다음과 같이 2차식으로 구하였다.

$$\theta = 3.561 \times 10^{-6}x^2 - 4.201 \times 10^{-6}x + 0.490 \quad (9)$$

식(8)과(9)로써 식(7)을 나타내면 외팔보 평면의 변위분포

식  $w(x,y)$ 의 이원 다항식은 다음과 같이 결정될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 w(x,y) = & -4.021 \times 10^{-10} \\
 & [x + y \tan(3.561 \times 10^{-6}x^2 - 4.201 \times 10^{-6}x + 0.49)]^3 \\
 & + 2.664 \times 10^{-7} \\
 & [x + y \tan(3.561 \times 10^{-6}x^2 - 4.201 \times 10^{-6}x + 0.49)]^2 \\
 & + 8.614 \times 10^{-7} \\
 & [x + y \tan(3.561 \times 10^{-6}x^2 - 4.201 \times 10^{-6}x + 0.49)] \\
 & + 1.141 \times 10^{-4} \quad (10)
 \end{aligned}$$

식(10)에  $y = -12.5$  mm, 또는  $y = 12.5$  mm를 대입하여  $w(x, -12.5)$ 나  $w(x, 12.5)$ 를 구하면 그림 6의 곡선들과 정확하게 일치함을 확인할 수 있다.

그림 8에는 식(10)을 식(5)에 따라 편미분하여 구한 평판 중심축( $x, 0$ )의 변형률 분포와 FEM해석 결과를 비교하여 나타내었다. 실험결과와 마크표시로 하였으며 FEM 이론해는 선으로 나타내었다. FEM 모델링시 고려한 외팔보의 고정단의 구속조건과 실제 나사로 고정된 상태가 일치되기 어려우므로 고정단과 자유단 부근에서는 두 결과를 비교하지 않았다.  $x$ 축방향의 변형률  $\epsilon_x$ 는 인장변형임을 알 수 있으며, 고정단 근처가 약  $1.0 \times 10^{-6}$ 으로 최대 값을 지니고  $x$ 축을 따라 거의 선형적으로 감소하다가 자유단 근처에서 0이 되었다. 또한  $y$ 축방향의 변형률  $\epsilon_y$ 는 변형으로 인한 외팔보 폭의 수축률을 의미하는데 고정단 근처가  $-0.3 \times 10^{-6}$ 으로  $\epsilon_x$ 에 비해 매우 적다. 전단변형률은 미소한 비틀림량에 비해  $\epsilon_x$ 와 거의 같은 크기인  $1.3 \times 10^{-6}$ 가 발생되었다. 수직변형률은 실험결과와 FEM결과가 매우 잘 일치하나 전단변형률은 약간의 오차가 있음을 볼 수 있다. 이러한 오차는 간섭무늬의 각도변화 관계식을 3차식으로 구할 경우 훨씬 감소된다. 따라서 영상처리 기법을 사용하여 간섭무늬 간격 및 각도를 보다 정밀하게 측정하면 정확도를 높일 수 있을 것이다.

## VI. 결 론

본 연구에서는 외팔보에 편심하중을 가했을 때 발생하는 휨과 비틀림의 복합된 변형해석을 위하여 홀로그래픽 간섭법을 적용하였다. 특히 간섭무늬 해석에 있어 수학적 처리를 단순화시켜 microstrain 크기의 수직변형률과 전단변형률을 정밀하게 측정하였다.

외팔보에 중심하중이 정확하게 가해지면 순수한 휨만이 발생되어 외팔보 폭 방향으로 평행한 줄무늬가 형성되는 반면에 약간의 편심하중이 가해지면 휨과 비틀림의 복합변형이 일어나서 사선의 줄무늬를 얻게 된다. 따라서 외팔보 전 평면에 대한 간섭무늬의 명암분포 측정 및 복잡한 수학적 처리가 요구되나, 본 연구에서는 외팔보 중심축의 변위만을 측정 후 무늬의 경사도를 이용하여 전 평면의 변위분포를 근사적으로 결정할 수 있었다. 또한 평판의 변위-변형률 관계식에 의해 변위분포함수를 2차 편미분함으로써 변형률 분포를 구하였다. FEM으로 변위 및 변형률을 이론적으로 해석하여 실험결과와 잘 일치함을 보임으로써 제시된 방법의 신뢰성을 확인하였다.

## 참 고 문 헌

- [1] 박승욱, 권영하, 유성규, 한국광학회지, **1**, 12(1990)
- [2] Schwider, J., Appl. Opt. **28**, 3889(1989)
- [3] H. J. Lee, W. B. Hwang, H. C. Park, 대한기계학회, **16**, 864(1992)
- [4] 주진원, 권영하, 박승욱, 대한기계학회 **17**, 1208(1993)
- [5] 주진원외, 한국표준과학연구원, KRIS-93-093-IR (1993)
- [6] ANSYS, *User's Guide for Revision 5.1*, Swanson Analysis Systems, Inc.,(1995)
- [7] H. H. Kwon, S. H. Kim, '94 KOREA ANSYS User's Conference, 419(1994)

## Strain Analysis of Cantilever Beam under Eccentric Force using Holographic Interferometry

S.O. Park and H.S. Kim

*Dept. of Physics, Dae Jin University, Pochon 487-800, Korea*

H.H. Kwon and D.H. Cho

*Dept. of Mechanical Design Engineering, Dae Jin University, Pochon 487-800, Korea*

(Received: August 8, 1996)

Using holographic interferometry, strain distributions for a cantilever beam subjected to the eccentric force can be analysed. Holographic fringe pattern shows inclined straight lines for the composite deformation of bending and torsion. Using these inclinations of the fringe pattern, 3rd order polynomial of plane displacements can be determined without difficulty. As the result, both of axial and shear strain distribution can be obtained from the second partial derivatives of this polynomial. These results agree well with FEM.