

편심환내의 회전 유동

심우건*

Rotating Flows in Eccentric Cylinders

Woo-Gun Sim*

Abstract

A numerical method based on the spectral collocation method is developed for the steady rotating flows in eccentric annulus. Steady flows between rotating cylinders are of interest on lubrication in large rotating machinery. Steady rotating flow is generated by the rotating inner cylinder with constant angular velocity. The governing equations for laminar flow are simplified from Navier-Stokes equations by neglecting the non-linear convection terms. Integrating the pressure round the rotating cylinder based on the half Sommerfeld method, the load on the cylinder is evaluated with eccentricity. The attitude angle and Sommerfeld variable are calculated from the load. It is found that those values are influenced by the eccentricity. The attitude and Sommerfeld reciprocal are decreased with eccentricity. As expected, the effect of the annular gap ratio on them is negligible.

Keyword : Spectral Collocation method(스펙트럼 배치방법), Sommerfeld variable(섬머펠드 변수), Attitude angle(경사각), Separation(박리)

1. 서론

편심인 회전체 사이의 정상 유동에 대한 연구는 저널 베어링의 설계와 관련하여 상당한 연구가 진행되고 있다⁽¹⁻³⁾. 원자력 발전소의 터빈과 전기 발생기처럼 회전 속도가 클 때 여기에 사용되고 있는 베어링의 윤활에 대한 연구의 중요성은 따로 설명할 필요가 없을 것이다. 특히 회전 속도가 증가하여 유동이 불안정한 상태로 운전되거나 터빈의 갑작스런 날개 손상 등으로 인하여 진동 문제

와 복합될 때 문제는 더욱 심각하여진다. 경제적 측면에서는 진동이 생길 수 있는 임계유속 이상에서도 운전할 수 있는 유연성을 가지고 있는 것이 바람직하다.

편심 환 내의 회전 유동에 관한 연구는 Wannier⁽⁴⁾에 의하여 복소 변수방법에 의하여 오래 전에 연구되었으며 그 후 Wood⁽⁵⁾가 극좌표 변환을 사용하여 유동장을 해석 하였으며 해는 베셀의 함수로 표시하였다. 실린더의 진동과 관련된 oil whirl 현상을 예측하기 위하여 부가질량과 점성 등에 의한 감쇠력을 수치 해석적으로 분석하였다⁽⁶⁾.

* 한국전력기술주식회사 안전계통설계분야

이 때 사용한 수치해석 방법은 스펙트럼 배치방법으로서 유동의 변수는 스펙트럼 형태로 정의되며 사용된 다항식의 계산 영역 범위로 물리적 영역은 변환된다. 압착 유막의 난류 유동에 대한 연구가 $k-\epsilon$ 모델에 근거하여 Ku와 Tichy⁽⁷⁾에 의하여 수행되었다. 매우 좁은 환사이의 회전 유동을 조사하여 윤회이론을 실험적으로 검증하는 것은 실험 장치의 설치 및 측정의 어려움 때문에 일반적으로 단순화된 모델을 제작하여 실험과 이론을 비교하여 검증하고 있다⁽⁸⁾.

최근 검시체적 방법을 사용하여 지배방정식을 유도하고 기존의 이론적 모델에 비하여 좀 더 정확하고 응용범위를 확대하여 유동장을 해석하였으나⁽⁹⁾ 미소체적에 작용하는 운동량 방정식으로부터 유동장을 해석한 예는 아직 드물다. 이에 저자는 Navier-Stokes의 방정식으로부터 지배방정식을 유도하고 스펙트럼 배치방법을 사용하여 좀 더 정확하게 유동장을 해석하려고 본 모델을 개발하였다. 윤회이론에 대한 스펙트럼 배치방법의 실용성을 검토할 목적으로 본 논문에서는 일반적인 윤회이론⁽¹⁰⁾에 사용되는 가정의 일부분을 수용하였다. 일반적으로 윤회이론에 사용되는 중요한 가정은 (1) 압력의 반경방향의 변화율은 무시되고, (2) 환의 간격은 원주 둘레에 비하여 상당히 작으며, (3) 유체는 Newtonian 유체이고 유동은 층류이며, (4) 유체의 점성은 유동장 내에서 변하지 않는다. 또한 베어링에 작용하는 하중은 half Sommerfeld 방법에 근거하여 계산하였다.

