

다단 티모센코 원형단면봉의 연속 고유모우드

전 오 성*

Mode Shape of Timoshenko Beam Having Different Circular Cross-Sections

Oh Sung Jun*

Abstract

The study suggests a method to analyze the vibration of the multi-stepped beam having the different circular cross-sections. The rotatory inertia, the shear deformation and the torque applied at both ends of the beam are considered in the governing equation. The complex displacement and the variable separation are introduced to derive the solution of the equation of each uniform beam element having constant cross-section. Then boundary conditions are applied to solve the total system. This method uses the mathematically exact solutions unlike numerical method such as the finite element method in solving the problem having the simultaneous differential equations of Timoshenko beam theory. The natural frequencies and the corresponding mode shapes are precise, especially the mode shapes are continuous.

Keywords : Timoshenko beam(티모센코 보), Complex displacement(복소수 변위), Torque(토크), Natural vibration(고유진동), Vibration mode(진동모우드)

1. 서론

보 형태의 요소는 구조물에 많이 사용되는 요소로, 공작기계등에서는 특히 독립된 요소로 사용되면서 진동 원인이 될 수 있는 가능성이 많이 있다. 보 요소 진동은 주로 횡방향 진동을 발생하는 특징을 갖고 있다.

보 요소의 횡방향 거동을 표현할 때 고려하는 현상에 따라 보 이론이 구별된다. 보의 단면방향 크기와 길이방

향 크기의 비가 1/10 이하에서는 오일러-베르누이(Euler-Bernoulli) 보 이론을 일반적으로 적용한다.^[1] 그러나 신장율이 커질수록 회전관성(rotatory inertia)과 전단변형(shear deformation)의 효과가 고려되어야 한다. 티모센코(Timoshenko) 보 이론은 이러한 현상들을 모두 고려한 이론이다. 주어진 보에 대해서도, 회전관성과 전단변형은 고차 고유진동수를 낮추는 역할을 하는 효과가 있다.

* 전주대학교 기계공학과

티모센코 보 이론은 공간에 4차와 2차 미분항 및 시간에 대한 4차와 2차 미분항이 동시에 존재하기 때문에 해석적 풀이 방법이 일반화되어 있지 않다. 뿐만 아니라 단면이 서로 다른 여러개의 보가 연속되어 있는 경우에는 해석이 더욱 어려워진다. 유한요소법(Finite element method)은 이러한 연속보의 해석에 사용되고 있다. 유한요소법에 의한 고유진동해석이 일반적이지만, 이로인해 구해진 고유모우드는 설정된 각 절점을 직선으로 연결한 선분의 집합이 된다.

본 연구에서는 티모센코 보 이론에다 양단 토오르크를 고려하여 운동방정식을 다루고 있다. 이 식은 공간에 대한 3차 및 1차 미분항이 추가로 생성되어 가장 일반적인 4차 미분방정식 형태를 갖는다. 또한 단면이 다른 여러개의 원형단면 봉이 연속으로 연결된 다단 봉을 해석할 수 있는 방법을 제시하고 있다. 연구에서는 복소변위를 도입하여 독립변수가 1개인 일반화된 4차 편미분방정식을 만들고 변수분리하여 상미분방정식으로 나타내어 미분방정식을 풀고 경계조건을 부여하여 다단봉을 해석하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 운동방정식을 수학적으로 원형 그대로 사용하였다는 것과 구해진 모우드가 연속곡선으로 표시된다는 특징을 갖는다. 그 결과 고유진동수와 고유모우드가 더욱 신뢰성이 있고, 연속 고유모우드는 응력분포에 대한 정보를 제공하게 된다.

2. 운동방정식

해석에 사용할 모형은 서로 다른 여러개의 원형 단면 봉이 연속되어 있는 복합체이다. 해석모형을 일반적 형태로 나타내기 위해 회전관성, 전단변형, 축방향 토오르크를 고려하였다.

길이방향 좌표를 x , 수평과 수직방향 변위를 y 와 z 로 각각 나타내고, 회전관성과 전단응력을 고려하여 양단에 토오르크가 부여된 봉의 운동방정식을 표현하면 다음과 같다.⁽²⁾

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{EI\rho}{xG} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + T \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{T\rho}{xG} \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho A r_o^2 \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{xG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} \right) = 0 \quad (1a)$$

$$EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{EI\rho}{xG} \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial t^2} - T \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{T\rho}{xG} \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \rho A r_o^2 \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{xG} \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} \right) = 0 \quad (1b)$$

여기서 T 는 양단에 부여된 토오르크를 나타내며, E 와 G 와 ρ 는 재료의 종탄성계수와 횡탄성계수 및 밀도를 나타낸다. I 와 A 는 봉 단면의 면적모멘트와 면적을 나타내며, r_o 와 x 는 단면의 회전반경(radius of gyration)과 형상계수(form factor)를 나타낸다.