본 수치해석 방법이 기존의 윤회 이론에 사용되는 레이놀드 방정식의 이론해석 방법에 비하여 크게 다른 점은 압착 유막항(squeeze film term)에 근거한 검시체적 방법을 사용하지 않고 미소체적에 작용하는 운동량 방정식으로부터 직접 지배방정식을 유도하였다. 또한 압력의 반경 방향의 변화율과 반경방향의 유속을 고려하였으며 따라서 비교적 환의 간격이 큰 경우에도 활용할 수 있다.

2. 윤회이론

편심환 내부에 형성되는 유막의 윤회 방정식을 유도하고 유동장을 해석하여 유동 특성을 검토하는 것은 베어링에 작용하는 하중을 예측하기 위한 기초 작업이다. 회전하고 있는 내부실린더에 의하여 유막을 형성하고 마찰 표면에 압력에 의한 힘이 작용한다. 즉 유동 수축부의 압력이 썩기로 작용하여 베어링에 작용하는 하중과 평형을 이루

며 얇은 유막을 형성하고 있다. 마찰에 의한 온도상승과 점성응력에 의하여 회전체와 고정체에 비틀림이 작용하나 본 논문에서는 다루지 않았다. 유막에 생성되는 열 에너지는 충분히 소산되어 정상상태에서 평형상태를 유지한다.

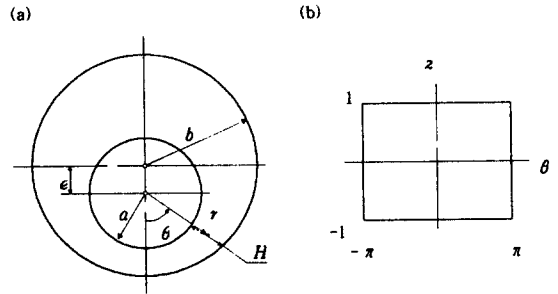


Fig. 1. (a) Physical domain and (b) computational domain for eccentric configurations

편심환의 기하학적 형상은 Fig. 1과 같다. 내외부 실린더의 반경은 각각 a 와 b 이고 편심량은 e 이며 일정 반위각, θ 에서의 환의 간격은 H 이며 내부실린더의 회전 각속도는 Ω 이다. 따라서 내부 실린더는 $W_\theta (= a\Omega)$ 의 원주속도로 회전하며 이로 인한 유체의 반경방향과 원주방향의 유속은 각각 v 와 u 이다. 일반적으로 윤회유가 흐르는 환의 평균 두께, $b-a$,는 반경에 비하여 상당히 작고 베어링의 축방향 길이가 무한하면 다음과 같은 가정이 가능하다.

$$\begin{aligned} v \ll u \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} \ll \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} \ll \frac{\partial v}{\partial r} \\ u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 u 는 축방향의 유속이다.

환 내부에 흐르는 유동의 지배방정식은 Navier-Stokes의 운동량 방정식과 연속 방정식으로부터 유도되었다. 환의 기하학적 형상에 따른 가정을 고려하면 대류항은 무시될 수 있으며 전도항의 일부도 무시할 수 있다. 윤회이론에서는 유속과 유속 변화율의 곱으로 표시되는 비선형 대류항은 일반적으로 전도항에 비하여 상당히 작다. 또한 스펙트럼 방법에 근거한 본 수치해석에서는 비선형항의 수치 해석적 어려움 때문에 고려하지 않았다. 따라서, 본 수치 해석적 모델에서는 전체 전도항과 압력항만을 고

려하여 다음과 같은 단순화된 지배방정식을 얻었다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} &= 0 \end{aligned}$$

지배방정식은 경계조건에 의하여 영향을 받으며 회전체와 고정체 표면에서의 경계조건은 각각

$$\begin{aligned} w &= W_0, \quad v = 0 \\ w &= 0, \quad v = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

이다.

스펙트럼 배치방법에 의하여 유동장을 해석하기 위하여 유동장은 물리적 영역으로부터 수치해석 영역으로 변환하여야 한다. 물리적 영역의 기하학적 형상을 고려하면 유체의 변수는 원주방향으로 Fourier 함수를 사용할 수 있고 반경방향으로는 Chebyshev 다항식을 사용하여 정의할 수 있다. 따라서 원주방향의 좌표는 다음 식을 사용하여 변환하는 것이 편리하다.

$$r = a + \frac{H}{2} (1-z) \quad (4)$$

여기서 Chebyshev 다항식은 $z = -1$ ($r = b = a + H$)에서부터 $z = 1$ ($r = a$)까지의 영역에서 정의된다. 또한 해석 결과를 일반화하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 사용하였다.

$$\begin{aligned} h &= \frac{H}{a}, \quad \hat{e} = \frac{e}{b-a}, \quad \delta = \frac{b-a}{a} \\ \hat{w} &= \frac{w}{W_0}, \quad \hat{v} = \frac{v}{W_0}, \quad \hat{p} = \frac{p}{\rho W_0^2}, \quad Re_w = \frac{2W_0(b-a)}{\nu} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 무차원 환의 간격은 방위각의 함수로서

$$h = \frac{b}{a} \left[1 - \left(\frac{e}{b} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{e}{a} \cos \theta - 1 \quad (6)$$

으로 표현되며 Re_w 는 환의 평균두께와 원주속도에 근거한 레이놀드 수이다.