이들 운동방정식은 독립변수 y 와 z 가 연속되어 있는 특징이 있다. 이들 운동방정식을 복소수 공간에서 표현하면, x - y 와 x - z 평면 상의 두 개의 식을 하나로 축약할 수 있다. 즉,

$$u(x, t) = y(x, t) + jz(x, t) \quad (2)$$

를 이용하면, 운동방정식은

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{EI\rho}{xG} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - jT \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + j \frac{T\rho}{xG} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho A r_o^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{xG} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) = 0 \quad (3)$$

로 표현된다. 이 방정식은 독립변수가 u 하나인 미분방정식이다. 이를 다시 x 에 대한 미분차수 크기로 정리하면,

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - jT \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \left(\frac{EI\rho}{xG} + \rho A r_o^2 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + j \frac{T\rho}{xG} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \frac{\rho^2 A r_o^2}{xG} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

이 된다. 이는 복소수 4차 편미분방정식이다.

3. 해석방법

3.1 변수 분리

식(4)의 해를

$$u(x, t) = U(x) \cdot e^{j\omega t} \quad (5)$$

로 가정하고 대입하면 다음과 같이 변수분리된 식을 구할 수 있다.

$$EI \frac{d^4 U}{dx^4} - jT \frac{d^3 U}{dx^3} + \left(\frac{EI\rho}{xG} + \rho A r_o^2 \right) \omega^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - j \frac{T\rho}{xG} \omega^2 \frac{dU}{dx} + \left[\frac{\rho^2 A r_o^2}{xG} \omega^4 - \rho A \omega^2 \right] U = 0 \quad (6)$$

이 식은 복소수 계수와 복소수 변위 U를 갖는 4차 완전미분방정식으로, 이 식을 간단히 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{d^4 U}{dx^4} + a \frac{d^3 U}{dx^3} + b \frac{d^2 U}{dx^2} + c \frac{dU}{dx} + dU = 0 \quad (7)$$

이는 x에 대한 선형상미분방정식이므로 $U = pe^{\lambda x}$ 의 해를 갖는다. 따라서 이를 대입하면

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (8)$$

의 4차 다항식이 된다. 여기서 a, b, c, d는 복소수이며 식(6)의 계수이며 다음과 같고, λ 도 복소수이다.

$$\begin{aligned} a &= -\frac{jT}{EI} \\ b &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{EI\rho}{xG} + \rho Ar_o^2 \right) \omega^2 \\ c &= -j \frac{1}{EI} \frac{T\rho}{xG} \omega^2 \\ d &= \frac{1}{EI} \left(\frac{\rho^2 Ar_o^2}{xG} \omega^4 - \rho A \omega^2 \right) \end{aligned} \quad (9)$$

3.2 4차 다항식의 해

앞의 4차 polynomial은 다음의 3차 해석방정식을 가진다.^(3,4)

$$\mu^3 - b\mu^2 + (ac - 4d)\mu - a^2d + 4bd - c^2 = 0 \quad (10)$$

이 μ 에 대한 3차 방정식의 임의의 한근을 μ_1 라 하고

$$R = \left(\frac{a^2}{4} - b + \mu_1 \right)^{1/2} \quad (11)$$

라고 하자. 그러면 다음과 같이 D와 E를 정의하여,

$R \neq 0$ 일 때는

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b + \frac{4ab - 8c - a^3}{4R} \right)^{1/2} \\ E &= \left(\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b - \frac{4ab - 8c - a^3}{4R} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (12)$$

$R = 0$ 일 때는

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{3a^2}{4} - 2b + 2(y^2 - 4d)^{1/2} \right)^{1/2} \\ E &= \left(\frac{3a^2}{4} - 2b - 2(y^2 - 4d)^{1/2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (13)$$

4차 방정식의 근을 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{a}{4} + \frac{R}{2} + \frac{D}{2} \\ \lambda_2 &= -\frac{a}{4} + \frac{R}{2} - \frac{D}{2} \\ \lambda_3 &= -\frac{a}{4} - \frac{R}{2} + \frac{E}{2} \\ \lambda_4 &= -\frac{a}{4} - \frac{R}{2} - \frac{E}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

3.3 공간 해

4차 다항식을 사용하여 방정식(7)의 해를 표시하면,

$$U = p_1 e^{\lambda_1 x} + p_2 e^{\lambda_2 x} + p_3 e^{\lambda_3 x} + p_4 e^{\lambda_4 x} \quad (15)$$

이 되며, 이는 고유진동수 ω 에 의존하여 결정되는 λ_i 와 함께 x축을 따라 분포하는 복소 변형을 나타낸다.