반경방향의 좌표변환 함수를 사용하고 무차원 변수를 고려하면 지배방정식은 수치해석 영역으로 변환되며

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + B \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + C \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z \partial \theta} + D \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \theta^2} \\ - D \hat{w} + 2D \Theta(\hat{v}) - \frac{Re_w}{4} E \sqrt{D} \Theta(\hat{p}) &= 0 \\ A \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} + B \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} + C \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z \partial \theta} + D \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \theta^2} \\ - D \hat{v} - 2D \Theta(\hat{w}) + \frac{Re_w}{4} E \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} - \sqrt{D} \hat{v} - \sqrt{D} \Theta(\hat{w}) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

으로 표시된다. 여기서

$$\begin{aligned} A &= 1 + D[(1-z)h'/h], \\ B &= -\sqrt{D} + D(1-z)[h''/h - 2(h'/h)^2], \\ C &= 2D(1-z)h'/h, \quad D = \{h/[2+(1-z)h]\}^2, \\ E &= H/(b-a) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Theta(f) = \frac{\partial f}{\partial \theta} + (1-z) \frac{h'}{h} \frac{\partial f}{\partial z}$$

이며 윗 첨자 '과 ''은 원주방향의 일 이차 미분을 나타낸다. 또한 경계방정식 (3)은

$$\begin{aligned} \hat{w} &= 1, \quad \hat{v} = 0 \\ \hat{w} &= 0, \quad \hat{v} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

으로 표현된다.

스펙트럼 방법을 사용하여 유체의 변수는 스펙트럼 형태의 다항식으로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \sum_j \sum_k [V_{cjk} \cos k\theta + V_{sjk} \sin k\theta] T_j(z) \\ \hat{w} &= \sum_j \sum_k [W_{cjk} \cos k\theta + W_{sjk} \sin k\theta] T_j(z) \\ \hat{p} &= \sum_j \sum_k [P_{cjk} \cos k\theta + P_{sjk} \sin k\theta] T_j(z) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $T_j(z)$ 는 Chebyshev 다항식을 나타내며 유체의 변수는 각각 $2 \times j \times k$ 개의 미지수를 포함하고 있다. 다항식으로 표현된 유체의 변수를 지배방정식에 대입하면 $6 \times j \times k$ 의 미지수를 포함하는 대수 방정식으로 표시된다. 미지수를 풀기 위하여 경계조건을 포함하는 $6 \times j \times k$ 의 배치점에 적용하여 행렬식을 얻을 수 있다. 이로부터 미지수를 계산할 수 있고 유체변수를 역 변환하여 물리적 영역에서의 유동장을 해석할 수 있다.

실린더에 작용하는 하중은 실린더의 표면에 작용하는 전단응력과 압력을 원주방향으로 적분하여 구할 수 있다. 일반적으로 베어링에 작용하는 하중은 half Sommerfeld 방법⁽¹⁰⁾에 따르면 유로의 확산부는 음압이 존재하고 물리적으로 불합리하여 교축쪽 유로의 양압만을 고려하여 베어링에 작용하는 힘을 계산한다. 즉 연속적인 유체의 부압에 의한 유체의 파열 현상은 유막에서 발생하지 않으며 음압부의 압력을 영으로 간주할 수 있다. 따라서 실린더에 작용하는 대칭선 방향의 힘과 대칭선에 수직한 방향의 힘은 각각

$$F = \int_{\pi}^{2\pi} p \cos \theta a db, \quad G = \int_{\pi}^{2\pi} p \sin \theta a db \quad (11)$$

으로 구할 수 있고 대칭선에 대한 하중의 기울기는

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{G}{F}\right) \quad (12)$$

으로 표시된다. 일반적으로 윤활의 특성은 Sommerfeld 변수, S,

$$S = \frac{1}{S} = \frac{N\mu}{P} \left(\frac{b+a}{2(b-a)}\right)^2 \quad (13)$$

에 의하여 분석되며 편심의 함수로서 표시된다. 여기서

$$P = \frac{(F^2 + G^2)^{\frac{1}{2}}}{2a} \quad (14)$$

이고 N 은 $RPS(= \Omega/2\pi)$ 을 나타낸다. Sommerfeld 변수의 역수는 일반적으로 편심량의 함수로서 표시되며 편심의 크기에 지수적으로 감소하고 있다. 베어링에 작용하는 하중이 크면 편심의 정도가 증가하며 하중의 기울기는 감소한다.