4. 경계조건

균일 단면 요소들이 연결되어 있는 경계에서의 연속조건은 좌측요소(L로 표시)의 우측 끝과 우측요소(R로 표시)의 좌측 끝에서 변위, 기울기, 모멘트 및 전단력이 같다는 가정이다. x-y와 x-z평면 상에서 경계조건을 복소수함수로 나타내면 다음의 4개 식으로 정리된다.⁽²⁾

$$u|_l = u|_r \quad (16a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_l = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_r \quad (16b)$$

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - jT \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_l = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - jT \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_r \quad (16c)$$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - jT \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho Ar_o^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \Big|_l \\ = EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - jT \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho Ar_o^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \Big|_r \end{aligned} \quad (16d)$$

이 4개의 경계조건에 대하여 변수분리하면 다음과 같다.

$$U|_l = U|_r \quad (17a)$$

$$\frac{dU}{dx} \Big|_l = \frac{dU}{dx} \Big|_r \quad (17b)$$

$$EI \frac{d^2 U}{dx^2} - jT \frac{dU}{dx} \Big|_L = EI \frac{d^2 U}{dx^2} - jT \frac{dU}{dx} \Big|_R \quad (17c)$$

$$EI \frac{d^3 U}{dx^3} - jT \frac{d^2 U}{dx^2} + \rho A r_o^2 \omega^2 \frac{dU}{dx} \Big|_L = EI \frac{d^3 U}{dx^3} - jT \frac{d^2 U}{dx^2} + \rho A r_o^2 \omega^2 \frac{dU}{dx} \Big|_R \quad (17d)$$

5. 해석 및 토의

공간 거동을 표시한 식(15)는 균일 단면을 갖는 봉의 해당 구간내에서 유효하다. 따라서 2개 이상의 균일 단면 봉으로 구분할 수 있는 다단연속봉의 해석은, 구간별로 정의된 봉의 변형식(15)을 사용하고 경계조건을 사용하여 구간과 구간을 연결하게 된다.

5.1 균일단면봉에 대한 계산

계산의 신뢰도를 검토하기 위하여 균일한 단면적을 갖는 봉에 대하여 오일러-베르누이 보의 이론해와 본 연구의 계산에 의한 결과를 비교해 보고자 한다. 이 비교에서는 고유진동수만을 비교하기로 한다. 이론해는 양단 자유 오일러-베르누이 보에 대한 고유진동수

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}$$

를 굵기가 다른 두 경우에 대하여 적용하여 고유진동수를 계산하고, 본 연구의 방법을 다시 적용하여 계산하고 결과를 비교한다.

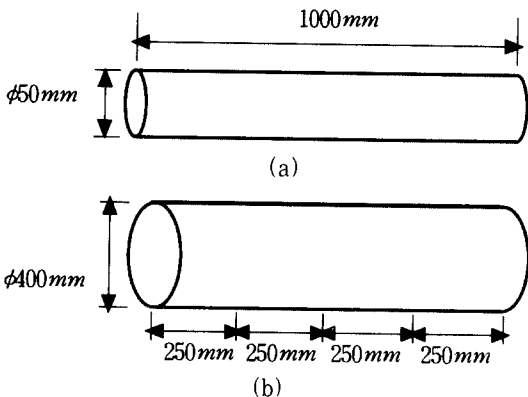


Fig.1 Uniform beams having circular cross-section ($E=2100000kg_f/cm^2$, $\rho=0.0078kg/cm^3$, $\nu=0.29$).

Fig.1에는 길이가 100cm이고, 직경이 각각 5cm와 40cm인 2개의 단일봉을 나타낸다. 그림의 2개의 모형 각각에 대하여, 중앙에 절점을 선택하여 2개(500mm × 2개) 및 4개(250mm × 4개)의 요소를 갖는 연속봉으로 모형화하고, 연속조건을 부여하여 본 연구에서 제시한 방법으로 고유진동수를 계산하여 Table 1에 나타내었다. 요소의 개수(2개 및 4개)에 의한 계산결과와의 차이는 표에 나타낸 소수점 이하 첫째자리 숫자보다도 훨씬 작기 때문에 별도로 표시하지는 않았다.