3. 수치해석 결과 검토

저널 베어링의 환 사이에 흐르는 유동장을 분석하고 이로부터 베어링에 작용하는 하중과 경사각을 계산할 수 있다. 본 수치해석에서는 환의 평균간격 ($b-a$), 회전 속도 (RPM)와 편심(ϵ)의 정도를 변화시키면서 결과를 검토하였다. 해석에 사용된 내부 실린더의 내경은 $a = 0.03m$ 이고 점성유체의 동점성계수는 $\nu = 2 \times 10^{-4} m^2/s$ 이며 사용된 다항식의 6차항까지 계산에 고려되었다. 지배방정식이 적용된 수치해석 영역내의 배치점은 균일하게 분포되

었다. 유동장을 분석하기 위하여 일정 원주각에서의 유체 변수들의 반경방향의 변화율을 도시하였다. 유막에 의한 하중을 예측하기 위하여 회전체 표면에서 압력의 원주방향의 변화율도 또한 검토하였다. 베어링에 작용하는 하중의 경사각과 Sommerfeld 변수를 편심량을 변화시키면서 구하였다.

환의 무차원 평균 간격비, $\delta = (b-a)/a$, 가 다른 두 경우에 적용하여 얻은 결과로부터의 유체 변수의 변화율을 Fig. 2와 3에 도시하였다. 유막(film)의 두께, H,는 무차원 평균 간격비와 원주각의 함수이다. 무차원 원주방향 유속의 절대값은 두 경우가 유사하며 원주방향과 반경방향의 유속은 원주방향에 대하여 각각 cosine, sine함수가 주성분임을 알 수 있다. 원주방향 유속의 반경방향의 변화율은 $\theta = 180^\circ$ 에서는 회전하는 내부 실린더 ($z=1$) 쪽이 크며 $\theta = 0^\circ$ 에서는 고정된 외부 실린더 ($z=-1$) 쪽이 크다. 또한 $\theta = 120^\circ \sim 240^\circ$ 사이에 고정체 부근에 음의 원주방향 속도 즉 박리류가 존재함을 알 수 있다. Fig. 4에 유속의 등고선을 표시하는 Stream Line을 도시하였으며 간격이 조밀하면 속도의 구배가 큼을 나타낸다. 원으로 표시된 부분은 선회류 즉 박리류를 나타내며 일반적으로 음의 Stream 값으로 표시되고 원의 밀도가 조밀할 때 박리의 정도가 크다. 그림에 보이듯이 편심의 정도가 크면 박리의 정도가 큼을 알 수 있다. 반경방향 유속의 구배는 포물선 형태이며 최대 유속은 $\theta = 60^\circ$ (양의 값)와 $\theta = 300^\circ$ (음의 값) 부근에 즉 박리의 시작점과 재부착점 부근에 존재하고 있다. 반경방향 유속의 절대값은 원주방향 유속에 비하여 상당히 작으며 평균 환 간격이 적을 때 더 작음을 알 수 있다. 즉 일반적인 윤활이론의 가정이 합당함을 보이고 있다.

압력의 반경방향 변화율은 거의 없으며 원주방향에 대하여 $\theta = 0^\circ$ 에 점대칭이다. 즉 Sine함수가 주성분임을 알 수 있다. 압력은 흐름의 교축부 $\theta > 180^\circ$ 에는 양의 값이며 흐름의 확산부 $\theta < 180^\circ$ 에는 음의 값이다. 압력의 최대점과 최소점은 반경방향의 유속과 마찬가지로 좁은 환 간격 쪽에 있으며 환의 평균 간격비가 적을 때 압력의 절대값은 상당히 커짐을 보이고 있다.

회전체의 속도를 증가시키면서 회전체 표면에서 무차원 압력의 원주방향의 구배를 Fig. 5에 도시하였으며 편심의 정도에 의한 영향을 Fig. 6에 보였다. 무차원 압력은 회전속도의 제곱에 대하여 정의되었으므로 회전속도가 증가

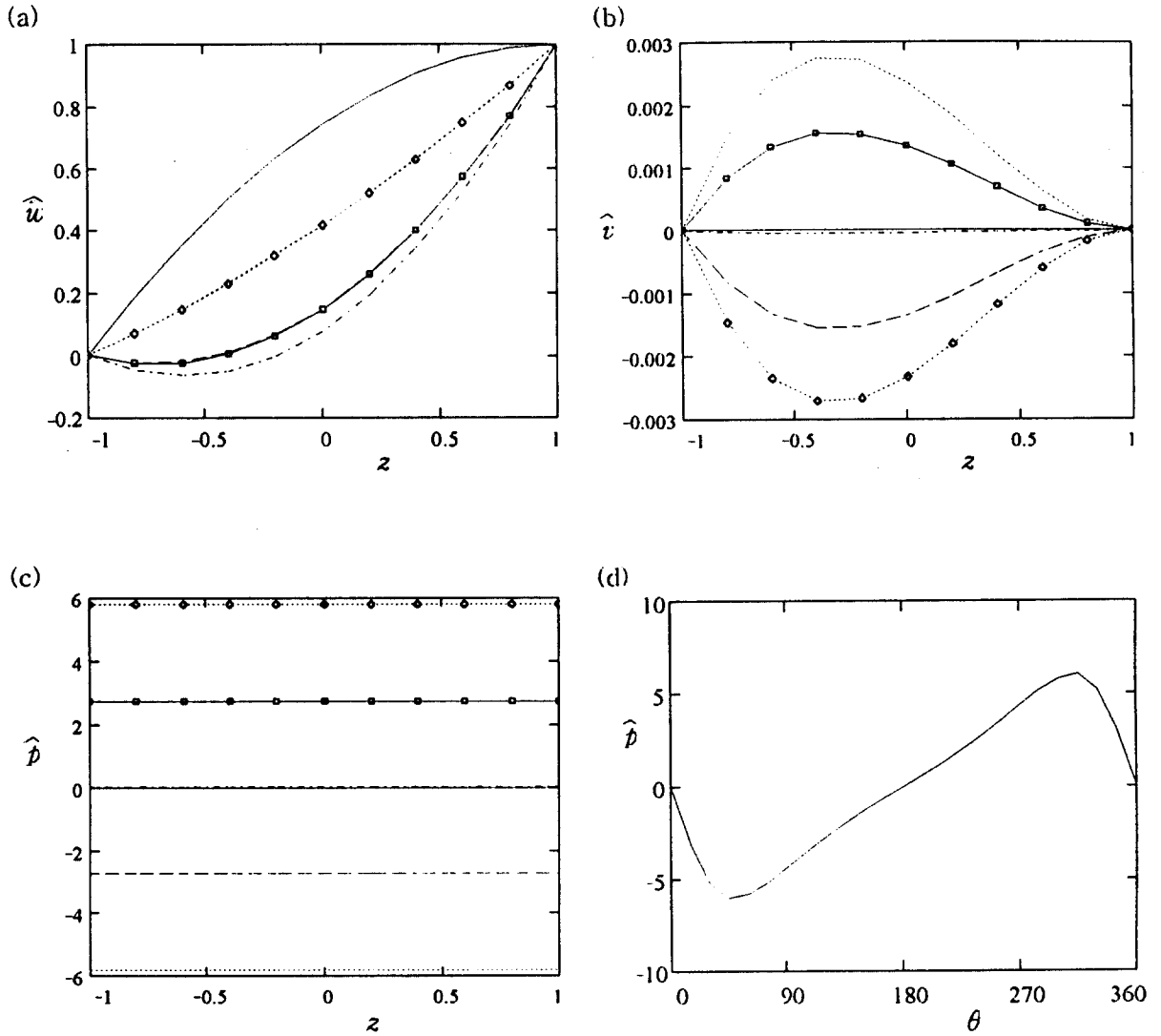


Fig. 2 Radial variations of (a) circumferential flow velocity, (b) radial flow velocity, (c) pressure and (d) circumferential variation of pressure in nondimensional form for $\delta = 0.067$, $\hat{\epsilon} = 0.5$, $RPM = 300$, $Re_w = 18.85$.