Table 1. Comparison of natural frequencies ($T=0$)

	natural frequency (Hz)			
	Euler theory		This method (using Timoshenko theory)	
model (a)	1st	100.9	1st	100.6
	2nd	403.4	2nd	399.4
	3rd	907.7	3rd	887.7
model (b)	1st	806.9	1st	704.8
	2nd	3,227.4	2nd	2,204.9
	3rd	7,261.7	3rd	3,930.0

모형(a)는 직경과 길이의 비가 1/20로서 1차고유진동수 0.3% 이내에서 거의 동일하지만(1) 고차로 올라갈수록 값의 차이가 증가하는데 이는 회전관성과 전단변형이 고차일수록 크게 기여하여 고유진동수를 낮추기 때문이다. 모형(a)에 대한 결과를 비교해 보면 본 연구에 의한 방법에 신뢰를 가질 수 있음을 알 수 있다. 모형(b)에서는 직경과 길이의 비가 4/10으로 이미 회전관성과 전단변형이 크게 기여하는 모형으로서, 오일러-베르누이 보이론에서는 회전관성과 전단변형이 고려되지 않기 때문에 표에서 볼 수 있듯이 1차 고유진동수부터 큰 차이가 있다. 이 차이는 모형(a)에서와 같이 고차로 갈수록 더욱 커진다. 본 연구에서는 오일러-베르누이 보와 티모센코 보의 차이를 언급하고자 하는 것이 아니므로 더 이상의 설명은 생략한다.

5.2 일반 형태의 연속봉에 대한 고유진동수와 고유모우

Fig.2는 본 연구에서 만든 다단 연속봉의 고유진동 특성 계산 방법을 일반적 형태에 적용하기 위한 다단봉을

나타낸다. 이 모형의 제원은 Table 2에 나타내었다. 요소 1과 2의 사이의 경계와 요소 6의 끝단에는 단순지지조건을 부여했다. 좌측과 우측 및 단면변화의 경계조건을 부여하여, 전체 시스템에 대한 식을 만들 수 있다. 이때 식에는 $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}$ 와 $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}$ 가 사용되는데, i 번째 균일봉 요소내에서만 정의 되는 값들이다. 식(14)와 식(15)에 나타나는 계수를 구분하여 i 번째 균일봉에 대한 값들을 나타낸다.

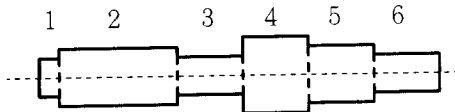


Fig.2 Multi-step circular beam.

Table 2. Specification of model(Fig.2).

No. element	Length(cm)	Diameter(cm)
1	3	4
2	17	5
3	10	4
4	10	6
5	10	5
6	10	4

($E=2100000\text{kg}_f/\text{cm}^2$, $\rho=0.0078\text{kg}/\text{cm}^3$, $\nu=0.29$).

전체 시스템에 대한 변형식은, $\{p_{ij}\}$ ($i=1,2,\dots,\text{요소 수}$, $j=1,2,3$)을 변수로 할 때 봉 요소 수의 4배 크기의 차원을 갖는 행렬을 갖는다. 이는 각 끝단 경계에서 생성된 (2×4) 차원의 부분행렬과, 각 중간단 경계에서의 (4×8) 차원의 부분행렬들로부터 구성되어 진다.

이 행렬은 봉의 기하학적 특징, 재질 특징, 토크 등의 값 뿐만 아니라 진동수 ω 에 의존하여 결정되는 특징을 갖는다. 전체 시스템에 대한 식은 우변이 0인 연립방정식으로서, 이 식이 의미있는 해를 갖기 위한 조건은 좌변 행렬의 행렬식이 0이 될 때이다. 이때 이를 만족하는 ω 가 존재하는데, 이것이 고유진동수이며, 이때의 $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, \dots, p_{M1}, p_{M2}, p_{M3}, p_{M4}$ 는 봉의 변형곡선을 결정하는 계수들이 된다. 변형곡선을 구하기 위해서 이들 계수뿐만 아니라 각 구간에서 정의되는 $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}$ 를 계산해야 한다.

Fig.2(Table)의 모형에 대하여 본 연구에서 제시한 방법을 사용하여 구한 고유진동수를 4차까지 나타내면 168.7Hz, 1105.9Hz, 2422.2Hz, 4232.4Hz이며, 각각의 고유진동수에 대한 고유 모우드는 Fig.3에 보여준다.