—, $\theta = 0^\circ$; , $\theta = 60^\circ$; - - - - - , $\theta = 120^\circ$
 - · - · - · , $\theta = 180^\circ$; - □ - □ - , $\theta = 240^\circ$; - ◇ - ◇ - , $\theta = 300^\circ$

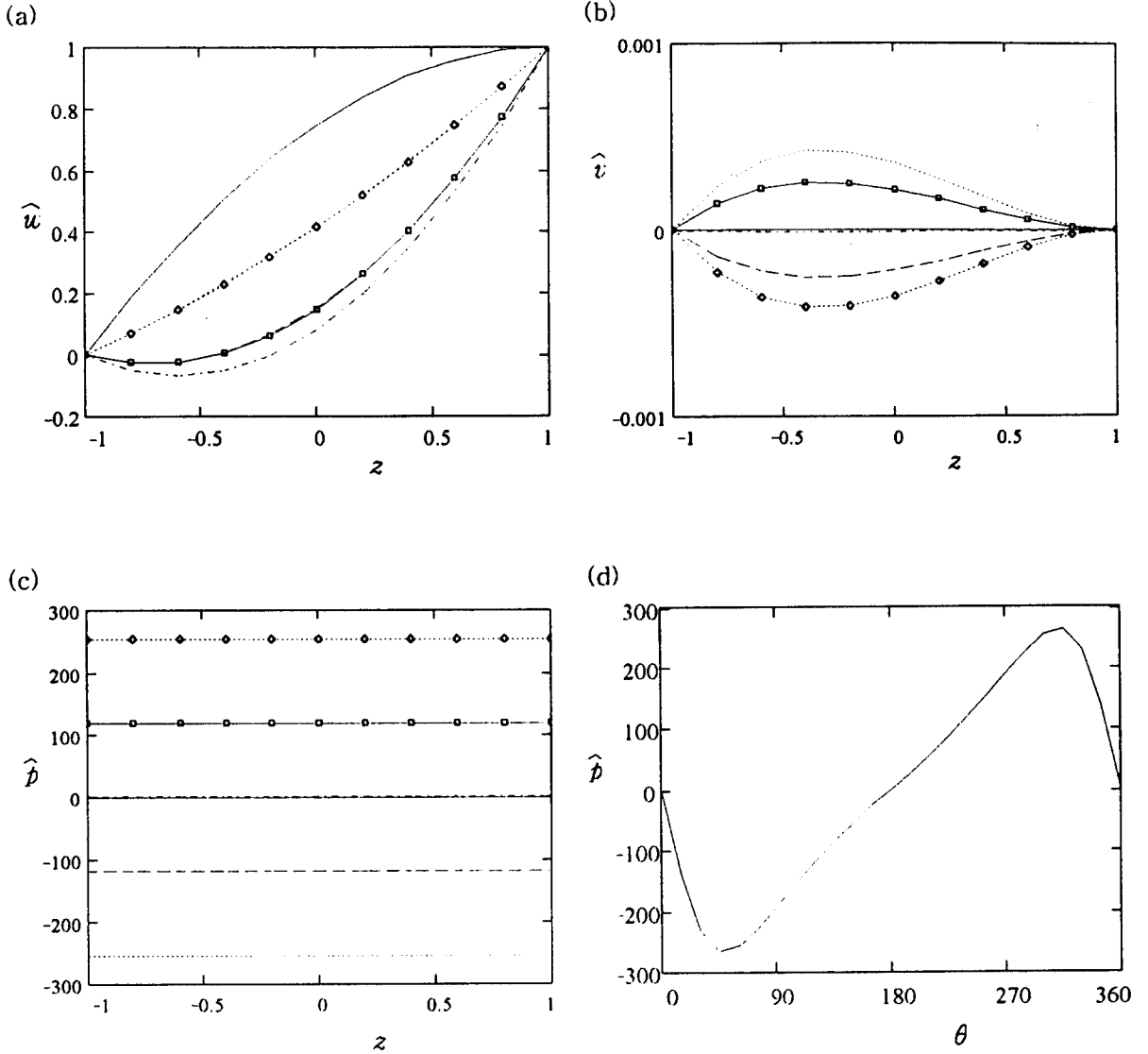


Fig. 3 Radial variations of (a) circumferential flow velocity, (b) radial flow velocity, (c) pressure and (d) circumferential variation of pressure in nondimensional form for $\delta = 0.01$, $\hat{e} = 0.5$, $RPM = 300$, $Re_w = 2.83$.