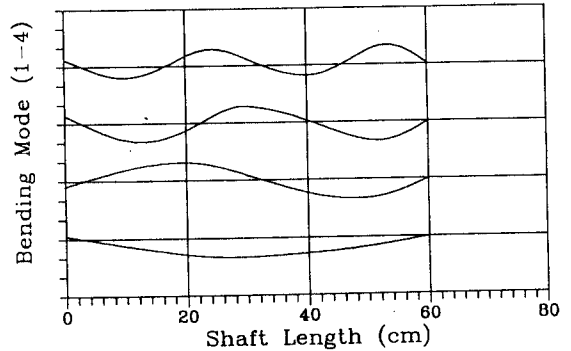


Fig.3 Modes of natural vibration.

이 연구의 방법을 통하여, 티모센코 보 이론을 단면이 균일하지 않은 연속 봉에 적용하여 고유모우드를 연속곡선으로 구할 수 있게 된다. 이와같이 고유진동수를 연속곡선으로 표현하면 응력의 집중부위까지도 알 수 있는 장점을 가진다.

양단에 토크가 있는 경우에 대하여 토크의 크기에 따른 고유진동수의 변화를 계산해 보면 Table 3와 같다. 고유진동수는 rpm으로 수치를 크게 표현하여 비교가 분명하도록 하였다. 이 결과 토크는 고유진동수를 변화시키는 역할을 하지만, 차수에 따라 고유진동수를 높이기도, 낮추기도 하는 것을 보여준다.

Table 3. Natural frequency depending on applied torque.

Torque ($\text{kg}_f \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2$)	Natural Frequencies (rpm)				
	1th	2th	3th	4th	5th
0 ~ 1,000,000	16,120.1	66,354.6	145,334.8	253,943.3	367,958.8
100,000,000	16,116.1	66,392.8	145,347.3	253,987.5	367,958.6
1,000,000,000	15,790.5	68,239.0	145,860.2	256,272.0	367,786.3

6. 결 론

보의 길이에 대한 단면 크기의 비가 일정한 값을 넘어서면 회전관성과 전단변형의 영향이 보의 거동에 기여하게 되는데, 이를 나타내는 티모셴코 보 이론은 해석 방법이 극히 제한되어 있다. 본 연구에서는 토오크가 부여되고 원형단면 봉의 거동에 회전관성과 전단변형을 고려한 더욱 일반화된 운동방정식을 취급하였다.

공작기계나 구조물에 사용될 수 있는 다단 원형단면 봉의 고유진동 특성을 해석하기 위해, 운동방정식의 해를 그대로 사용하였다. 4차 편미분방정식의 해를 구하기 위해 복소수 변위를 사용하고 변수분리를 하여 완전미분방정식으로 표시하였다. 이 완전미분방정식의 해를 해석적으로 표시하고 다단 봉 모형의 경계조건을 부여하여 연립 대수방정식으로 표시하여 고유진동수와 고유모우드를 계산하였다.

간단한 모형에 대하여 오일러-베르누이 보의 해와 본 연구의 방법을 이용한 해석을 비교하였으며, 일반적인 다단 원형단면 봉을 가정하여 고유진동수와 고유모우드를 구하였다. 단면의 크기와 길이방향 크기의 비가 클수록 회전관성과 전단변형의 영향이 크며, 고차 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 확인하였다.

양단에 토오크가 부여될 때, 작은 토오크로는 고유진동의 특성에 변화가 없으나, 일정크기 이상이 되면 고유진동 특성의 변화를 감지할 수 있었다. 토오크에 의한 고유진동수는 일률적인 증가나 감소가 아니라, 차수에 따라 증가 또는 감소함을 보였다.

유한요소법과는 달리 이 연구의 방법을 사용하여 연속된 고유모우드와 정확한 고유진동특성을 구할 수 있었으며, 연속된 고유모우드는 응력분포에 대한 정보를 제공할 수 있어 이와같은 연구가 앞으로 계속되기를 희망한다.

후 기

본 연구는 1996년 전주대학교 학술연구지원에 의해 연구된 것입니다.

참 고 문 헌

1. Inman, D.J., Engineering Vibration, Prentice-Hall, Inc., Chapter 6, 1996.
2. Lee, C.-W., Vibration Analysis of Rotors, Kluwer Academic Publishers, Chapter 8, 1993.
3. Beyer, W.H., CRC Standard Mathematical Tables, CRC Press Inc., 1979.
4. 전오성 외, "배관계 진동특성에 미치는 탄성 중간지지대의 영향," 대한기계학회논문집 제15권 제6호, 1799-1806, 1991.