—, $\theta = 0^\circ$; , $\theta = 60^\circ$; - - - - - , $\theta = 120^\circ$
 - · - · - · , $\theta = 180^\circ$; - □ - □ - , $\theta = 240^\circ$; - ◇ - ◇ - , $\theta = 300^\circ$

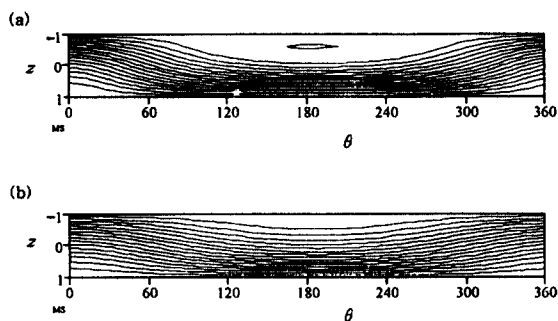


Fig. 4 Iso-velocity line for (a) $\hat{e}=0.5$ and (b) $\hat{e}=0.3$ with $\delta=0.067$, $Re_w=18.85$, $RPM=300$

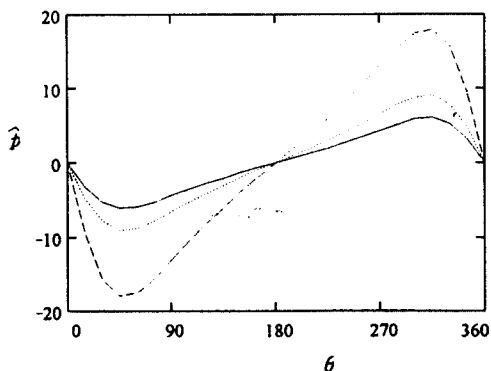


Fig. 5 Circumferential variations of nondimensional pressure with Re_w for $\delta=0.067$, $\hat{e}=0.5$
 —, $Re_w=18.85$; ·····, $Re_w=12.57$;
 - - - - -, $Re_w=6.28$

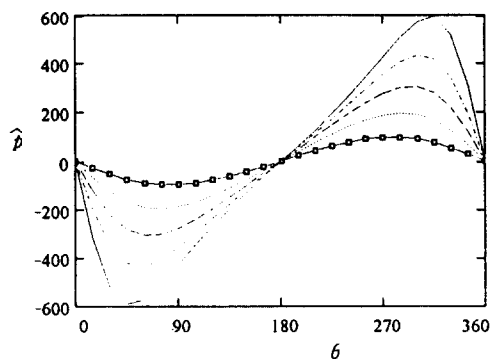


Fig. 6 Circumferential variations of nondimensional pressure with eccentricity for $\delta=0.067$, $Re_w=1.89$. -□-□-, $\hat{e}=0.1$; ·····, $\hat{e}=0.2$; - - - - -, $\hat{e}=0.3$; - · - · - ·, $\hat{e}=0.4$; —, $\hat{e}=0.5$

하며 무차원 압력은 감소하나 실제 압력은 다소 증가하고 있다. 편심량을 증가시키면서 압력의 최대점과 최소점은 좁은 환 간격 쪽으로 이동하며 절대값도 증가하고 있다. 따라서 베어링에 작용하는 압력에 의한 하중은 편심의 정도가 커지면 증가할 것이 예상된다.

편심의 정도에 의한 베어링에 작용하는 하중의 경사각과 Sommerfeld 변수에 미치는 영향을 검토하기 위하여 두 경우의 평균 환 간격비에 적용하여 Fig. 7에 결과를 도시하였다. 편심량이 증가할수록 하중의 경사각은 감소하며 Sommerfeld 변수의 역수가 감소하고 있다. 즉 베어링에 작용하는 하중은 편심이 증가함에 따라 증가한다. 또한 두 경우의 결과를 비교하면 경사각과 Sommerfeld 변수는 환의 간격비에 거의 영향을 받지 않고 있다.

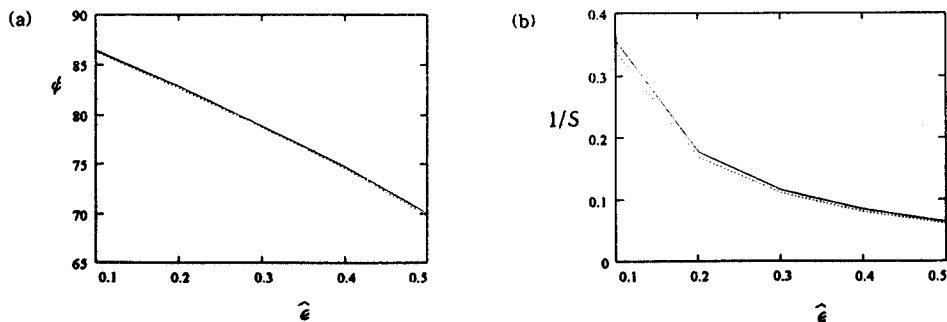


Fig. 7 Plot of (a) attitude angle and (b) Sommerfeld variable with nondimensional eccentricity for a not $\alpha=0.03$, $RPM=300$.
 —, $\delta=0.067$, $Re_w=18.85$; ·····, $\delta=0.0067$, $Re_w=1.89$

4. 결론

저널 베어링에 작용하는 하중의 동적 특성을 검토하기 위하여 스펙트럼 배치방법에 근거한 수치해석 방법을 사용하여 유동장을 해석하였다. 유동장은 층류의 범위 내에서 해석되었으며 내부 실린더의 회전에 의하여 환 사이에 회전 유동이 생성된다. 유동장의 지배방정식은 Navier-Stokes의 운동량 방정식으로부터 유도되었으며 일반적인 율이론에 기초를 두고 비선형 대류항은 무시하였으나 기존의 일반적인 해석 방법에 비하여 좀 더 정확한 해를 구할 수 있다. 유체의 변수는 Fourier 함수와 Chebyshev의 다항식으로 표시하였다. 정의에 사용된 미지수는 지배방정식을 수치해석 영역 내에 균일하게 분포된 배치점에 적용하여 얻은 대수방정식으로부터 구하였다. 베어링에 작용하는 하중과 하중의 경사각은 half Sommerfeld 방법을 사용하여 구하였다.

해석 결과로부터 반경방향의 유속은 원주방향의 유속에 비하여 무시할 수 있고 환의 간격이 가장 넓은 부분의 고정된 외부 실린더 부근에 박리류가 존재함을 알 수 있었다. 박리의 정도는 편심량이 증가할수록 증가하였다. 압력은 흐름의 교축부에는 양의 값이며 확산부에는 음의 값이다. 따라서 일반적인 율이론에 사용되는 가정은 환의 평균 간격비가 상당히 작은 경우 어렵적으로 사용할 수 있다. 편심량을 증가시키면서 압력의 최대점과 최소점은 환 간격이 좁은 쪽으로 이동하며 절대값도 증가하고 있다. 또한 환의 평균 간격비가 감소하면 압력은 상당히 증가한다. 하중과 하중의 경사각은 편심량에 의하여 영향을 받으나 환의 간격비에 대한 영향은 거의 없음을 알 수 있다.

본 스펙트럼 배치방법을 저널 베어링에 형성되는 유동장의 해석에 특별한 어려움이 없이 사용할 수 있었다. 앞으로 비선형 대류항도 고려하여 좀 더 정확한 해를 구하는데 응용할 수 있다고 본다.

참고문헌

1. Myers, C., "Bifurcation Theory Applied to Oil Whirl in Plain Cylindrical Journal Bearings", Journal of Applied Mechanics, Vol.51, pp.245-250, 1984.
2. Mori, A. and Mori, H., "Re-examination of Film Rupture Boundary Condition in Hydrodynamic Lubrication under Inertia Effect", ASME Journal of Tribology, Vol.113, pp.604-608, 1991.
3. Orszag, S.A., "Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 50, pp.689-703, 1971.
4. Wannier, G., "A contribution to the Hydrodynamics of Lubrication", Qurt. Appl. Math... Vol. 8, pp.1-32, 1950.
5. Wood, W., "The Asymptotic Expansions at Large Reynolds Numbers for Steady Motion between Non-coaxial Rotating Cylinders", Journal of Fluid Mechanics, Vol.3, pp.159-175, 1957.
6. Mateescu, D., Paidoussis, M.P. and Sim, W.G., "Spectral Solutions for Unsteady Annular Flows between Eccentric Cylinders Induced by Transverse Oscillations", Journal of Sound and Vibration, Vol.177(5), pp.635-649, 1994.
7. Ku, C.-P. and Tichy, J.A., "Application of the $k-\epsilon$ Turbulence Model to the Squeeze Film Damper", Journal of Tribology, Vol.109, pp. 164-168, 1987.
8. Coyne, J.C. and Elrod, H.G. Jr., "Conditions for the Rupture of a Lubricating Film - Part II New Boundary Conditions for Reynolds Equation", Journal of Lubrication Technology, Vol.93, pp. 156-167, 1971.
9. Antunes, J., Axisa, F. and Grunenwald, T., "Dynamics of rotors immersed in Eccentric Fluid Annulus", Journal of Fluids and Structures, Vol.10, pp. 893-913, 1996.
10. Cameron, A. and Ettles, C.M.M., Basic Lubrication Theory, Ellis Horwood Limited, 1st ed., Chichester, 1981.